

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Szakdolgozat

A matematikatanítás hatékonysága különböző korosztályok esetén

Témavezető:

Dr. Szabó Csaba

egyetemi tanár

Készítette:

Szeibert Janka

fizikatanár (természettudományi
gyakorlatok) – matematikatanár
osztatlan tanári mesterszak

2019

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

A TESZTELÉSES TANULÁS HATÉKONYSÁGÁNAK VIZSGÁLATA AZ ELEMİ GEOMETRIA TANÍTÁSÁBAN

TDK dolgozat

Témavezetı:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

Készítették:

Bereczky-Zámbó Csilla

matematika-fizika osztatlan tanárszak

Muzsnay Anna

matematika-kémia osztatlan tanárszak

Szeibert Janka

matematika-fizika osztatlan tanárszak

Tartalomjegyzék

Bevezető	3
Első kísérlet	8
Eredmények.....	12
Második kísérlet	17
Összegzés	19
A szerzők részvétele a kutatásban	20
Irodalomjegyzék.....	21
Függelék	24
„A” A témazáró dolgozat	24
„B” Összehasonlítás iskolán belül – a 9.a osztály témazáró dolgozata.....	26
„C” Összehasonlítás ugyanabban az iskolában, korábbi tanévben	27
„D” A Városmajori Gimnáziumi kontrollcsoportok szociális hátteréről	28
„E” A kísérleti csoport szociális hátteréről	29
„F” Önálló munka – feladatok felosztása.....	30
„G” Eddigi előadások – poszter prezentáció.....	33

1. Bevezető

A tanulásról és a memóriáról rengeteg régebbi és újabb elmélet létezik. Ezek többsége megegyezik abban, hogy a memória fő funkciói a kódolás, a tárolás és az előhívás. Kódolás alatt a memóriában való rögzítés folyamatát értjük, a tárolás pedig a rögzítettek „fejben tartása”, vagyis ezek megmaradása a memóriában valamilyen formában. Az előhívás az a folyamat, amikor a tároltakat felidézzük és valamilyen formában felhasználjuk.

Iskolai környezetben a kódolás, tárolás és előhívás folyamatai a tanítás-tanulás folyamatának keretei között zajlanak. A még ma is általánosan elfogadott elképzelés a tanulásról az, hogy a tanulási folyamat az információ bevitele a memóriába. Az előhívás szerepe ebben a felfogásban kizárólag a tanulás eredményességének ellenőrzése. Előhívásra a tanulási folyamat végén/után kerül sor, felelés vagy dolgozat formájában.

A tesztelési hatás témában az egyik legismertebb Roediger és Karpicke (Roediger; Karpicke, 2006) kísérlete. A tesztelés és az ismétléses tanulás hatását hasonlították össze egy kétszázötven szavas szöveg tanulásánál. A kísérlet alanyai egyetemisták voltak, akiket két csoportra bontottak. Mindkét csoport elolvasta a tananyagot, majd ezt követően a kontroll csoport még háromszor újra elolvasta (ismétlés) a szöveget. A kísérleti csoport csak egyszer olvashatta el a szöveget és azt követően az ismétlés helyett három alkalommal vissza kellett emlékezniük a tanultakra – tesztelték őket a tanultakból. A két csoport tanulási eredményességét megvizsgálták öt perccel az utolsó tanulási fázis után és az utolsó tanulási fázist követően egy héttel később is. Az azonnali tesztelésnél nem meglepő módon az első csoport (akik a legtöbbször olvashatták el a szöveget) jobban teljesített, mint a második csoport (akiket újraolvasás helyett teszteltek). Az eredmény egy héttel az utolsó tanulási fázist követően megfordult: a kísérleti csoport több mindenre emlékezett, mint az újraolvasó csoport.

	Négyszer olvas	1-szer olvas, 3-szor tesztelik
5 perc múlva	82%	70%
1 hét múlva	40%	63%

1. táblázat: Roediger és Karpicke kísérletének eredménye

Felmerült az a kérdés is, hogy a tanulás sikere függ-e a tesztelés módjától. Erre Smith és Karpicke (Smith; Karpicke, 2014) a következő kísérletet dolgozta ki. Öt csoporttal tanultattak egy ötszáz szóból álló szöveget. Az öt csoportból az egyik kontrollcsoport volt, a másik négyet négy különböző módon tesztelték. Egyet feleletválasztós teszttel, egyet kifejtős teszttel, egyet felidézéssel, a negyediket pedig vegyesen. A kontrollcsoport hagyományosan

újraolvasva tanult. A vegyes teszteléses csoport kérdései között „rövid kérdésekre válasz” és „feleletválasztós” típusú kérdések is szerepeltek. A négy teszteléses csoportnál nem volt újratanulás. Egy hét elteltével mind az öt csoportot újratesztelték. Két teszt volt, mindkét tesztben rövid kifejtős kérdések voltak. Az egyik teszt a tanult anyagban szereplő ismeretekre kérdezett rá, a másik teszt a frissen tanult anyag ismerete mellett igényelte a korábban tanultak alkalmazását is. Mindkét teszt során az újraolvasó csoport teljesítménye volt a leggyengébb, míg a többi négy csoport jól teljesített, a négy teszteléses csoport eredménye nem különbözött. Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy a teszteléses tanulás bármely formája hatásosabb az újraolvasásos tanulásnál. A hangsúly tehát a már tanulási szakaszban történő aktív előhíváson van – és nem függ a tesztelés módjától. Smith és Karpicke azt is kimutatta, hogy az előhívásos tanulás nem csak az anyag felidézését, hanem annak alkalmazását is hatékonyabbá teszi.

Az elmúlt évtizedben az előhívási (tesztelési) hatást a hagyományos újraolvasással és egyéb tanulási módszerekkel szemben több száz tanulmány vizsgálta (Rowland, 2014, Adesope, Trevisan & Sundararajan, 2017). Az ezzel kapcsolatos kísérletek legnagyobb részét laboratóriumban végezték (Butler; Karpicke; Roediger, 2007). Ezen kísérletek többsége azt vizsgálja, hogy egy adott szövegre melyik tanulási módszerrel emlékeznek legjobban a diákok. Sokan egyéb helyzetekben is elvégezték a kísérletet és a tesztelési (előhívási) hatást kimutatták

- szövegtanulási helyzetben szavaknál (Zaromb és Roediger, 2010),
- kulcsszavak segítségével való tanulásnál (Pyc és Rawson, 2010),
- tankönyvi szövegeknél (Roediger és Karpicke, 2006b, Butler, 2010),
- térképen való tájékozódásnál (Carpenter és Pashler, 2007),
- orvostan hallgatóknál az újraélesztés technikáinak tanulásánál és gyakorlásánál (Kromann, Jensen, Ringsted, 2009).

A tesztelési hatást már több korosztályban is vizsgálták (Dunlosky et al, 2013):

- óvodás és iskolaelőkészítő gyerekeknél (Fritz, Morris, Nolan, Singleton, 2007; Kratochwill 1977),
- általános iskola alsó tagozatán (Atkinson, Paulson, 1972; Bouwmeester, Verkoeijen, 2011; Fishman, Keller, Atkinson, 1968; Gates, 1917; Metcalfe & Kornell, 2007; Metcalfe, Kornell, & Finn, 2009; Myers, 1914; Rea & Modigliani, 1985; Rohrer, Taylor, & Sholar, 2010; Spitzer, 1939),

- általános iskola felső tagozatán (Carpenter et al., 2009; Fritz, Morris; Nolan, Singleton 2007; Glover, 1989; McDaniel, Agarwal, Huelser, McDermott, & Roediger, 2011; Metcalfe, Kornell, & Son, 2007; Sones & Stroud, 1940)
- gimnáziumban (Carpenter et al., 2009; Fritz, Morris, Nolan, Singleton 2007; Glover, 1989; McDaniel, Agarwal, Huelser, McDermott, & Roediger, 2011; Metcalfe, Kornell, & Son, 2007; Sones & Stroud, 1940; Duchastel, 1981; Duchastel & Nungester, 1982; Marsh et al., 2009; Nungester & Duchastel, 1982, Dirkx; Kester; Kirsner, 2014),
- egyetemisták körében (Kromann et al., 2009; Schmidmaier et al., 2011, Butler, 2010, Carpenter et al. 2015, Little, Storm and Bjork, 2011),
- középkorúak és annál idősebbek körében (Balota, Duchek, Sergent-Marshall, & Roediger, 2006; Bishara & Jacoby, 2008; Logan; Balota, 2008; Maddox, Balota, Coane, Duchek, 2011; Sumowski, Chiaravalloti, DeLuca, 2010; Tse, Balota, Roediger, 2010).

Természetesen vetődik fel a kérdés: függ-e a tesztelés hatása attól, hogy a tesztalanyok kaptak-e visszajelzést a tanulási szakaszban arról, hogy a válaszaik helyesek voltak-e. Kang, McDermott és Roediger (Kang, McDermott, Roediger, 2007) erre találtak ki egy kísérletet. A felidézési teljesítményt rövid kifejtős kérdésekkel, illetve feleletválasztós teszttel mérték a tanulás után három nappal, és megvizsgálták van-e különbség attól függően, hogy a tanulási fázisban a tesztelés kifejtős kérdésekkel vagy feleletválasztós tesztekkel történt. Kiderült, hogy amikor van visszajelzés, akkor, ha csekély mértékben is, de a rövid kifejtős kérdésekre válaszolás előnyösebb, ha nincs visszajelzés, akkor a feleletválasztós teszt hatékonyabb.

Szinte az összes előhívási hatást vizsgáló kísérletet laboratóriumban, laboratóriumi körülmények között vagy laboratóriumban szimulált iskolai helyzetben végezték. Nagyon kevés olyan cikk született, amely valódi iskolában, valódi tananyagon és hosszabb távon vizsgálja az előhívási hatást. (McDaniel, Roediger and McDermott, 2007, Rawson, K. A., Vaughn, K. E., Walsh, M., & Dunlosky, J. 2018).

A teszteléses tanulást még senki nem vizsgálta a matematika területén, ahol nem csak lexikális tudás visszaadására van szükség, hanem megértésre is. A matematikában szükség van a megértésre feladatmegoldásoknál, bizonyításoknál, sőt néha definíciók, fogalmak esetében is. Kísérletünkben a tesztelési hatást vizsgáltuk egy szakközépiskolában, matematika órán. A kísérlet sok szempontból különbözik a korábbi, témájában hasonló kísérletektől. Az eddigi tesztelési hatást vizsgáló kísérleteket főleg laboratóriumban végezték. A laboratóriumi

kutatások főként a tanulás során végbemenő agyi folyamatok megismerésére irányultak. Az agyi folyamatok részletes háttere még nem ismert, így nem nyilvánvaló, hogy a laboratóriumban vizsgált tanulási folyamatok a laboratóriumon kívül is ugyanúgy mennek-e végbe. Feltételezésünk az, hogy a teszteléses tanulás összefüggésben van a különböző tanulási és agyi folyamatokkal és nem laboratóriumi körülmények között is kimutatható a hatása. A kísérlet kitervezésénél és elemzésénél természetesen figyelembe kell venni a valós és a laboratóriumi körülmények közti különbségeket.

Egy másik különbség az eddigi kísérletekhez képest, hogy eddig, deduktív következtetéseket igénylő feladatokról nagyon kevés kísérlet szólt, és az idevágó az eredmények nem mutatnak egységes képet. Tran és társai (Tran, Rohrer, Pashler 2015). különböző eseménysorozatok leírását tartalmazó mondatokat tanultattak meg a kísérleti személyek „újraolvasós” és „tesztelős” csoportjával úgy, hogy a mondatok külön-külön, egymás után jelentek meg. A végső tesztben az egyes mondatok felidézésében kimutatható volt a tesztelési hatás, de amikor a mondatok alapján következtetéseket kellett levonni, nem volt különbség a két csoport teljesítménye közt. Ez alapján arra következtettek, hogy az olyan komplexitású feladatokban, ahol deduktív következtetésekre van szükség, a tesztelési hatás eltűnik. Eglington és Kang ugyanezt a kísérletet úgy hajtották végre, hogy egyben vetítették le a szöveget, nem pedig mondatonként. Így a következtetés levonását igénylő feladatokban érvényesült a tesztelési hatás. (Eglington és Kang 2016).

Ezen eredmények után többszörösen is kérdéses, hogy érvényesül-e az előhívási hatás matematika tanulásnál. Ugyanis a matematika területén folyton deduktív következtetéseket hajtunk végre. Az axiómák, az axiómarendszer a matematika alapja. Miután az axiómarendszer felépül, meghatározunk, definiálunk fogalmakat, amikkel dolgozni szeretnénk. A fogalommal kapcsolatosan kíváncsiak vagyunk bizonyos problémák megoldására, feloldására, így jön létre a problémafelvetésen-problémamegoldáson keresztül a tételek kimondása. A középiskolában nagyvonalakban ez úgy néz ki, hogy definíciók és alaptételek után a tanár által megadott állításokkal foglalkozunk. Több szinten foglalkozhatunk velük. Lehet olyan, hogy csak egy erős sejtésünk van az állítás helyeségéről, pl. mert lerajzoltuk az ábrát és látjuk, hogy igaz vagy hamis az állítás. (Pl.: téglalap szemközti oldalai egyenlő hosszúak.) Jobb esetben részben vagy teljesen be is bizonyíthatjuk az állítást. Minden esetben, amikor egy állításon gondolkodunk, akkor végiggondoljuk a tanult fogalmakat, az addig tanult állításokat és azok segítségével

hozunk döntést arról, vajon igaz-e az állítás vagy sem. A gyakorlatban a matematika óra nagyon sokszor feladatmegoldásból áll. A feladatmegoldás is éppen azt jelenti, hogy a tudásunk segítségével megoldunk egy addig nem látott feladatot. Ez alól talán kivételt képez, amikor nagyon speciális algoritmusokat nagyon begyakoroljuk és már rutinból alkalmazzuk. Ilyen pl. a hatványozás. Jelen esetben egészen biztos, hogy nem lesz szó nagy begyakorlásról, hiszen ezek a diákok csak matematika órákon foglalkoznak a matematikával, mint ahogy azt majd a későbbiekben részletesen leírjuk.

Egy matematika dolgozatban sosem szó szerint ugyanazt a feladatot kérdezzük, mint amit együtt megoldottunk. A matematika feladatok összetettségét sokféleképpen mérik, ezek alapján elmondható, hogy a következő megoldási utak mind a deduktív képességünket használják föl:

- ismerjük, hogy milyen módszert kell alkalmazni a megoldáshoz, de szükség van egy ötletre,
- sokféle módszer közül ki kell választani a nekünk megfelelőt,
- sokféle módszer közül kell választani és utána még szükség van egy ötletre,
- ötletek sorozatát kellene alkalmazni úgy, hogy előre nem látjuk át a feladat megoldását.

Az órák során, a tesztelés során és a dolgozat alatt is az előbb felsorolt megoldási utakon keresztül kellett eljutniuk a feladatok megoldásához.

2. Első kísérlet

Egy szakgimnázium (Teleki Blanka Közgazdasági Szakgimnázium) és egy elit gimnázium (Városmajori Gimnázium) 9-es diákjai vettek részt a kísérletben. A szakgimnáziumban a diákok a 9. évfolyamon a matematikát csoportbontásban tanulják. Az iskolában a matematika felvételi pontszám alapján sorolják csoportba a gyerekeket. A kísérleti csoport a szakgimnázium egyik kilencedikes osztályának az a csoportja volt, akik a középiskolai felvételi pontszámok alapján a leggyengébb teljesítményt nyújtották. A kísérleti csoport matematikai eredménye volt a leggyengébb, a többieké jobb volt. Az egyik kontroll csoport a 9.a osztálynak az a csoportja volt, amelynek a matematikai teljesítménye egész évben hasonlított a kísérleti csoportéhoz. Egy másik csoport, akiknek az eredményét összevetettük a kísérleti csoport eredményével a kísérleti csoport tanárnőjének korábbi kilencedikes csoportjai voltak. Összesen 36 diák. Ők is ugyanazt a témát tanulták, mint a kísérleti csoport, csak egy évvel korábban. A másik kontroll csoportot az elit gimnázium két osztálynyi 9-es diákjai alkották – a 9.c osztály 16, míg a 9.e osztály 18 fővel.

A Teleki Blanka Szakgimnázium és a Városmajori Gimnázium diákjainak szociális háttere nagyon eltérő. A Városmajori Gimnázium egy rangos iskola, Budapest XII. kerületében, az elmúlt években a középiskolák rangsorában általában a 6. helyen szerepelt. Ezzel szemben a Teleki Blanka Szakgimnázium a 2016-os kompetenciamérés alapján hátrányos helyzetűnek mondható. Ezen tények mellett alaposabban is megvizsgáltuk a kísérleti alanyok szociális hátterét. Mind a kísérleti csoport, mind a városmajori csoportok tanárnői beszámoltak részletesen a diákjaik szociális hátteréről. Erről a függelékben olvashatunk.

Mindkét iskolában mindegyik csoport a kerettantervnek megfelelő geometria tananyagot tanulta. A két iskolatípus kerettantervét összehasonlítva a geometria témakörnek a kísérletben szereplő egysége mind a gimnáziumokban, mind a szakgimnáziumokban teljes egyezést mutat. A kerettanterv ehhez az anyagrészhez sorolja a következőket: körív hossza, egyenes arányosság a középponti szög és a hozzá tartozó körív hossza között, körcikk területe, egyenes arányosság a középponti szög és a hozzá tartozó körcikk területe között, a szög ívmértéke, tengelyes és középpontos tükrözés, az eltolás, a pont körüli elforgatás, a transzformációk tulajdonságai, geometriai vektorfogalom, szimmetrikus négyszögek, szabályos sokszögek, vektorok összege, két vektor különbsége, vektor szorzása valós számmal, vektorok felbontása összetevőkre. (kerettanterv). A megtanítandó ismeretek alapja tehát ugyanaz volt, a diákoknak ugyanazokkal az alapfogalmakkal kell tisztában lenniük. A szakgimnáziumban négy hétig tartott a kísérlet, ami

alatt a diákoknak 11 matematika órájuk volt (heti 3 matematika órával). Az elit gimnáziumban hat hétig tartott a kísérlet, összesen 24 órában (heti 4 matematika órával). Az órák menete a szokásos házi feladat ellenőrzés, új anyag, feladat gyakorlás volt minden csoportnál. A tananyag végén minden csoport megírta ugyanazt a témazáró dolgozatot. A városmajori kontrollcsoport alaposabban vette át az egyes témaköröket. Ők főleg több számolásos példát vettek az órákon.

A kísérleti csoport előhívásos tanulással tanult az egész kísérlet alatt, míg a kontrollcsoport a szokásos módon tanult. Az előhívásos tanulás kivitelezése abból állt, hogy a kísérleti csoport minden matematika óra végén egy rövid dolgozatot írt 5 percen az órán tanult anyagból. Ezt az óra végi dolgozatot emlékeztetőnek szántuk, mindegyikük két feladatból állt, egy elméletből és egy feladatmegoldásból. Ezekre a rövid tesztekre nem kaptak külön-külön jegyeket a diákok. A dolgozatokra 2, 1 vagy 0 pontot lehetett kapni, a válasz helyessége és precízége függvényében. A diákok kijavítva visszakapták a dolgozatot. A kísérlet végén a pontokat összegezve kaptak a diákok egy jegyet a tesztekre. A geometria téma végén témazárót írt minden csoport, amelyben egy elméleti feladatsor és négy feladatmegoldás szerepelt a tanult témából – a témazáró dolgozat a függelékben megtalálható. A módszer hatásosságát háromféle mérce alapján vizsgáltuk. A kísérlet végén a kísérleti csoport eredményeit összevetettük a másik három csoport eredményeivel. A kísérlet ideje alatt is folyamatosan konzultáltunk a tanárnőkkel, felügyeltük a kísérlet menetét. A függelékben csatolunk pár levélváltást, amiből kiérződik, hogyan zajlott a munkafolyamat.

A függelékben láthatjuk a közös témazáró dolgozatot, amit a kísérleti csoportot tanító tanárnővel és a Városmajori Gimnáziumbeli kontrollcsoport tanárnőjével állítottunk össze a kísérlet megkezdésekor. A dolgozat a gimnáziumok tudásanyagát kérte számon. Az alábbiakban részletezzük a feladatok típusát és a kísérleti csoport teljesítményét.

Az első feladatban a diákok elméleti tudását teszteltük. Ebben a feladatban nem volt elég a megértés szintjéig elsajátított tananyag. Azaz nem csak tudni, hanem alkalmazni is kellett a tanultakat. A válaszokból érződött, hogy nem sokszor kértek tőlük ilyen típusú feladatot. Általános iskolában az igaz/hamis feladatoknál nem várták el az indoklást. A 9. évfolyamos kerettantervek pedig külön kitérnek arra, hogy ezt a képességet fejlesszük. A „bizonyítás igénye”, a „matematikai úton való indoklás” és a „matematikai szakkifejezések használata” kulcskifejezések külön sorokat kapnak a tantervben. Az első feladatot 70%-os teljesítménnyel oldották meg a kísérleti csoport diákjai.

A második és harmadik feladatokon is érződik az, hogy a kísérlet miatt nehezebb feladatokat is tettünk a dolgozatba. Ezeket a feladatokat 81%-ra teljesítették.

A negyedik feladatban a vektorokat koordináta rendszerbe tettük és itt sem az alaptudásra voltunk kíváncsiak. A feladat megoldásához nem csupán a koordináta-rendszer és a vektorok kapcsolatát kellett érteni, hanem tudni kellett a helyvektor definícióját és két vektor egyenlőségét is. A második feladatot 69%-ra teljesítették a kísérleti csoport diákjai. Minden diák el tudott indulni, mindenki több, mint 0 pontot szerzett ebben a feladatban. Egy diák jól lerajzolta, de a válaszádnál a koordináta-rendszerről rosszul olvasta le a vektor kezdőpontjának második koordinátáját. Három diák volt, aki teljesen hibátlanul megoldotta a feladatot, de a végén elfelejtette leolvasni a kezdőpont koordinátáit (figyelmetlenségből származó hibák).

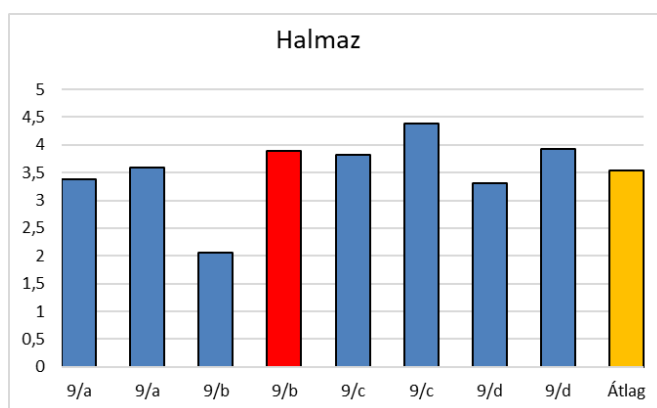
Az ötödik feladatban lettek a legeredményesebbek a kísérleti csoport diákjai. Sokan kezdték a dolgozat írását ezzel a kérdéssel és 96%-ra teljesítették a feladatot. Érdekes, hogy bizonyos szempontból a negyedik feladat könnyebbnek mondható, mert ott konkrét adatok voltak megadva, amikkel számolni kellett. Az ötödik feladat már a vektorok általános használatát igényli.

A hatodik és hetedik feladat háttérére általában már nem szokott idő maradni a 9. évfolyamban, ezért ezeket 10-ben szokta tanítani a kísérleti csoport tanárnője. Most viszont a kísérlet feszessége miatt ez is belefért. Ezek a feladatok is összetett tudást igényeltek. A hatodik feladatban tudni kellett, hogy mi a körszelet, alkalmazni kellett a Pitagorasz-tételt, tisztában kellett lenni a kerület és terület fogalmával, kiszámítási módjukkal. Ez az egyik legrosszabbul sikerült feladat, ám ezt is 63%-ra teljesítette az osztály. Az utolsó feladat már olyan szinten összetett, hogy ezt már a 10. évfolyamosoknak sem merné kiadni a kísérleti csoport tanárnője. Középponti szöget kellett fokba váltani, illetve egy ehhez a középponti szöghöz tartozó körívek kerülete és területe is kérdés volt. Órán felírták az $\frac{i}{2r\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ képletet, azonban a dolgozat írásakor a diákok nem közvetlenül az $i = \frac{r\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$ képletet használták, hanem kiszámolták először, hogy a $\frac{7\pi}{12}$ (rad) szög az 105° -nak felel meg, majd megnézték, hogy ez hányszor van meg az egész 360° -ban. Ezek után arányossággal számolták ki a körívek kerületét, területét. Volt, aki már az átváltásnál elakadt, így hagyta is az egész feladatot. Két diák neki sem állt a feladatnak. Két diáknál viszont egy ponton múlt a maximum pontszám elérése. Mindketten azt rontották el, hogy a körívek területénél a körív hosszához elfelejtették hozzáadni a sugár kétszeresét. Ez csakis a figyelmetlenségüknek tulajdonítható be, hiszen az előző feladatból

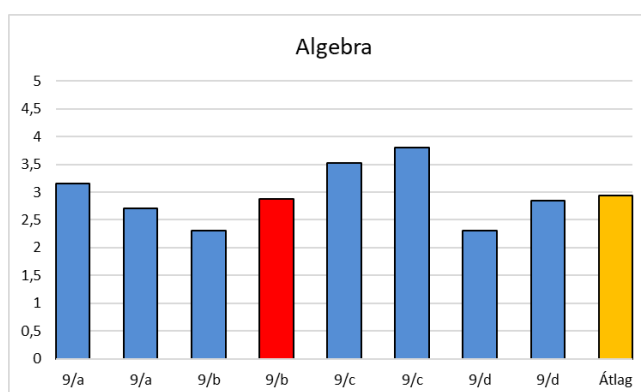
kiderül, hogy tudják a kerület fogalmát, az ábrájuk pedig azt mutatja, hogy a körcikk definíciójával is tisztában vannak. Ez a feladattípus sikerült a legrosszabbul. 62%-ra teljesítették a kísérleti csoport diákjai.

3. Eredmények

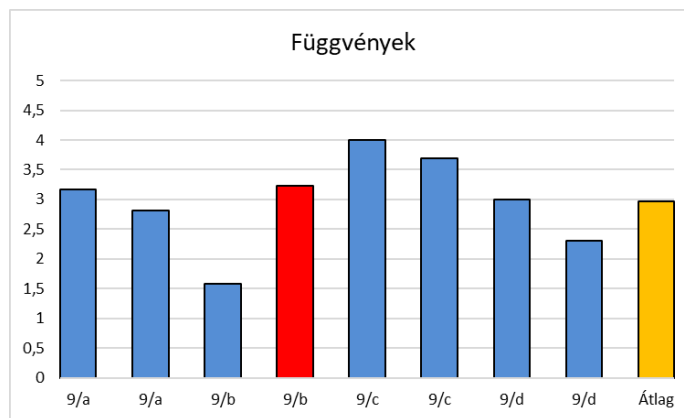
A kísérlet egyik első lépéseként ellenőriztük, hogy a teszteléses módszerrel tanított gyerekek eltérő tudással, eltérő matematikai képességekkel rendelkeznek-e a többi csoporthoz képest. Ehhez összegyűjtöttük a szakgimnázium 9. évfolyam mind a 8 csoportjának eredményeit azokból a témakörökből, amit abban az évben minden csoportban tanultak. Ezek a témakörök a halmazok, algebra, egyenletek és a függvények. A csoportok átlagos eredményeit az egyes témakörökből az 1., 2., 3. és 4. ábrák mutatják. (A diagramok az egyes csoportok dolgozatainak átlagát mutatják az adott témakörön belül.) A kísérleti csoport a 9/b2 – piros oszlopok. Az utolsó oszlop a nyolc csoport átlagát mutatja – narancssárga oszlopok.



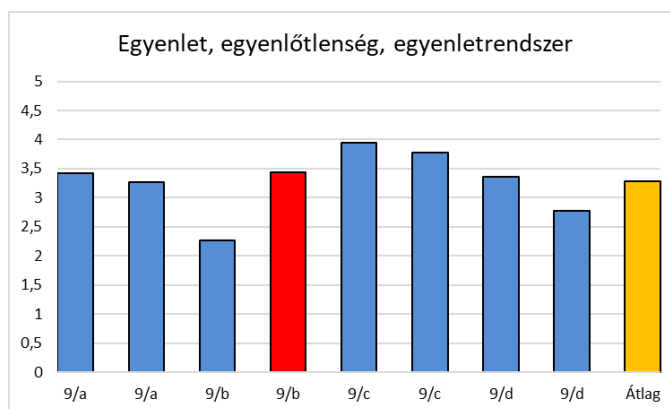
1. ábra



2. ábra



3. ábra

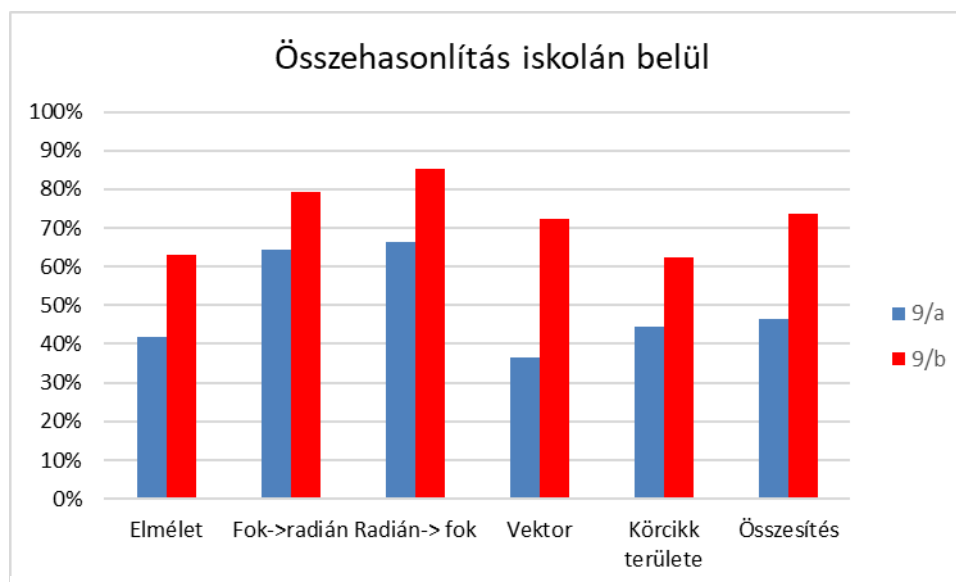


4. ábra

Mind a négy diagramról leolvashatjuk, hogy a kísérleti csoport matematika dolgozatokon mutatott teljesítménye mindig az évfolyam átlagos eredménye körül ingadozott a kísérlet évében. Az ingadozás mértéke mindig kisebb volt fél jegynél.

Az 1.-4. ábrák diagramjaiból az is látszik, hogy a 9/a két csoportjának az átlagos teljesítménye közel van a vizsgált csoport teljesítményéhez. Így megvizsgáltuk, hogy a 9.a osztály hogyan teljesít abból a témakörből, melyet a kísérleti csoport előhívással tanult. A 9.a-s csoportok tanárnője a geometriai transzformációk megtanítására öt hetet szánt. Mivel a kísérleti csoport az elit gimnázium tananyagát tanulta és a végén ugyanazt a témazárót írta meg, mint a városmajori kontrollcsoportok, ezért a kísérleti csoport lényegesen nehezebb dolgot írt, mint ami egy átlagos szakgimnáziumi osztálynak feladható. A folyamatos konzultációknak

köszönhetően a szaktanár a kísérleti csoport témazáró dolgozatához nagyon hasonló dolgozatot íratott, így az összehasonlítást öt témakör alapján el lehetett végezni. Az „a” osztály dolgozata a függelékben megtalálható. A két dolgozatban előkerülő témakörök eredményeinek összehasonlítását az 5. ábra mutatja:



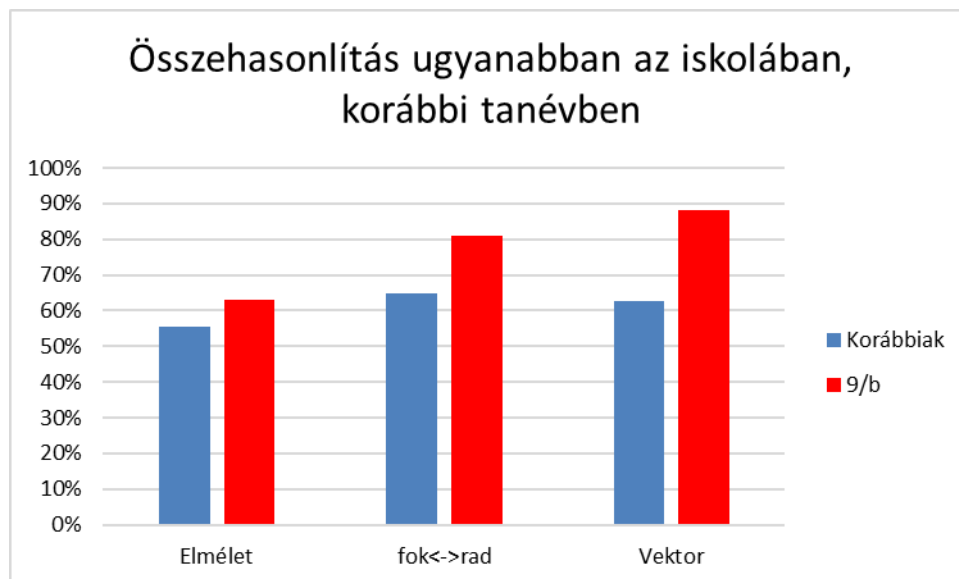
5. ábra

A csoportok eredményeit százalékban adtuk meg, melyet a függőleges tengelyről olvashatjuk le. A vízszintes tengelyre az adott feladathoz tartozó kulcsfogalmat írtuk. A dolgozatok feladatait megvizsgálva észrevehetjük, hogy a teszteléses módszert kipróbáló csoport mélyebb tudásra kérdező típusfeladatokat oldott meg. A tőlük kérdezett körcikk feladatnál nem nevezetes hányada volt a 360° -os körnek a körcikk, továbbá a vektoros feladatnál nem rajzoltuk be nekik a koordináta-rendszert. Emiatt volt, aki a teszteléses csoportban is pontot veszített.

Annak ellenére, hogy nehezebb dolgozatot írtak, mind elméleti, mind gyakorlati feladattípusokon belül lényegesen jobban teljesített a kísérleti csoport.

Azt is megvizsgáltuk, hogy a korábbi években a kísérleti csoport tanárnője által íratott dolgozatokhoz képest milyen teljesítményt mutat a teszteléses csoport. A kísérlet előtt egy évvel a tanárnő által összeállított dolgozat megtalálható a függelékben. Ez a geometria dolgozatot sokkal felszínesebb tudással is jól megírható volt. Az elmélet nem igényelt indoklásokat, a vektorokkal való műveleteknél egyszerű szerkesztést várt csak el és a szögek átváltásakor csak egész fokokat, $1\pi(rad)$ egész számú többszöröseit, illetve nevezetes

hányadait kérdezte. Ezek alapján a dolgozatokat három fogalom-, illetve feladatkör alapján lehetett összehasonlítani. elmélet, szögek mértékének átváltása, illetve vektorok és vektorokkal való műveletek. Az eredményeket a 6. ábra mutatja:



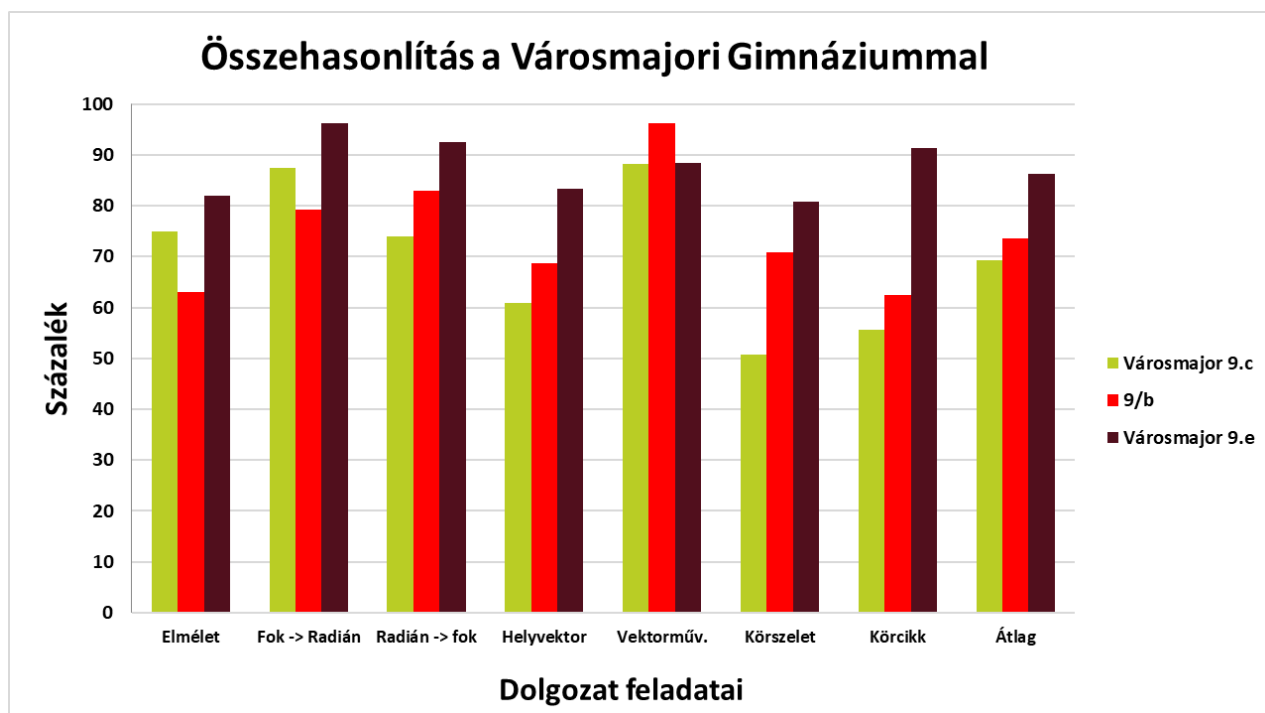
6. ábra

A kísérleti csoport több mint fél jeggyel jobban a szerepelt a korábbi évhez képest. Mert míg a korábbi csoport átlagos eredménye 63% volt, addig a kísérleti csoport átlagos eredménye 75% lett.

Végül összehasonlítottuk a Városmajori Gimnázium kilencedikes évfolyamának eredményeit a szakgimnáziumi kísérleti csoport eredményeivel. A gimnázium tanulói hagyományos módon tanultak és a témakör végén ugyanazt a dolgozatot írták, mint a kísérleti csoport tanulói. A 7. ábrán foglaltuk össze az eredményeket.

A vízszintes tengely az általunk összeállított, az előbbieken részletezett témazáró dolgozat feladatainak kulcsfogalmait mutatja, míg a függőleges tengely ezeknek a feladatok megoldottságát ábrázolja százalékban megadva. A kísérleti csoport eredményeit jelöltük most is piros oszlopokkal. Az első hét oszlopocsoport jelöli az egyes feladatokat, míg az utolsó a teljes dolgozat átlagos eredményét. Látható, hogy a szakgimnázium diákjainak eredményei minden területen összemérhető a gimnáziumi eredményekkel. Az 5. feladatnál (vektorműveletek) 96,25%-os teljesítményt értek el a szakgimnáziumi tanulók, ami felülmúlja mind a két

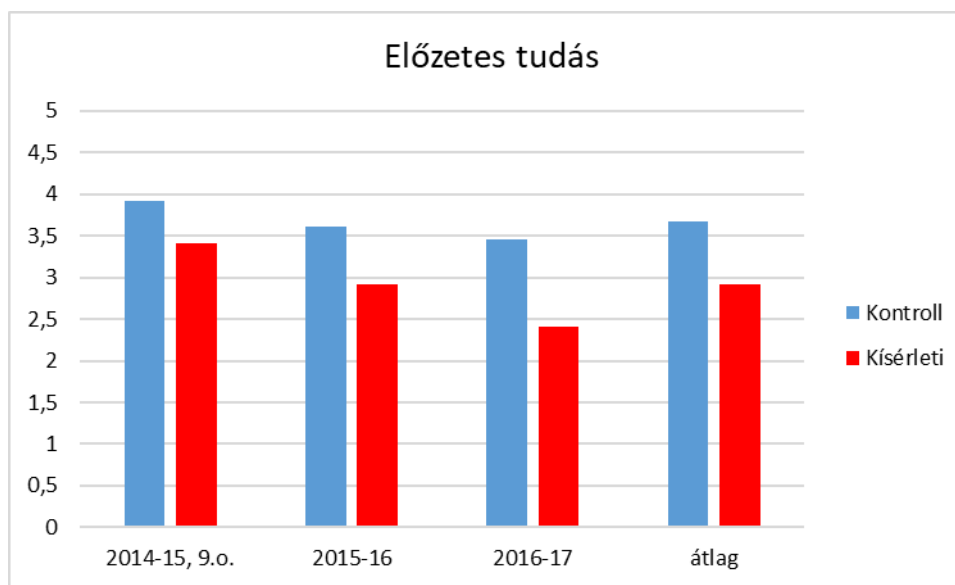
gimnáziumi csoport eredményét. Az utolsó oszlop megmutatja, hogy összesítve a két gimnáziumi csoport teljesítménye között szerepelnek a teszteléssel tanuló diákok.



7. ábra

4. Második kísérlet

Az előző kísérletünk meggyőző volt, mert a kísérleti csoportunk várakozáson felül teljesített többféle tanulói csoporthoz képest. Az előhívási hatás tisztán kimutathatósága miatt kiterveztünk egy újabb kísérletet, melyben fő célunk az volt, hogy minimalizáljuk az előhívási hatás mellett fellépő hatásokat. Ilyen lehetséges hatások a tanári hatás vagy az iskola hatása vagy az évfolyam hatása. Ezért a második kísérletünkben olyan két csoportot vizsgáltunk, akik ugyanolyan matematikai háttérrel rendelkeznek, eddigi ismereteik megegyeznek matematikából, és ugyanaz a tanárnő tanítja őket. A két csoport ugyanannak a 12. osztálynak a németes és angolos csoportja voltak, úgy hogy kilencediktől mindig ugyanaz a matematikatanár tanította őket, ugyanarra a tananyagra, ugyanannyi órában. Az iskola továbbra is a Teleki Blanka Szakgimnázium volt. A tanárnő pedig az előző kísérletben a kísérleti csoport tanárnője. A kísérlet 2017. szeptember-októberében zajlott, az évi második témakör, a térgeometria témakörében. A csoportbontás az iskolában 9-ben a matematikai tudás alapján történik, és utána osztják be a csoportokat eszerint a nyelvi csoportokba is. A kísérleti csoport kiválasztása előtt megvizsgáltuk a két csoport előzetes matematikai teljesítményét. A 8. számú ábra mutatja a két csoport 9., 10., és a 11. év végi jegyeinek átlagát, az utolsó oszlop a 3 éves átlaga a két csoportnak.

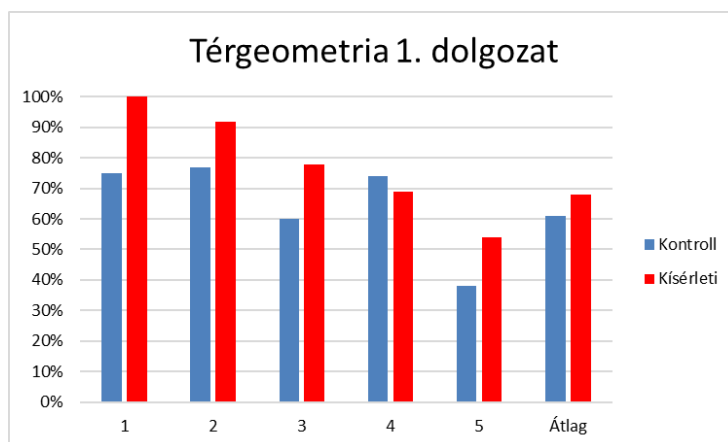


8. ábra

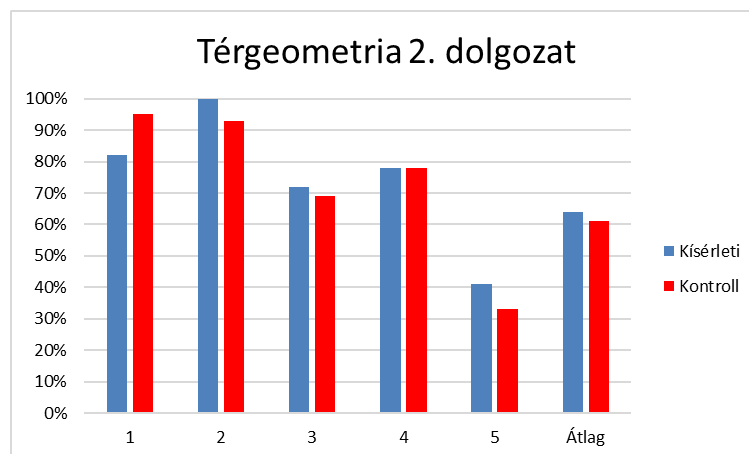
Látható, hogy az angolos csoport (piros oszlopok) gyengébben teljesített a kísérlet előtti években, ez a különbség a T-próba alapján szignifikáns. Ezek alapján az angolos csoportot

választottuk kísérleti csoportnak, és a németes erősebb csoportot kontrollcsoportnak. A csoportokban rendre 12 és 13 diák volt.

A kísérlet módja teljesen hasonló az első kísérletünkhöz, azaz a kísérleti csoportot minden óra végén tesztelték az óra anyagából, míg a kontrollcsoport tanulói hagyományos módon tanultak. A térgeometria témakörét a két csoport hat hétig tanulta, ezalatt két dolgozatot írtak. A 9. és a 10. ábrák azt mutatják, hogy az egyes csoportok milyen átlagos eredményt értek el a különböző feladatokból:



10. ábra



9. ábra

A diagramokból leolvasható, hogy a kísérlet végére a kísérleti és a kontrollcsoport teljesítménye megkülönböztethetetlen lett. Ebben a kísérletben a két csoport között csak az volt a különbség, hogy a kísérleti csoportunk előhívással tanult. Megállapítható tehát, hogy a teszteléses tanulás hatékonyabb a hagyományos munkaformáknál.

5. Összefoglalás

A dolgozatban azt vizsgáltuk, hogy működik a tesztelési hatás nem laboratóriumi körülmények között matematikából. A kísérlet több szempontból is újszerű, mivel az eddigi kísérletek a tesztelési hatás vizsgálatára főleg laboratóriumi környezetben zajlottak, illetve a memorizálandó részek elsajátítását vizsgálták, főleg szavak tanulásánál. Ezt a kísérletet középiskolában, középiskolás diákokkal, matematika órákon végeztük. A kísérletünk résztvevői egy hátrányos helyzetűnek mondható szakközépiskola 9. osztálya volt. Kontrollcsoportnak egyrészt a kísérleti csoport szakgimnáziumából választottunk csoportokat, másrészt két párhuzamos évfolyamon, ugyanezt az anyagot tanuló elit gimnáziumi osztályt választottunk. Mindegyik csoport ugyanazt az anyagrészt sajátította el, a témazárók hasonlóak voltak. A szakgimnáziumi kísérleti csoport és a gimnáziumi csoportok témazárója teljesen megegyezett. A témazárók eredményeit összevetettük a kísérleti csoport iskolájában tanuló többi osztály eredményeivel. Megállapítottuk, hogy a teszteléses évfolyam kiemelkedően szerepelt a saját iskolájában és fölzárkózott az elit iskola osztályaihoz. Ugyanis a kísérleti csoport eredménye nem különbözik az elit gimnáziumi csoportok teljesítményétől, és a kontroll szakközepes csoport szignifikánsan gyengébben teljesített, mint a kísérleti- és a gimnazista kontroll csoport. A különbségek feladatonként is kimutathatók.

Második kísérletünket szintén a Teleki Blanka Szakgimnáziumban végeztük. A kísérlet célja az volt, hogy az előhívási hatást önmagában tudjuk vizsgálni. Ezért a második kísérletünkben olyan két 12-es csoportot vizsgáltunk, akik ugyanolyan matematikai háttérrel rendelkeznek, eddigi ismereteik megegyeznek matematikából, és ugyanaz a tanárnő tanítja őket. A korábban szignifikánsan gyengébben szereplő csoport lett a kísérleti csoport, a jobb matematikai teljesítményű csoport lett a kontrollcsoport. A csoportok a térgeometria témakörét tanulták hat héten keresztül. A kontrollcsoport hagyományos módon, a kísérleti csoport meg végig előhívással tanult. A kísérlet végére a két csoport eredménye megkülönböztethetetlen lett térgeometriából.

A fent leírt eredmények alátámasztják a tesztelési hatás eredményességét. Elmondhatjuk, hogy a teszteléses tanulás segít a diákoknak a gyakorlati feladatok könnyebb megértésében, a logikus gondolkodásban és a rendszerezettségben is.

5. 1. A szerzők részvétele a kutatásban

A kutatást teljes egészében mi találtuk ki és mi terveztük ki. A tanárok személyei automatikusan adódtak, mert ők is tagjai a kutatócsoportnak. A tananyagot és a dolgozatokat együtt állítottuk össze. Az eredményeket mi elemeztük és értékeltük ki.

Dolgozatunk témájáról több előadást tartottunk itthon és külföldön egyetemeken, konferenciákon és középiskolás tanároknak. Előadásaink után számos visszajelzést kaptunk. A visszajelzések alapján tudjuk, hogy módszerünket bevezették matematikából a BME két karán, a BGE KVIK két szakján, az ELTE TTK Geofizikai és Űrkutatási Tanszék egyik nagyelőadásán és több középiskolai tanár is él az eszközzel. Ezen eredményeink alapján egy 540 főt érintő kísérletet dolgoztunk ki a SZTE IK Diszkrét Matematika kurzusára.

Az elmúlt évben a témában az alábbi előadásokat tartottuk:

- 2018. január: Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Hajdúszoboszló (január 26-28.)
- 2018. április 17. : Előhívásos tanulási kísérletek középiskolában és egyetemen – Módszertani Mesék c. tudományos diákkör, ELTE
- 2018. május 31. ~~Ismerlés~~ Tesztelés a tudás anyja, avagy Hogyan tanítsuk meg a diákot, akár akarja, akár nem – ELTE Geofizikai és Űrkutatási Tanszék szemináriuma
- 2018. június 2. Teszteléses tanulás hatékonyságának vizsgálata matematikatanár szakos hallgatók körében. Magyar Pszichológiai Társaság XXVII: Országos Tudományos Nagygyűlése
- 2018. július: Testing is themother of knowledge– Umea, Svédország, PME 42 konferencia (július 3-8.)
- 2018. szeptember 26. Tesztelés a tudás anyja? –meghívott előadóként a PAB III. Matematikai és Informatikai Tudományok Szakbizottsága és a PTE TTK Matematikai és Informatikai Intézete tudományos ülésén
- 2018. október 10.– Előhívva tisztul a kép –SZTE TTIK Algebra Tanszék szemináriuma
- 2018. november 8.– beszámoló a PME 42-ről a Módszertani Meséken
- 2018. december 17. Az előhívási hatás eredményessége a deduktív következtetést igénylő feladatok esetén, ELTE TTK Módszertani Kari TDK
- 2019. január 24. BGE –KVIK

6. Irodalomjegyzék

- Butler, A. C., Karpicke, J. D., Roediger, H. L. 2007. The effect of type and timing of feedback on learning from multiple-choice tests. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 13, 273–281.
- Butler, A. C. 2010. *Repeated testing produces superior transfer of learning relative to repeated studying*. *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory and Cognition*, 1118-1133.
- Carpenter, S., Pashler, H., Rohrer, D., Cepeda N. ,J. 2007. *Enhancing learning and retarding forgetting: Choices and consequences*. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14 (2), 187-193
- Carpenter, S. 2009. *Cue Strength as a Moderator of the Testing Effect: The Benefits of Elaborative Retrieval*. *Journal of Experimental Psychology*, 1563-1569.
- Gates, A. I. 1917. *Recitation as a factor in memorizing*. New York: The Science press.
- Glover, J. 1989. *The "Testing" Phenomenon: Not Gone But Nearly Forgotten*. *Journal of Educational Psychology*, 392-399.
- Kang, S., McDermott, K., Roediger, H. 2007. *Test format and corrective feedback modify the effect of testing on long-term retention*. *European Journal of Cognitive Psychology*, 528-558.
- Rawson, K. A., Pyc, M. 2010. *Why Testing Improves Memory: Mediator Effectiveness Hypothesis*. *Science* Vol. 330, Issue 6002, pp. 335. DOI: 10.1126/science.1191465
- Rawson, K. A., Vaughn, K. E., Walsh, M., Dunlosky, J. 2018. *Investigating and explaining the effects of successive relearning on long-term retention*. *Journal of Experimental Psychology: Applied*
- Roediger, H. L., Karpicke, J. D. 2006. *Test-Enhanced Learning, Taking Memory Tests Improves Long-Term Retention*. *Psychological Science*, 249-255.
- Roediger, H., Wheeler, M. 1992. *Disparate effects of repeated testing: Reconciling Ballard's (1913) and Bartlett's (1932) results*. *Psychological Science*, 240-245.
- Smith, M. A., & Karpicke, J. D. 2014. *Retrieval practice with short-answer, multiple-choice, and hybrid tests*. *Journal of Applied Research in Memory & Cognition*, 784-802.
- Spitzer, H. 1939. *Studies in retention*. *The Journal of Educational Psychology*, 641-656.
- Tran, R., Rohrer, D., & Pashler, H. 2015. *Retrieval practice: The lack of transfer to deductive inferences*. *Psychonomic Bulletin & Review*, 22, 135–140.
- Fritz, C. O., Morris, P. E., Nolan, D., Singleton, J. 2007. *Expanding retrieval practice: an effective aid to preschool children's learning*. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 60 (7), 991 – 1004.

- Kratochwill, Thomas 1977. *The Effects of Overlearning on Preschool Children's Retention of Sight Vocabulary Words*. Reading Improvement, 14, 4, 223-8.
- Charles B Kromann, Morten L Jensen, Charlotte Ringsted 2009. *The effect of testing on skills learning*. Medical Education, 43: 21–27. doi:10.1111/j.1365-2923.2008.03245.x
- John Dunlosky, Katherine A. Rawson, Elizabeth J. Marsh, Mitchell J. Nathan, and Daniel T. Willingham 2013. *Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques: Promising Directions From Cognitive and Educational Psychology*. Association for Psychological Science, 14(1) 4–58
- Atkinson, R. C., Paulson, J. A. 1972. *An approach to the psychology of instruction*. Psychological Bulletin, 78(1), 49-61.
- Bouwmeester, S., Verkoeijen, P. 2011. *Why do some children benefit more from testing than others? Gist trace processing to explain the testing effect*. Journal of Memory and Language 65(1):32-41
- Fishman, E. J., Keller, L., Atkinson, R. C. 1968. *Massed versus distributed practice in computerized spelling drills*. Journal of Educational Psychology, 59(4), 290-296.
- Metcalf, J., Kornell, N. 2007. *Principles of Cognitive Science in Education: The Effects of Generation, Errors, and Feedback*. Psychonomic Bulletin and Review, 14, 225-229.
- Metcalf, J., Kornell, N. 2009. *Delayed versus immediate feedback in children's and adults' vocabulary learning*. Memory & Cognition, 37 (8), 1077-1087.
- Agarwal, P. K., D'Antonio, L., Henry L. Roediger, H. L., McDermott, K. B. & McDaniel, M. A. 2014. *Classroom-based programs of retrieval practice reduce middle school and high school students' test anxiety*. Journal of Applied Research in Memory and Cognition 3, 131–139.
- Sones and Stroud, 1940. *Review, with special reference to temporal position*. Journal of Educational Psychology, 31, pp. 665-676.
- Duchastel, P., Nungester, R. 1981. *Long-term Retention of Prose Following Testing*. Psychological Reports: Volume 49, Issue 2, pg 470.
- Duchastel, P., Nungester, R. 1982. *Testing Versus Review: Effects on Retention*. Journal of Educational Psychology, Vol. 74, No. 1, 18-22.
- Dirkx, K., Kester, L., Kirschner, P., 2014. *The Testing Effect for Learning Principles and Procedures from Texts*. The Journal of Educational Research, 00:1–8.

- Schmidmaier, R, Ebersbach, R, Schiller, M, Hege, I, Holzer, M, Fischer, MR, 2011. *Using electronic flashcards to promote learning in medical students: retesting versus restudying*. Medical Education, 45(11):1101-10.
- Little J. L., Storm, B.C., Bjork E.L. 2011. *The costs and benefits of testing text materials*. Memory, 19(4): 346-59.
- Bishara, A. J., Jacoby, L. L. 2008. *Aging, spaced retrieval, and inflexible memory performance*. Psychonomic Bulletin & Review, 15(1), 52-57.
- Logan, JM¹, Balota, DA, 2008. *Expanded vs. equal interval spaced retrieval practice: exploring different schedules of spacing and retention interval in younger and older adults*. Neuropsychology and Cognition, 15: 257–280.
- Maddox, G., Balota, D., Coane, J. Duchek, J., 2011. *The Role of Forgetting Rate in Producing a Benefit of Expanded Over Equal Spaced Retrieval in Young and Older Adults*. Psychology and Aging 26(3):661-70.
- Sumowski, JF¹, Chiaravalloti, N, Deluca, J., 2010. *Retrieval practice improves memory in multiple sclerosis: clinical application of the testing effect*. Neuropsychology. 24(2):267-272.
- Tse CS, Balota DA, Roediger HL, 2010. *The benefits and costs of repeated testing on the learning of face-name pairs in healthy older adults*. Psychol Aging.;25(4):833-45.

7. Függelék

„A” A témazáró dolgozat

Egybevágósági transzformációk témazáró – 9. osztály	Név: _____
Elért pontszám: /50 pont	Érdemjegy: _____
1. Az alábbi állításokról dönts el, hogy igaz, vagy hamis! Válaszodat indokold! a) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus. _____ Indoklás: _____ b) A szabályos sokszög bármely szimmetriatengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát. _____ Indoklás: _____ c) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor középpontosan szimmetrikus. _____ Indoklás: _____ d) Nincs olyan trapéz, amely középpontosan szimmetrikus. _____ Indoklás: _____ e) Van olyan konkáv négyszög, amely forgásszimmetrikus. _____ Indoklás: _____ f) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor minden szöge egyenlő. _____ Indoklás: _____ /12 pont	
2. Add meg a következő, fokokban megadott szögek mértékét radiánban! a) $60^\circ =$ b) $210^\circ =$ c) $22^\circ 30' =$ /3 pont	
3. Add meg a következő radiánban megadott szögek mértékét fokban! a) $2 =$ b) $\frac{2\pi}{9} =$ c) $-\frac{\pi}{6} =$ /3 pont	
4. A derékszögű koordináta-rendszerben $\vec{a}$ az A (-2; 5) pont helyvektora. Add meg azon $\vec{a}$-ral egyenlő vektor kezdőpontjának koordinátáit, amelynek végpontja (-3;3)! /4 pont	

5. Az ABCDEF szabályos hatszögben $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. A hatszög középpontja O. Írd fel az alábbi vektorokat az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével: $\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{FB}$

/10 pont

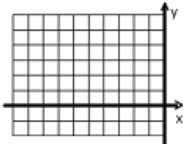
6. Határozd meg a 15 cm sugarú kör 90° -os középponti szögéhez tartozó körszelet kerületét és területét!

/9 pont

7. Számítsd ki egy 8 cm sugarú kör $\frac{7\pi}{12}$ (rad) nagyságú középponti szögéhez tartozó körcikk kerületét és területét! Add meg fokban a középponti szögét!

/9 pont

„B” Összehasonlítás iskolán belül – a 9.a osztály témazáró dolgozata

Egybevágósági transzformációk témazáró – 9. osztály Elért pontszám: /29 pont	Név: _____ Érdemjegy: _____
1. Az alábbi állításokról dönts el, hogy igaz, vagy hamis! Válaszodat indokold! a) Ha egy háromszögnek nincs két egyenlő oldala, akkor is lehet tengelyesen szimmetrikus. _____ Indoklás: _____ b) A szabályos nyolcszög bármely szimmetriatengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát. Indoklás: _____ c) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor középpontosan szimmetrikus. _____ Indoklás: _____ d) Nincs olyan trapéz, amely középpontosan szimmetrikus. _____ Indoklás: _____ e) Van olyan konkáv négyszög, amely forgásszimmetrikus. _____ Indoklás: _____ /10 pont	
2. Add meg a következő, fokokban megadott szögek mértékét radiánban! a) $60^\circ =$ b) $210^\circ =$ c) $22^\circ 30' =$ /3 pont	
3. Add meg a következő radiánban megadott szögek mértékét fokban! a) $2 =$ b) $\frac{2\pi}{9} =$ c) $\frac{\pi}{6} =$ /3 pont	
4. A derékszögű koordináta-rendszerben ?? az A (-2; 5) pont helyvektora. Add meg azon ??-ral egyenlő vektor kezdőpontjának koordinátáit, amelynek végpontja (-3;3)!  /4 pont	
5. Számítsd ki egy 8 cm sugarú kör $\frac{\pi}{4}$ (rad) nagyságú középponti szögéhez tartozó körívk területét és területét! Add meg fokban a középponti szögét! /9 pont	

„C” Összehasonlítás ugyanabban az iskolában, korábbi tanévben

Témazáró dolgozat – Geometria transzformációk név:

1. Szerkeszd meg az alábbi alakzat t tengelyre vonatkozó tükörképét!

5 p/

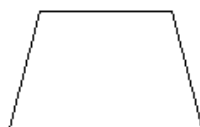


2. Írd le a háromszögek egybevágóságának 4 alapesetét!

4 p/

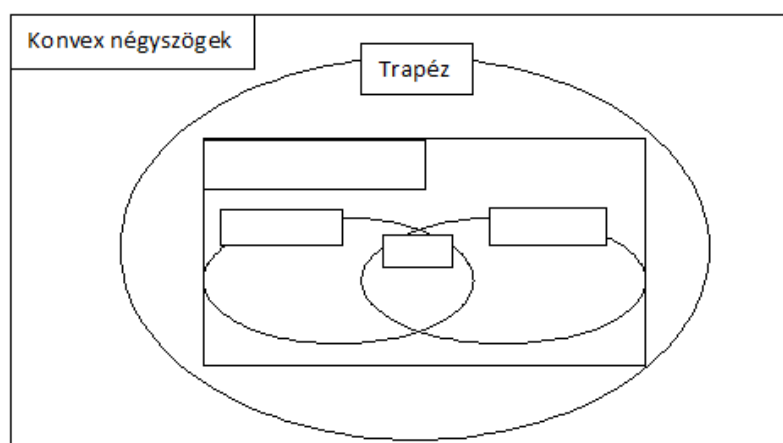
3. Vizsgáld a következő alakzatokat tengelyes és középpontos szimmetria szempontjából!

6 p/



4. Töltsd ki a halmazábrát! A névtelen halmazoknak adj nevet, majd minden halmazba rajzolj egy megfelelő konvex négyszöget!

10 p/



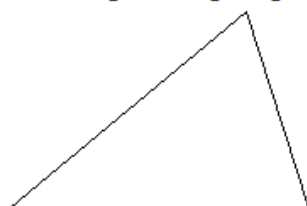
5. Igaz, vagy hamis?

3 p/

Állítás	Igaz/hamis
Minden trapéz rombusz.	
Minden négyzet téglalap.	
Minden paralelogramma trapéz	

6. Rajzold be az alábbi háromszögbe a magasságvonalakat!

3 p/



„D” A Városmajori Gimnáziumi kontrollcsoportok szociális hátteréről

Elsőként a Városmajori Gimnázium 9. évfolyamos kontrollcsoportjainak szociális helyzetéről olvashatjuk a matematika tanárnőjük által írtakat:

Általában az iskoláról: Diákjaink jellemzően értelmiségi, rendezett családból kerülnek ki, szinte kivétel nélkül továbbtanulásra és legalább egy tárgyból emeltszintű érettségire készülnek. A tanulók a tanórákon kívül rengeteg különórán vesznek részt, sokan érnek el komoly sport- és zenei eredményeket is.

9.c osztály: 16 fő (4 fiú + 12 lány)

4 osztályos képzésben vesznek részt, ének és humán tagozaton. A csoportbontás névsor alapján jött létre. Nagyon különböző általános iskolákból, eltérő felkészültségi szinttel érkeztek. Ezt a különbséget próbáljuk folyamatosan csökkenteni, azonban továbbra is nagy a szakadék, van néhány (4-5) kiemelkedő és több gyengébb képességű diák (jellemzően az énekesek). Az énekeseknek rengeteg fellépésük és próbájuk van, többször tanítási időben is, így nagyon nehéz néha együtt haladnia a csoportnak. Egy felmentett lány is van a csoportunkban, ő diszkalkuliás. A matematika órákon aktívan részt vesz, nagyon becsületesen és szorgalmasan készül az órákra, és minden dolgot megír, mindig próbálja a lehető legtöbbet kihozni magából. A munkáit mindig jegy nélkül, szövegesen, személyre szabottan értékelem.

9.e osztály: 18 fő (6 fiú + 12 lány)

5 osztályos képzésben vesznek részt, egy nulladik, nyelvi előkészítő évvel. A csoportbontás az első idegennyelv alapján történik, hozzám a németül tanulók járnak. Az első gimnáziumi évükben heti 1,5 óra matematika volt, amelynek célja az általános iskolai tananyag átismétlése, szinten tartása, valamint az esetleges hiányok pótlása. Ennek köszönhetően a hagyományos 9. évfolyamot nagyon erős és stabil alapokkal kezdték, amikre könnyen lehet építkezni. 2-3 gyengébb képességű diák van a csoportunkban.

A budapesti szakgimnáziumban tanító tanárnő a következőket írta az iskoláról és a kísérleti csoportról.

Ebben az iskolában a matematikát a 9. és a 12. évfolyamon a tanulók csoportbontásban tanulhatják, míg a 10. és 11. évfolyamon az egész osztály részt vesz a matematika órákon. A csoportbontás elsősorban a tanult nyelv fajtájának és szintjének megfelelően történik, ezért általában matematikából vegyes csoportok alakulnak ki.

A kutatást a szakgimnázium 9. évfolyamának egyik csoportjában végeztük. A felvételi pontszámok alapján ennek az osztálynak a teljesítménye volt a leggyengébb. Az év során is ez az osztály teljesített a leggyengébben, mind évfolyam szinten, mind iskola szinten. Az év végi osztályátlaguk 2,96 volt, míg a legjobb 9. osztály 4,02-ra teljesítette a szakgimnázium első évét. A vizsgált csoport osztálylétszáma 25 fő, mely nyelv alapján egy 16 fős és egy 9 fős csoportra lett bontva. A továbbiakban ez utóbbi, 9 fős csoportot nevezzük a kísérleti csoportnak.) A 16 fős csoport angol nyelvet tanul első idegen nyelvként, a 9 fős csoport pedig németet.

„E” A kísérleti csoport szociális hátteréről

A kísérleti csoport tanárnőjével rengeteg hangfelvételt tudtunk készíteni, tőle az alábbiakat tudtuk meg.

„A csoport létszáma kilenc fő. A gyerekeknek iskolán kívüli problémáik vannak, ezért az osztályfőnökkel rengeteget kell konzultálni, hogy megfelelőbben tudjam kezelni az esetlegesen megszokottól eltérő viselkedésüket. A kilenc tanuló közül három él teljes családban, édes szülőkkel, ahol mindkét fél dolgozik. A hat elvált szülős család közül három anyukának már van élettársa, amit az osztályfőnök elmondása szerint a diákok rosszul viselnek. Három család esetén a diák nem is beszél az egyik szülőjével. Van közöttük egy olyan fiú, akit az anyukája hagyott egyedül az apukával, ami eléggé különleges szituáció. Az egyik fiú patchwork családban él. Az édesanyja leányanyaként szülte, ő a legidősebb gyerek, a legfiatalabb még totyogó korú. Vele együtt hatan vannak testvérek. Az édesanya fogadó órán megkért minket, szaktanárokat, hogy amennyiben lehetőségünk van, segítsünk a diák nevelésében, mert otthon a kisebbek több időt igényelnek, így rá nem jut megfelelő mértékű figyelem. Több családnál is előfordul, hogy a gyámságot élvező szülő nem nézi jó szemmel azt, ha a másik szülővel jó kapcsolatot ápol a gyermek, amit hangoztat is. Ez sokuknak hatalmas teher, ami tanulmányi eredményeiken is látszik.”

„F” Önálló munka – feladatok felosztása

Date: Tue, 9 May 2017 07:52:06 +0200
From: Éva Kiss <evica9207@gmail.com>
To: Csaba Szabo <csaba@cs.elte.hu>
Subject: ütemterv

Kedves Tanár Úr!

Vera még nem küldte a tanmenetet, de mivel ugyanebből a könyvből tanít, ennek a leckéit osztottam be az év hátralévő részére. (12 lecke, 9 órára.)

Csatolok Önnek egy tervezetet. Kérem jelezze, ha valamit nem jól gondolok, vagy rosszul értettem.

Köszönettel: Éva

Date: Thu, 11 May 2017 16:16:56 +0200 (CEST)
From: Csaba Szabo <csaba@cs.elte.hu>
To: Éva Kiss <evica9207@gmail.com>
Cc: vera.kovacs21@gmail.com
Subject: Re: ütemterv

Kedves Évi,

Átnéztük az ütemtervedet Jankával és a Tanár úrral. Veráé 13+3 óra, a Tied 9+2. Verának heti 4 órája van, így hetekben számolva szinte ugyanannyi. Még egy óra összefoglalás vagy gyakorlás nem ártana. Elég feszítettnek tűnik a tempó végig a téma során, nem egészen világos, hogy tényleg megértik-e ilyen kevés feladattal. Kicsit felmerült bennünk a kérdés, hogy ez az anyag ennyi idő alatt tanítható-e. Van-e ötleted, hogy mit lehetne elhagyni (amire kevésbé van szükség később) hogy így a többit jobban megértsék, vagy mindenre szükség van és így csak alapszinten, de mindet kell érinteni.

Üdv.:
Zámbó Csilla

Date: Thu, 11 May 2017 16:35:56 +0200
From: Éva Kiss <evica9207@gmail.com>
To: Csaba Szabo <csaba@cs.elte.hu>
Cc: Kovács Veronika <vera.kovacs21@gmail.com>
Subject: Re: ütemterv

Kedves Mindenki!

Igen, tényleg nagyon sok ez így. Az első órából szerintem elhagyható a párhuzamos és a középpontos vetítés, a 6. órától a középponti szög, a radián, az ív, a terület (ezzel sokat foglalkozunk a középponti/kerületi szögeknél 10-ben), a 8. órától pedig a vektorműveletek, hiszen 10-ben ez is részletesen előkerül. Így kb 1-1,5 órát nyernénk, amit akár egy témaközi ismétlő órává lehetne alakítani. Bármilyen ötletet/észrevételt/javaslatot szívesen fogadok.

Köszönöm mindenkinek a sok munkáját!

Üdvözlettel: Éva

Zámbó Csilla <csilla95@gmail.com>

2017. máj. 11. 18:07 ☆ ↩ ⋮

címzett: Csaba; én; anna ▾

Egy dolog ötlött fel bennem ezekkel a kihagyásokkal kapcsolatban. Hogy engem pont hogy nagyon motivált általában, sőt, szerintem advance organizerként szolgált (bár akkor még ez nyilván nem tudatosult), mikor egy-egy dologról meséltek egy picit, aztán mondták, hogy persze erről később részletesebben is lesz szó. Jó volt, mert amikor meséltek, még nem kellett számolnom, feladatokat megoldanom vele, csak érdekesség volt - aztán meg mikor már komolyan vettük elő, ismerős volt és nem féltem tőle, így könnyebben ment. Most ha kivesszük azokat, amiket Évi írt, akkor pont ezektől a kvázi-advance organizerektől fosztjuk meg őket, persze az aktuális törzsanyag kedvéért, ami szintén fontos. Nagyon nehéz kérdés. (Kivéve a vetítéseket, azokat talán tényleg el lehet hagyni gond nélkül)

Csaba Szabo <csaba@cs.elte.hu>

2017. máj. 11. 18:31 ☆ ↩ ⋮

címzett: vera.kovacs21; evica9207; Zámbó; én; anna ▾

Szerintem ezt a bizniszt levelezzük ebben a körben. A lényeg: Évike 1-2 mondattal utalhatna rá, hogy itt ez az kimarad, (cinkosan esetleg, hogy pedig anyag lenne), és olyat is, hogyés majd ennek kapcsán jönnek a vektorok, amivel ...

Mit gondolnak?

Szabó Csaba

Zámbó Csilla <csilla95@gmail.com>

2017. máj. 11., Cs 18:35 ☆ ↩ ⋮

címzett: Csaba; én; anna; Kovács; evica9207 ▾

Ez nekem szimpatikus arany középút lenne. :)

Éva Kiss <evica9207@gmail.com>

2017. máj. 11., Cs 18:37 ☆ ↩ ⋮

címzett: Zámbó; Csaba; én; anna; Kovács ▾

Nekem is nagyon tetszik. Köszönöm az ötletet.
Már csak attól félek, hogy Vera mit fog íratni. Elvégre a témazárójának is meg kell felelnünk.

Csaba Szabo <csaba@cs.elte.hu>

2017. máj. 11., Cs 18:41 ☆ ↩ ⋮

címzett: Éva; Zámbó; én; anna; Kovács ▾

Kicsit módosul a helyzet az óraszámkülönbség miatt, de az kéne, hogy IDŐBEN egyeztetni ezen a listán keresztül a dolgozatfeladatokat. Attól, hogy kevesebb az óraszám, még ha jól értem a tanterv ugyanaz. vagy nem?

Janka Szeibert <jakacsa@gmail.com>

2017. máj. 11. 20:52 ☆ ↩ ⋮

címzett: Csaba; anna; Éva; Kovács; Zámbó ▾

Pont hogy kimaradnak Évinél anyagrészek...
PI ha Vera tesz bele vektoros feladatot az nem buli. Vagy:
Jól el kell különíteni azokat a feladatokat és azokat nem beleszámítani. De akkor már változnak eléggé a körülmények...

Csaba Szabo <csaba@cs.elte.hu>

2017. máj. 11. 21:54 ☆ ↩ ⋮

címzett: én; anna; Éva; Kovács; Zámbó ▾

Ezt jól végig kell gondolni.
Mi számít eredménynek itt és mi nem.

Valószínűleg 2 választásunk van:

1. Vera betesz egy olyan feladatot is, ami Évikénél nincs
2. Vera nem kér számon minden egyes részletet, és egyformát íratnak.
Egyáltalán nem kell mindent számon kérni, sőt.

anna muzsnay <annamuzsnay@gmail.com>

2017. máj. 11., Cs 23:51



címzett: Csaba; én; Éva; Zámbó; Kovács ▾

Én most úgy látom, hogy a 2. szimpatikusabb, de még gyűjtöm az érveket, ellenérveket.

...

Janka Szeibert <jakacsa@gmail.com>

2017. máj. 12., P 8:21



címzett: anna; Éva; Kovács; Csilla; Csaba ▾

Jó reggelt mindenkinek!!

Szerintem is a második verzió a jobb. Csak.. Verának nem szabad tudnia mit nem fog számonkérni. Mert akkor a több idejében ráfókuszálhat azokra, amik a dolgozatban lesznek.

Lehet hogy az a jobb, ha a dolgozatot a legeslegvégén állítják össze.

Itt a jóidő!!!! :)

Éva Kiss <evica9207@gmail.com>

2017. máj. 12. 8:34



címzett: én; anna; Kovács; Csilla; Csaba ▾

Jó reggelt! :)

Nekem is a Tanár Úr második ötlete tetszik. Nagyon köszönöm az ötleteket.

Úgy gondolom, hogy a fent általam írt kimaradó részek nem is közvetlen ehhez a témához kapcsolódnak. Ezek nélkül nyertünk legalább egy órát. Ma is átnéztem a naptárt, és ha minden kötél szakad, 06. 09-én (az utolsó matematika órán az évben), amikor a kiosztást terveztem, akkor még ott van egy matematika óra. a dolgozat kiosztása meg a rákövetkező héten, valakivel órát cserélve (ott már úgysem tanulnak) megoldható. Ezzel összesen két órát is nyernénk, amivel már szerintem teljesíthető a redukált tanmenet. Ezeknek az anyagoknak a nagy részét már tanulták 7. osztályban, tehát jórészt ismétlés lesz a geometriának ezen része. 7-esként végigszerkesztették velük az összes transzformációt is. Az is elképzelhető, hogy mi itt már egyáltalán nem szerkesztünk, csak elméleti szinten. Ezzel még több idő marad a feladatokra. Az órák elején kb. 10-15 percben elmondom a definíciókat, és marad legalább 20 percünk gyakorolni, ami nem két feladat, hanem inkább 3-4. Elégnek kell lennie.

Szép napot Mindenkinek!

Üdv.: Éva

Zámbó Csilla <csilla95@gmail.com>

2017. máj. 14., V 10:47



címzett: Éva; én; anna; Kovács; Csaba ▾

Kedves mindenki!

Én is a 2. verzióra szavazok. Az jó, ha már nem teljesen új a gyerekeknek, bár az elméletben szerkesztés meg eggyel feljebbi absztrakciós szinten van az én fejemben, de talán gyorsabbnak gyorsabb. Lefáradni viszont le fognak tőle, és az meg az óra további részének határfokát csökkenti. Vagy ez hülyeség?

Az a baj, hogy nehéz úgy gondolkozni, hogy fogalmam sincs azokról a gyerekekről.

Mindenesetre az jó, hogy tudunk órát nyerni, csak ügyesen kell kihasználni.

Üdv.:

Csilla

...

Kovács Veronika <vera.kovacs21@gmail.com>

2017. máj. 17., Sze 22:22



címzett: Csilla; Csaba; én; anna; Éva ▾

Sziasztok!

Köszönjük a sok segítséget!

Lassan nekem is kezd összeállni az egész, tök jó lenne Évivel összeülni, megbeszélni :) majd kereslek külön!

„G” Eddigi előadások – poszter prezentáció



Efficiency of test-enhanced learning in teaching elementary geometry

Eötvös Loránd University Faculty of Science,
Department of Algebra and Number Theory, 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C
Csilla Gyöngyvér ZÁMBÓ, Anna MUZSNAY, Janka SZEIBERT, Csaba SZABÓ
e-mail: csilla95@gmail.com csaba@cs.elte.hu
annamuzsnay@gmail.com szeibert.janka@gmail.com



42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

Motivation

In a recent review of studies on the intrinsic effect of testing, Roediger and Karpicke provided evidence that testing students on studied material results in improved retention of that material compared with spending an equivalent amount of time restudying the material. In their experiment, students studied prose passages and took three immediate free-recall tests, without feedback, or restudied the material the same number of times as the students who received tests. Students then took a final retention test 5 min, 2 days, or 1 week later.

	3x read	1x read, 2x tested
5 min later	80%	75%
2 days later	55%	70%
1 week later	40%	55%

Question: what is the effect of retrieval learning in mathematics classes in highschool compared to
a) pupils with the same skills and
b) elite highschool students of high abilities.

Before:	Now:
• Laboratory	• Real life
• Psychology students	• Grade 9 pupils (highschool)
• Text/foreign words memorizing	• Mathematics lessons

Our hypotheses: retrieval effect already has its benefits at grade 9: students who study in a retrieval-enhanced way will perform better in comparison with previous results of themselves and other 9th graders of the same school and will perform similarly to students of an elite secondary school, who learn on the standard way.

Our Experiment is a real life experiment.

Topics - Elementary geometry:

Arcs, sections of circles, arclength
Geometric transformations
Symmetric quadrangles
Regular polygons
Vectors

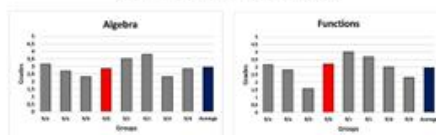


Test at the end of each lesson:

- From the material learnt the same day
- 2 questions: 1 theoretical, 1 practical
- Grading: 1 point each question
- The score counts in the final grade

In the original plan we wanted the pupils to submit the solution of a geometry problem to the teacher by email on the weekends, before Sunday evening. Most pupils did it on the first week. From the second week almost nobody did it. Several efforts of the teacher failed to have them to do the extra homework.

Control group from the same school



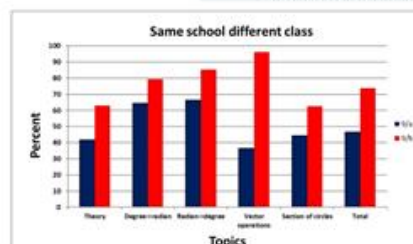
The two diagrams show the performance of the grade 9 study groups on two topics before the experiment. Our experimental group scored almost exactly as the average at the school and very similarly to the group 9/a.

Control group from an elite school

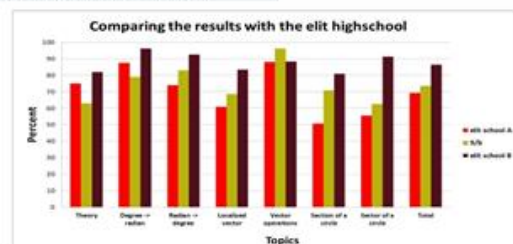
Experimental group	Control groups
• One group from 9 b.	• 9.c and 9.e classes (same teacher)
• 9 students	• 16, 18 students
• 3 lessons/week, 3-4 weeks	• 4 lessons/week, 4-5 weeks
• Total: 11 lessons	• Total: 19, 16 lessons
• Vocational school	• Grammar school
• Socially handicapped students (2016 National Survey of Competences)	• Elite school (Top 10 in national ranking in 2017)

Group 9/b and the elite school the same test of the level of the elite class.

Group 9/a wrote an easier test of their on level of the same topic.



The percentage of the score of study groups 9/a and the experimental study group 9/b. The red columns denote the scores of the experimental group. Group 9/a had one less problem in the test. Their test was simpler, adjusted to the level of the vocational school.



The percentage of the score of study groups of the elite highschool and the experimental study group 9/b. The middle columns denote the scores of the experimental group. The three groups wrote the same test of the level of the elite class. The pupils of the experimental group and of the elite highschool achieved the same result.

The conference participation was subsidised by the Talented Student Program of Eötvös Loránd University, Budapest, the Természettudományos Oktatásért Szabó Szabolcs Emlékére Alapítvány, the Új Nemzeti Kiválóság Program, and by the Pázmány-Eötvös Természettudományi Információs Alapítvány.



**TESZTELJÜK A TESZTET: A GEOMETRIAI
MEGÉRTÉS SZINTJEINEK ÚJRAGONDOLÁSA
A MAGYARORSZÁGI TESZTEREDMÉNYEK
ALAPJÁN**

Tudományos Diákköri Dolgozat

BERECZKY-ZÁMBÓ CSILLA

matematika-fizika
tanárszak, osztatlan

MUZSNAY ANNA

matematika-kémia
tanárszak, osztatlan

SZEIBERT JANKA

matematika-fizika
tanárszak, osztatlan

TÖRÖK TÍMEA

matematika-magyar
tanárszak, osztatlan

Témavezető:

SZABÓ CSABA

egyetemi tanár, ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2018

1. Tartalomjegyzék

1. TARTALOMJEGYZÉK.....	2
ABSZTRAKT	3
2. BEVEZETÉS	3
3. KOMMUNIKÁCIÓ	6
4. A SZINTEK	8
4.1 A VAN HIELE SZINTEK ÉS A TESZT.....	8
5. FELSOÓOKTATÁS ÉS A SZINTEK.....	12
5.1 KORÁBBI EREDMÉNYEINK	12
5.2 TESZTELÉS AZ EGYETEMEN.....	13
5.3 A TESZT TESZTELÉSE – INTERJÚK.....	16
5.3.1 PÉLDÁK ALAPSZAKOS INTERJÚKRA	17
5.3.2 PÉLDÁK TANÁRSZAKOS INTERJÚKRA	20
5.4 TÚL A VAN HIELE SZINTEKEN	24
5.5 JAVASLAT TESZTKÉRDÉSEKRE.....	27
6. ÖSSZEFOGLALÁS	29
6.1 ÖNÁLLÓ MUNKÁNK ÖSSZEFOGLALÁSA.....	31
7. HIVATKOZÁSOK.....	33

Absztrakt

A Van Hiele-elmélet és a rá alapuló mérés nemzetközi szakirodalomban széles körben ismert és elismert. Az elmélet öt egymásra épülő geometriai fejlettségi szintet különböztet meg, melyek geometriai tudásuk, szemléletük alapján sorolják diszjunkt osztályokba a diákokat. Dolgozatunkban megvizsgáltuk az elmélet és a teszt érvényességét felsőbb, egyetemi szinten. A kísérlet alanyai az ELTE matematika alapszakos elsőéves, illetve matematikatanár szakos elsőéves diákjai. Megállapítottuk, hogy az elmélet lényegében nem vezetett ellentmondásra az egyetemi kísérletünk alapján, viszont ami nem bizonyított, az az, hogy ez a fajta szintezés teljes és kizárólagos. Annak megvizsgálása érdekében, hogy egyáltalán milyen felépítések képzelhetők el, először megpróbáltuk feltérképezni, és megtudni azt, hogy manapság mit értünk geometria alatt, és ezen szempontok, ismeretrendszer, geometriai kultúra alapján megkezdjük egy újabb teszt kidolgozását.

2. Bevezetés

Dolgozatunkban a magyarországi matematika- és matematikatanár szakos hallgatók geometriai megértési szintjét vizsgáljuk. Vizsgálatunk elméleti alapja az 1950-es években megalkotott, és azóta továbbfejlesztett Van Hiele szintek elmélete (Grigoriadou 2012). A szintek mérésére létezik egy nemzetközileg elismert teszt (Usiskin 1982). Kutatásunk első lépéseként mi is ennek a tesztnek a segítségével mértük fel a hallgatók geometriai megértési szintjét fél éves geometria kurzusuk elején, illetve vizsgájukat követően. A tesztek kiértékelése után teszteltük a tesztet: interjúkat folytattunk a diákokkal, ellenőriztük, hogy valóban a teszteredményeknek megfelelő szinten állnak-e. Az interjúk alapján kimutattuk, hogy a teszt az 5. Van Hiele szintet nem méri jól, új tesztkérdésekre van szükség. Az új teszt létrehozásához az első lépéseket megtettük és a dolgozatban javaslatot teszünk új tesztkérdésekre is.

A Van Hiele-elmélet és a rá alapuló mérés nemzetközi szakirodalomban széles körben ismert és elismert. A szintek a geometriai tudásuk, szemléletük alapján sorolják diszjunkt osztályokba a diákokat. Magyarországon egyértelműen meghatározható, hogy a Nemzeti Aaptanterv (3) és a kerettanterv (1; 2) alapján melyik korosztály melyik szinten kellene, hogy legyen.

Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele az 50-es években dolgozták ki a geometria megértésének szintjeit (Dehaene 1992). Vigotszkij, Piaget és Bruner (Bruner 1966, 1986, 1990; N. Kollár–Szabó 2004, Vigotszkij 1967) elmélete szerint minden életszakaszban megvannak a megértés fejlődési szintjei. Ezek a szintek egymást követik, egy diák nem juthat el egy felsőbb szintre az összes korábbi szint elsajátítása nélkül. A tanulás folyamata leegyszerűsítve ezen szintek egymást követő eléréséből áll. Emellett a matematika (és minden tudomány) különböző területeinek vannak megértési szintjei, amelyek szigorúan egymásra épülnek. A tanítási folyamat célja nem más, mint hogy a diákok minél magasabb szintre jussanak el a megértés egymást követő szintjei közül. A van Hiele házaspár a matematikán belül a geometria megértésének szintjeit dolgozta ki részletesebben. Elméletüknek, mint ahogy a fent említett elméleteknek is, van egy kommunikációt érintő vetülete. Eszerint a különböző szinten lévő emberek „különböző nyelvet beszélnek”, és nem meglepő módon a különböző nyelvet beszélők nem értik meg egymást. Ezalatt a matematika, illetve azon belül a geometria esetén azt értik, hogy az egyik szinten lévők nem fogadják el a másik szinten érvelők indoklásait. Egy alsóbb szinten lévő diák fölöslegesnek gondolhatja a fölsőbb szinten lévő indoklását, mert nem érzi szükségesnek, hogy állításait külön alátámassza, számára azok teljesek. Ezzel szemben a fölsőbb szinten lévő nem tekinti teljes értékű indoklásnak az alsóbb szintű által adott magyarázatot. Erre a jelenségre egy részletesen kidolgozott példa található korábbi dolgozatunkban (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016).

A van Hiele házaspár elmélete nemzetközileg ismertté és elfogadottá vált, és ennek köszönhetően sokan kezdték el vizsgálni a geometriai fejlődés szintjeit. A magyar közoktatásban egyértelműen elkülönülnek ezek a szintek. Az első szint a 4. osztályos, a második szint a 6. osztályos, a harmadik szint a 8. osztályos, a negyedik szint pedig a 12. osztályos követelményrendszernek felel meg, ezt a későbbiekben részletesebben is kifejtjük. A 80-as években született meg a legismertebb teszt, amely ezeket a szinteket hivatott mérni (Usiskin 1982). Világszerte végeztek méréseket a felhasználásával, többek között az Egyesült Királyságban (Zachos 1994), az Amerikai Egyesült Államokban (Wang 2011), Malajziában (Chew 2009), Hollandiában (Grigoriadou 2012), a Dél-afrikai Köztársaságban (Selkirk 2011). A több mint negyven ország közül, ahol alkalmazták a tesztet és elemzéseket tettek közzé eredményeiről, mi most csak néhányat emelünk ki.

Malajziában több tanulmány is foglalkozik a diákok fejlettségi szintjével. Itt 13 éves korban kezdődik a középiskola, a matematikaoktatás az országban nem egységes. A tanulmányok közül Tay-é (Tay 2003) az első osztályosokra fókuszál, Chong (2001) a második

osztályosok szintjét mérte fel, Rafidah pedig egészen a 4. osztályig terjesztette ki a vizsgálatokat (Rafidah 2003). Eredményeik alapján a malajziai középiskolás diákok első vagy második szinten vannak, és csak irányított Van Hiele-típusú oktatással jutnak el a második szintre.

Az Egyesült Királyságban (Jones 2002) erősen függ az oktatási módszertől, hogy milyen szintre jutnak a diákok. A központi szabályozás szerinti elvárt szint alacsonyabb, mint Magyarországon. Még így is az alsóéves középiskolások 40 %-a ez alatt a szint alatt teljesít, legtöbben az első vagy a második szinten vannak. Ez egy ellentmondásos helyzetet eredményez, amelyben a diákok megértési szintjét meghaladó szintű tananyagot kell(ene) tanítaniuk a tanároknak, ez pedig az elmélet kommunikációs megfontolásai alapján nem lehet hatékony. Ez rendkívül megnehezíti a tanítási-tanulási célok elérését, a későbbiekben kísérletet is teszünk ennek alátámasztására.

Görögországban sem jobb a helyzet (Kospentaris – Spyrou 2008), itt az oktatás még kevésbé egységes, a követelményrendszeréről pedig a cikkből nem kapunk információt. A szerzők megállapítják, hogy a 15-23 évesek közül csak azok jutottak el második szintre, akik elvégeztek egy geometriakurzust is. (Korábban már megjegyeztük, hogy ez Magyarországon körülbelül az általános iskola negyedik-ötödik osztályában elvárt szint.) A méréseket mindenhol a Van Hiele-tesztek alapján folytatták (Usiskin 1982).

Ha megnézzük ezen 40 ország szakirodalmát, azt figyelhetjük meg, hogy mindenütt 1-2. szint körül mozognak a diákok. Ezek a nemzetközi eredmények azt sugallják, hogy a magyar NAT követelményei meghaladják más országok diákjainak és tanárainak teljesítményét. Önmagában is természetes a kérdés, hogy hogyan alakulnak a szintek a magyarországi diákok körében, elérik-e a tantervben szereplő elvárások szintjeit. A lényeges különbség a malajziai és brit diákok helyzetével szemben, hogy Magyarországon az oktatás erősebben központosított - a NAT lazábban, a kerettanterv szorosabban meghatározza a geometria oktatás tartalmát. Elvárható tehát, hogy Magyarországon a geometriai megértés térképe egységesebb legyen, és a fejlődési szintek korábbi életszakaszokra legyenek tehetők, mint a fenti országokban. Az eddigi viszonylag friss vizsgálatok általános iskolákban és középiskolákban vizsgálták a Van Hiele szinteket mérő tesztek eredményeit (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016; Győry; Herendiné Kónya 2003; Wang 2011) és megállapították, hogy a magyar átlagos középiskolások évfolyamtól függetlenül a kettes szinten vannak. Tehát elmondható, hogy a magyar diákok is jóval a hazai követelményrendszer alatt teljesítenek, valamint ami szintén meglepő lehet, hogy a gimnázium évei alatt nem tapasztalható fejlődés.

(Azonban az valóban igaz, hogy a diákok megértési szintje egységesebb, valamint ilyen viszonyításban magasabb is, hiszen a második szintet csak nagyon kevesen nem érték el.) A középiskolai követelmények alulmúlásának okáról előző dolgozatunkban (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016) és a későbbiekben is részletesebben írunk.

Minket ezen kutatásunk alkalmával a Van Hiele modell magasabb szintjei érdekeltek, hogy milyen szinten állhatnak az egyetemi hallgatók, azon belül is a matematika szakos hallgatók. A fentiek alapján látható, hogy nagyobb matematikatudású diákok szintjeinek megállapítására és a Van Hiele elmélet helyességének tesztelésére magasabb szinteken is kevés példa volt mindmáig a nemzetközi szakirodalomban is. Magyarországon eddig általános iskolásokat és középiskolásokat vizsgáltak (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016; Győry), illetve tanítójelöltek szintjéről készültek felmérések (Herendiné Kónya 2003). Itthon a középiskolába belépő elvárt szint a NAT alapján a 3., a kilépő pedig a 4. Természetes, hogy a matematika szakra felvett egyetemi hallgatóktól az átlagnál magasabb geometriai megértési szintet várunk el, így megfelelő közegnek tűnt az elsőéves matematika alap-és tanárszakos hallgatók között megállapítani a szinteket, vizsgálni a modell helyességét. Azonban a középiskolai eredmények figyelembevételével elképzelhetőnek tartottuk azt is, hogy a hallgatók esetleg a várakozásainkon alul teljesítenek.

3. Kommunikáció

Az Usiskin-féle teszt eredeti szándéka szerint a Van Hiele-elmélet által felállított öt szintet méri, de eredményeink – a szakirodalom korábbi feltevéseivel egybehangzóan - azt mutatják, az elmélet törekvéseit valójában csak az első négy szint tükrözi.

„Ha fejleszteni akarjuk a gyerek képességeit és gyorsítani fejlődését, akkor arról a szintről kell kiindulnunk, ahol a gyerek éppen tart, vagyis az elvárásoknak a gyerek képességeihez és szükségleteihez kell igazodniuk.” Ez Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elméletének a mottója. A legközelebbi fejlődési zóna kifejezés (Vigotszkij 1967) arra utal, hogy a gyereket körülvevő környezet akkor a legtámogatóbb, ha egy lépéssel éppen az aktuális fejlettségi szint előtt jár (N. Kollár – Szabó 2004). Az elmélet szerint akkor van esély a gyerek fejlődésre, ha a saját nyelvén szólunk hozzá. Vigotszkij munkái posztumusz jelentek meg, néhány közülük csak évtizedekkel halála után. Sokat hangoztatott alapelve, a legközelebbi fejlődési zóna elve a mai magyar tehetséggondozásban Pósa-módszer néven vált szélesebb körben ismertté. A

kommunikáció, mint ahogy életünk számos színterén hatalmas jelentőséget kapott a történelem során és manapság is, magától értetődően az oktatás terén is fokozott figyelmet kapott mindig is. Tanulásban és tanításban betöltött szerepéről az évtizedek során számosan értekeztek, a legjelentősebbek tán Piaget, van Hiele és Bruner; azonban ezen elméletek közös magját mind Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elmélete adta. Ez az elmélet hatványozottan jelenik meg Brunernél (Bruner 1966) -ben, majd későbbi narratíva elméletében (Bruner 1986), ahol kifejti, hogy a kulturális és személyiségfejlődést erősen meghatározza a családban végbemenő kommunikáció. Bruner azt mondja, hogy az oktatónak meg kell próbálnia arra ösztönöznie a tanulókat, hogy maguk is felfedezzék az összefüggéseket. Kiemelkedő szerepet tulajdonít az oktató és hallgató közötti kommunikációnak, a szókratikus tanulásnak. Éppen ezért nagyon fontosnak tartja a kellően gyakori szülő és a gyermek közti beszélgetést is. Az oktató feladatának tekinti azt, hogy a tanulni kívánt információkat a tanuló jelenlegi értelmi állapotának megfelelő formába öntse. Itt szeretnénk megjegyezni, hogy bár Vigotszkij 1896-1934-ig élt, munkái és elméletei máig érvényesek, míg követőinek (Piaget, Bruner) munkái folyamatos felülvizsgálaton és átalakításon mentek keresztül az idők során (Bruner például saját maga felülvizsgálta korábbi téziseit évtizedekkel később). A van Hiele házaspár ugyanezt a jelenséget – azaz azt, hogy minden gyermekhez a saját nyelvén kell beszélni, hogy fejlődést tapasztaljunk – a matematika területén fogalmazta meg. A Van Hiele elmélet tulajdonképpen a legközelebbi fejlődési zóna elméletének geometriára való leképezése. A Van Hiele elmélet szerint, emellett, a matematika minden területén léteznek olyan fejlődési szintek, amelyek lineárisan egymásra épülnek, és egy adott szintről csak a többi alsóbb szinten keresztül lehet eljutni. Azaz egy fölsőbb szinten a megértés elképzelhetetlen az összes alsóbb szint megértése nélkül.

Az iskolai kommunikáció alatt a tanórai előadásokat, magyarázatokat, beszélgetéseket értjük. A tanító tanár, oktató mindig egy általa a diákokról feltételezett szinten szólítja meg a hallgatóságot. Az oktató által feltételezett szint nagyon gyakran nem egyezik meg a diákokról feltételezhető szinttel. És a diákokról feltételezhető szint ritkán egyezik meg a diákok szintjével. A legtöbb egyetemi oktató ugyanazt a szintet feltételezi a diákokról, amilyenvel ő került be az egyetemre, vagy amilyen szintet az ő évfolyamtársai ütöttek meg annak idején. Feltételezhető szintnek tekintjük a NAT által megfogalmazott kompetenciákat, tananyag- és tudásanyagot, míg a valódi szint pedig az, amit a diák éppen az adott pillanatban képvisel. Így az egyetemi oktató gyakran nem veszi figyelembe, hogy ma már nem csak a legkiválóbb jelentkezőket veszik fel az egyetemre, hanem annál sokkal többet. Ugyanakkor a középiskolai

tananyag folyamatosan átalakul és a diák sem éri el általában a feltételezhető szintet. Számos tanulmány mutatta ki, hogy a diákok nem rendelkeznek a szükséges kompetenciákkal, mert az iskolában nem az életre és nem a NAT kompetenciáira, hanem az érettségire készítik fel őket (Csányi–Pozsonyi–Szabó 2014; Kovács–Palotay 2012). A feltételezett és a valós szint közötti eltérések pedig komoly problémát szülhetnek a továbbiakban. A korábbi elméletek azt sugallják, hogy akkor van esély a tanítási folyamat sikerességére (most sikeresség alatt a gondolkodási- és problémamegoldó készség fejlesztését értjük), ha az oktató felméri a diákok szintjét és annak megfelelően alakítja kommunikációját. E nélkül „legjobb” esetben is csak a tananyag memorizálása következhet be, annak megértésre elképzelhetetlen.

4. A szintek

4.1 A Van Hiele szintek és a teszt

Ahogy már korábbi TDK dolgozatunkban is megfogalmaztuk (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016), az öt Van Hiele szint a következő:

1. szint, a ráismerés, vizualizáció szintje: Rajzról, ábráról felismernek alakzatokat: kör, téglalap, négyzet, ...stb. Meg tudják nevezni ezeket, az alakzatokat egy egységként látják, a formát figyelve tekintenek. Az alakzatok részeit és tulajdonságait még nem ismerik fel. Elkülönítik, kategorizálják a különböző alakzatokat, de nem látnak kapcsolatot a különböző kategóriák között. Egy négyzetre például nem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy paralelogramma. Nem nevezik meg az alakzat részeit, mint például csúcs, oldal, szög.

2. szint, a vizuális vizsgálódás, elemzés, leírás szintje: A tanuló felismeri az alakzatok egyes részeit és az egyes részek viszonyát. Azonosítani tudják az alakzatok tulajdonságait, de ezeket még nem tudják összekötni és nem látják a különböző alakzatok tulajdonságai közötti összefüggéseket. Például egy négy derékszöggel rendelkező alakzatról meg tudják állapítani, hogy téglalap (akkor is, ha nincs szépen lerajzolva). Egy rombuszról tudják, hogy szemben lévő oldalai párhuzamosak vagy egyenlő hosszúak, de ezeket a tulajdonságokat még nem kötik össze. Egy egyenlő oldalú négyszögről tudják, hogy rombusz. Egy négyzetre még most sem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy paralelogramma.

3. szint, a fogalmak rendszerezésének, absztrakciónak szintje: A tanuló az egyes tulajdonságokat, fogalmakat már rendszerben látja. A tulajdonságok rendszerezése alapján következtetéseket tud levonni, és ebben a rendszerben fontos szerepe van az ok-okozatiságnak: például egy háromszögben két oldal egyenlőségéből következik két szög egyenlősége. Képesek definíciókat alkotni és megindokolni az állításaikat, következtetéseket levonni, de még nem teljes matematikai rendszerben gondolkoznak, nem értik a bizonyításokat. Tudják és értik, hogy minden négyzet téglalap, minden téglalap paralelogramma. Látják, hogy ha egy négyszög egyben téglalap és rombusz is, akkor az négyzet. A szakirodalomban tipikusan emlegetett példa a váltószögek felismerése, és az azzal való érvelés. Más típusú matematikai érvelésekre viszont még nem képesek. A geometriát még nem látják teljes ok-okozati összefüggésben.

4. szint, a formális következtetések szintje: Ez a szint egy általánosabb matematikai érettségi szint elérése a geometrián belül. Az általános matematikai szint alatt azt értjük, hogy már megkülönbözteti a definíciókat, tételeket, bizonyításokat, axiómákat, következményeket, elméleteket. Az állításoknál felmerül a bizonyítás iránti igény, ezeket a bizonyításokat értik és maguk is el tudnak végezni egyszerűbb bizonyításokat. Megértik a szükséges és elégséges feltételeket. A geometrián belül a tanuló megérti az alapfogalmak és az axiómák meglétét, az utóbbiakat el tudja különíteni a tételektől. Például be tudja bizonyítani, hogy egy háromszögnek van beírt köre. Teljes axiomatikus bizonyításra nem feltétlenül képesek. Például egy négy derékszöggel rendelkező négyszögre rámondja, hogy a szemben lévő oldalak egyenlők, de nem érzi, hogy ezt még be kéne bizonyítani.

5. szint, a fegyelem, a formális logika szintje. Megértik, hogyan épülnek fel a különböző matematikai rendszerek. Képesek absztrakt következtetések levonására, speciális geometriai interpretációk használata nélkül. Fel tudják mérni egy adott axióma hozzáadásának vagy kivételének hatását a rendszerből. Ez a szint már megköveteli a különböző geometriai axiómarendszerekben való gondolkodás és az azokban való bizonyítás képességét.

A Van Hiele modell alapján a diákok geometriai megértését ezen öt szint segítségével diszjunkt csoportokba lehet rendezni. A szintek talán legmeghatározóbb tulajdonsága, hogy rögzített sorrendűek és egymásra épülők. Tehát a szintek elsajátításának sorrendje nem felcserélhető, és ahhoz, hogy egy tanuló egy magasabb szintre jusson, minden korábbi szintet el kell érnie. Az elmélet alapján a szintek elérhetők, tehát valós tanulási-tanítási cél lehet az egymás utáni egyre magasabb Van Hiele szintek elérése. Az elmélet kommunikációs megfontolásai alapján azonban a különböző szinteken állók „más nyelven beszélnek”, így

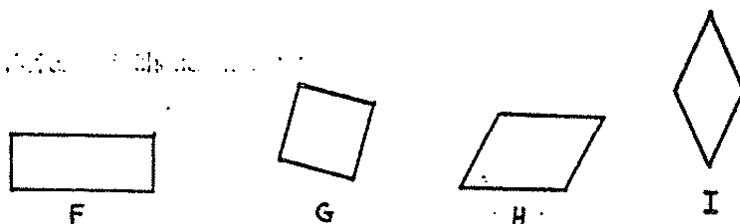
nehezen értik meg és fogadják el egymás érveléseit és gondolatmenetét. Ezáltal a tanítási folyamat akkor lehet sikeres, ha a tanítás során a diákok valós szintjéhez igazítjuk a kommunikációnk, „az ő nyelvükön próbálunk szólni”.

A hallgatók ilyesfajta geometriai megértésének vizsgálatára létezik egy nemzetközileg elismert teszt, az Usiskin-féle teszt (Usiskin 1982). Ez a teszt a Van Hiele szintek mérésére szolgál. Mind az öt szint mérésére 5-5 kérdés, tehát összesen 25 kérdés található a tesztben. A teszt jogköteles, az engedélyeket a szerzőtől megszereztük, és hozzájárulását követően kutatócsoportunk tagjai Győry Ákos vezetésével magyar nyelvre fordították. Mutatunk néhány példát a feladatokra.

Az első szintet mérő feladatok között szerepel az következő:

Melyik négyzet?

- a. Egyik sem.
- b. Csak G.
- c. Csak F és G.
- d. Csak G és I.
- e. Mind az.

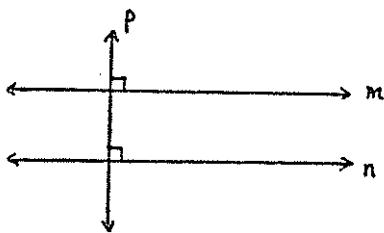


Az alábbi feladat pedig a negyedik szint mérésére szolgál:

Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:

- i. Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.
- ii. Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.
- iii. Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

- a. Csak i-ből.
- b. Csak ii-ből.
- c. Csak iii-ből.
- d. i-ből vagy ii-ből.
- e. ii-ből vagy iii-ből.

Az alábbi feladattal pedig a teszt szerint az 5-ös szint meglétét lehet mérni:

Egy F-geometriában (ami különbözik attól, amihez hozzá vagy szokva) pontosan négy pont van és hat egyenes. Minden egyenesnek pontosan két pontja van. Ha a pontok P, Q, R, S , akkor az egyenesek $\{P; Q\}, \{P; R\}, \{P; S\}, \{Q; R\}, \{Q; S\}, \{R; S\}$.

Ebben a geometriában a metszi és a párhuzamos a következőt jelenti: például $\{P; Q\}$ és $\{P; R\}$ metszik egymást, hiszen P közös pontjuk, míg például $\{P; Q\}$ és $\{R; S\}$ párhuzamosak, mivel nincs közös pontjuk.

Az alábbiak közül melyik helyes?

- a) $\{P; R\}$ és $\{Q; S\}$ metszik egymást.
- b) $\{P; R\}$ és $\{Q; S\}$ párhuzamosak.
- c) $\{Q; R\}$ és $\{R; S\}$ párhuzamosak.
- d) $\{P; S\}$ és $\{Q; R\}$ metszik egymást.
- e) Az a)-d) állítások közül egyik sem igaz.

(A kétségek a teszt helyességére az 5-ös szintet illetően már akár a kérdés elolvasása után is támadhatnak bennünk, azonban mi ezeket a már korábban is felmerülő kétségeket (Wilson 1990). a szakirodalomban elsőként kísérlettel igyekeztünk cáfolni vagy alátámasztani, amelyről a dolgozat későbbi részében bővebben is írunk.)

A tesztet a következőképpen kell kiértékelni: egy kitöltő elérte az adott tesztszintet, ha az adott szinthez tartozó öt kérdés közül legalább négyre tudta a helyes választ, és az előtte lévő szintek mindegyikénél legalább négy helyes választ adott a szintet mérő öt kérdésre. Az elért szintek közül a legmagasabb a kitöltő teszten elért szintje. Tehát egy tesztet kitöltő személy az 1. szinten áll, ha az első öt kérdésből legalább négyre helyesen válaszolt, viszont a második öt kérdés közül már csak legfeljebb háromra tudta a választ. Egy kitöltő a második szinten áll, ha az első öt, illetve a második öt kérdésből legalább négyet-négyet helyesen válaszolt meg, viszont a harmadik szintet mérő öt kérdésből már csak legfeljebb háromra tudott jól válaszolni, és így tovább. (Egyes esetekben megkülönböztetnek erős és gyenge Van Hiele szinteket, erős szint esetén a fent említett szabály alapján minden elért szint kérdései közül legalább négyre kell jó választ adni, míg gyenge szint esetén egy szintet elért a tanuló akkor, ha legalább három kérdésre tudta a helyes választ, és a tanuló szintje az a szint, ami után a következő szinten legfeljebb két jó megoldást adott. A továbbiakban mi egy diák Van Hiele szintje alatt az erős Van Hiele szintet értjük.) A Van Hiele elmélet szerint a szintek egymásra épülnek, így nem fordulhat elő olyan, hogy egy bizonyos szinten álló tanuló egy a saját szintjénél magasabb szinten legalább 4 kérdésre helyesen válaszol, hiszen ezáltal lenne a saját szintjénél magasabb elért szint, vagyis lenne olyan szint, amelyet elért, viszont az összes annál alacsonyabbat nem. Ezzel csak az 5. szint mérésekor ütközhetünk problémákba, ezt fogjuk a későbbiek során kifejteni.

5. Felsőoktatás és a szintek

5.1 Korábbi eredményeink

Korábbi kutatásaink során felmértük a magyar középiskolás diákok Van Hiele szintjét, és azt összehasonlítottuk a NAT által előírt adott korosztályra vonatkozó szintekkel (Bursics–Fehér–Muzsnay). Megfigyelhető, hogy a NAT egymásra épülő elemekből felépíthető fejlődési folyamatot ír elő (3), és ezek az elemek lényegében egyértelműen megfeleltethetők a Van Hiele szinteknek. Mint ahogyan a bevezetőben írtuk, egy általános iskolás tanulónak 6. osztályra a második, 8. osztályra a harmadik szintre kell eljutnia, míg a középiskola 12. osztályára a negyedik Van Hiele szintet kell elérnie a NAT előírásai szerint. Ehhez képest azonban a középszintű érettségi (a diákok 95%-a középszinten érettségizik matematikából) geometria feladatai legfeljebb a harmadik szintet követelik meg. Ez azért probléma, mert

sokszor mind a tanárok, mind a diákok kizárólagos célja az érettségi vizsgán való jó teljesítés (Csányi–Pozsonyi–Szabó 2014; Kovács–Palotay 2012), amihez pedig nincs szükség a bizonyítás iránti igény megjelenésére, azaz a negyedik szint elérésére. Mindezek ismeretében is megdöbbentő az eredmény, miszerint az 570 magyar középiskolás korú diák (a kiválogatott diákok lényegében lefedik magyar középiskolások teljes spektrumát) Usiskin-féle teszten elért eredményének átlaga 2,09 és 2,46 között mozog, és a gimnáziumi évek alatt a geometriai megértési szintek átlaga nem fejlődik (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016; Győry).

5.2 Tesztelés az egyetemen

Annak érdekében, hogy megvizsgáljuk az elmélet és a teszt érvényességét felsőbb, egyetemi szinten, kitöltöttük az Usiskin-féle tesztet az ELTE matematika alapszakos elsőéves diákjaival, illetve a matematikatanár szakos elsőéves diákjaival.

Mindkét csoporttal az egyetemi tanulmányaik második félévében végeztük el a kísérletet, ennek egyik oka az volt, hogy így már egy féléven keresztül egyetemi tananyagot is tanulhattak matematikából, másrészt az első egyetemi geometriakurzus mindkét szakon a II.félévre esik, így a hallgatókkal megírtuk a tesztet a kurzus elvégzése előtt, majd fél évvel később ugyanazon hallgatókkal a geometriavizsga után is. A felmérést először a matematika BSc-s hallgatók körében végeztük, 65 hallgató bevonásával 2016 tavaszi félévében. Hasonló kísérleti beállítást alkalmaztunk 2018 tavaszi félévében az 51 tanárszakos hallgató részvételével.

A tesztek kitöltése előtt különböző előfeltevéseink voltak, így például valószínűsítettük, hogy a matematika irányban továbbtanuló hallgatók a két legmagasabb, tehát a 4. és 5. szinten, vagyis a NAT alapján legalább 12. osztályos szinten fognak állni geometriából. Ezen kívül pedig azoktól, akik a 4. szinten állnak, a geometriakurzus elvégzése során szintemelkedést vártunk. Ennek ellenére a középiskolai eredmények tanulságai alapján elképzelhetőnek tartottuk azt is, hogy lehet akár pár olyan hallgató, aki csak 3. szinten áll, az ő esetükben viszont a Van Hiele elmélet értelmében a megértési szintjük a kurzus elvégzésével sem emelkedhetett, részben a szintek egymásra épülése részben pedig az elmélet kommunikációs vetülete miatt, hiszen egy egyetemi geometriaórán az oktató minden bizonnyal magasabb szinten tárgyalja a tananyagot, mint amilyenek eredetileg ők voltak. Azonban az az eshetőség,

miszerint valaki fél éven keresztül tanulhat az egyetemen geometriát és levizsgázhat belőle anélkül, hogy a NAT szerinti 12.-es szintet elérhetné, elsőre valószínűtlennek tűnt.

A kísérlet eredményeit az alábbi táblázat mutatja:

	Matematika BSc		Matematika tanárszak	
	1. kitöltés (db)	2. kitöltés (db)	1. kitöltés (db)	2. kitöltés (db)
3. teszt szint	27	11	24	24
5. teszt szint	38	16	18	22
3.→5. ugrás	0		7	
5.→3. visszaesés	0		6	

A BSc-s diákoknál és a tanárszakosoknál is minden hallgató, aki értékelhető teljesítményt nyújtott, vagy az 5. vagy a 3. szinten áll(t). A negyedik szinten senki. Szembetűnő, hogy a teszt eredményei szerint a diákok nagy része valóban, 3., azaz 8. osztályos tanulótól elvárt szinten áll. Megfigyelhető az is, hogy az alapszakos hallgatóknál nem volt szintugrás, míg a tanárszakosoknál volt 3. szintről 5.-re való ugrás és 5.-ről 3. szintre való visszaesés is a fél év eltelté során, ami egyrészt a Van Hiele elmélet kommunikációs vetületének mond ellent, másrészt annak, hogy az elmélet alapján nincs visszafejlődés, egy már megszerzett szintet nem lehet elveszíteni. Azonban mi magyarázza a különböző képzési módon tanuló hallgatók eredményének ilyen különbségét? A jelenség oka az lehet, hogy 2016-ban az alapszakosok esetén még papír alapon töltöttük ki a tesztet, míg a tanárszakosoknál már az Edubase online rendszert használtuk, ami a kitöltést követően megjelenítette a kitöltő pontszámát, sőt az elrontott feladatokat is, és azok helyes megoldását is. Így a tanárszakosok esetén már akadtak olyanok, akik a félév elteltével emlékeztek a rontott válaszaikra, és azokat, vagy azok egy részét javítani tudták.

Szembetűnő tény az is, hogy a teszt szerint a hallgatók között nincs 4. szinten lévő diák, vagyis aki eléri a 4. szintet, az az 5.-et is. Sőt, számos olyan hallgató is volt, aki a 3. és 5. szint

kérdéseit jól töltötte ki, a 4.-et viszont nem. (Ilyenkor a szabályok szerint 3. szinten áll az illető.) Ez ellentétben áll a szintek egymásra épülésével. Már maga Usiskin is amikor megalkotta a tesztet, azt sejtette, hogy ez a teszt az 5. szintet nem jól méri, és a szakirodalomban több helyen is találunk erre vonatkozó kétségeket, azonban mint már említettük, a tesztet korábban főként 1-2. szint körül mozgó diákok körében töltötték csak ki, de eddig még sosem olyan társasággal, aki elérhette volna a magasabb szinteket. A mi eredményeink alátámasztják a korábbi kétségeket arról, hogy az 5. szintet valóban lehet-e mérni és hogy ezek a kérdések tényleg mérik-e az 5. szintet.

Meggyőződésünk, hogy az axiomatikus gondolkodás folyamatosan fejlődik a matematikai képességekkel és nem pedig a 4. Van Hiele szintet követően kezd kialakulni. Ugyanakkor nagyon kevés olyan ember él a világon, akinek lehetősége van mélyebben belemerülni más axiómarendszerek vizsgálatába. Magyarországon ilyen csak matematika szakos hallgatóknak, az egyetemi törzsanyagot kívül tanítanak. Akár a hiperbolikus, akár a gömbi geometriát vesszük, a geometria tanszékek néhány oktatóján kívül senki nem ért hozzájuk az alapvető összefüggéseket leszámítva. Tehát a különböző axiómarendszerekben való gondolkodás, bizonyítás képességének szintje elméletben létezik, azonban kétségkívül csak a társadalom igen szűk rétege tartozhat bele. Ezzel a szinttel kapcsolatban még további problémák is felmerülnek: egyrészt, érdemes-e egyáltalán ezt mérni, hiszen mint mondtuk, viszonylag pontosan megállapítható, kik azok az emberek, akik ezt elérhetik. Másrészt nem is biztos, hogy mérhető, és ha igen, akkor is újabb nehézségként merül fel, hogy ki állíthatná össze a mérésére szolgáló tesztet. Az a pár, a szintet elérő ember, saját magának? Az Usiskin-féle teszt nem is ezt az 5. szintet méri, hanem tulajdonképpen logikai következtetésekre kérdez rá. Miután megbizonyosodtunk arról, hogy a teszt ezen része nem teljesen azt méri, amit valójában szeretne mérni, és felmerült az igény egy új tesztre a magasabb szinteken álló egyének geometriai megértési szintjének mérésére, mi a fenti okokból nem is ennek a szintnek a mérésére szolgáló, jól működő teszt megalkotását tűztük ki célul, hanem elsőként az az ötlet merült föl, hogy a 4. szintet lehetne finomítani. Ennek alapját az adta, hogy lényegi különbségek vannak aközött, hogy valakiben felmerül a bizonyítás iránti igény, és aközött, hogy különböző bizonyításokat el is tud végezni, valamint a bizonyítások nehézségi fokai között is jelentős, esetleg mérhető különbségek lehetnek.

Mivel már az első kitöltés után felmerült a gyanúnk, hogy a teszt hibás, hiszen egyrészt elképzelhetetlen, hogy egy matematika szakos hallgató a NAT szerinti 8. osztályos, azaz 3. szinten teljesítsen a teszten, másrészt a 4. szinten lévő hallgatók meglepő hiánya miatt.

Annak érdekében, hogy megvizsgáljuk, hogy milyen szinten állnak a hallgatók valójában, interjúkat készítettünk.

5.3 A teszt tesztelése – Interjúk

Mint ahogyan a bevezetőben is említettük, és ahogy Usiskin (1982) cikkében is szerepel, tesztelni kell a teszt eredményeit, vagyis tesztelni kell a tesztet. Annál is inkább, mert nehéz elhinni, hogy egy egyetemi geometria kurzus elvégzése után is volt olyan hallgató, aki az általános iskolás szinten maradt. Először a BSc-s kísérletet hajtottuk végre. Az összes diákot behívtuk egy interjúra. Az interjún általában a kutatócsoport két-három tagja vett részt és a diákok 1-3 fős csoportokban jelentek meg. Minden alkalommal ugyanazokat a kérdéseket tettük föl, és amikor egyszerre több fő vett részt az interjún, figyeltünk arra, hogy mindenkiről megkapjuk a szükséges információkat. Ez az információ az volt, hogy az illető valóban a teszt által kimutatott szinten van-e geometriából. A leszűrt tapasztalatok alapján egy évvel később már főként azokat a tanárszakos hallgatókat hívtuk be, akik valamelyik alkalommal nem érték el az 5-ös szintet, de kontroll kedvéért néhány hallgatót azok közül is behívtunk, akik mindkét alkalommal 5-ös szinten teljesítettek. Akik nem mindkét alkalommal 5-ös szinten teljesítettek, az általában vagy azt jelentette, hogy a félév során szintváltás történt, vagy pedig azt, hogy a hallgató mindkét alkalommal 3. szinten írta meg a tesztet. A szintváltás mindkét irányba megjelent. Ezekről a későbbiekben írunk. Először a BSc-s diákokkal végzett interjúk tapasztalatait írjuk le. Mindenkinek az alábbi két kérdést tettük föl:

1. feladat: *Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?*
2. feladat: *Igaz-e, hogy minden háromszögnek létezik köréírt köre?*

Elsősorban az első kérdésre adott reakciókra voltunk kíváncsiak. A válaszok minőségéből egyértelműen lehet következtetni a hallgató Van Hiele szintjére. Elsősorban azt szeretttük volna megtudni, hogy:

1. Megadja-e a helyes választ (ez mindenkinek sikerült).
2. Felmerül-e benne a bizonyítás igénye (ezt egy egyszerű miért kérdéssel teszteltük).

3. Látja-e, hogy a bizonyítás két részből áll.
4. Ad-e egy eljárást arra, hogy hogyan vette fel a két párhuzamos egyenest.
5. Visszavezeti-e a problémát egy másik problémára.
6. Visszavezeti a problémát az axiómákig.

Azt gondoljuk, hogy a 4. Van Hiele szinthez az 5. pontig el kell jutni. Számítottunk arra, hogy sokan nem jutnak el a 2. pontig, ezért, hogy ezeknek az interjú alanyoknak ne legyen kudarcélménye, feltettük a második kérdést is. Sejtettük, hogy erre a kérdésre jól fognak válaszolni a hallgatók, ugyanis ez a kérdés többek közt a matematika érettségi tételek között is szerepel. A teljesség kedvéért ebben a dolgozatban nem csak összefoglaltuk az interjúk során tapasztaltakat, hanem néhányat pontosan le is írtunk.

5.3.1 Példák alapszakos interjúkra

Köszönés és leültetés után fölítettük az 1. kérdést. (*Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?*) A diákok általában gyanakvóan néztek, keresték a csapdát. Megmondtuk nekik, hogy nem arra vagyunk kíváncsiak, hogy tudják-e a helyes választ, hanem a válaszadás közbeni reakcióikat figyeljük. A táblára felrajzoltunk egy egyenest és tőle távolabb egy d hosszú szakaszt, majd megkezdődött a feladatról való beszélgetés.

-Mi a feladat megoldása?

-Hát két egyenes.

-Rajzolja be, hogy melyik két egyenes. (A hallgató odament a táblához és felrajzolt két látszólag párhuzamos egyenest.)

-És miért pont ez a két egyenes? Most elegendő nekünk az, ha csak az egyik egyenesről beszél, látjuk, hogy a másikonál ugyanaz a helyzet.

-Mert az egyenest azt úgy kapjuk, hogy merőlegest bocsátunk az eredetire, felmérünk d távolságot, ami megad nekünk egy pontot és ebben a pontban merőlegest bocsátunk az előbbi egyenesre.

-És hogyan bizonyítaná be, hogy ez az egyenes a válasz?

-Azt kell megmutatni, hogy az egyenes minden pontja jó, és más pont nem jó.

-És azt hogy mutatná meg?

-Felveszek az egyenesen egy tetszőleges pontot (közben rajzolt) és ebből a pontból merőleget bocsátok az eredeti egyenesre (felrajzolta az ábrára a harmadik derékszöget is). És akkor ez egy téglalap, tehát a szemben lévő oldalai megegyeznek. (Itt már tudtuk, hogy az interjúalany a 4-5. szinten van, de folytattuk a kérdezgetést.)

-Honnan tudja, hogy ez téglalap?

-Onnan, hogy négy derékszöge van.

-Én csak hármát látok.

-De akkor a 4. is derékszög.

-Miért?

-Mert egy négyszög belső szögeinek az összege 360° .

-Ez miért igaz?

-Húzzunk be egy átlót, és az a két háromszög egybevágó.

-Honnan tudja, hogy ez a két háromszög egybevágó?

-Hát mert mindkettőnek van egy szöge, ami derékszög, és ezen felül még egy szöge, ami megegyezik, és egy oldaluk pedig közös.

-És miért egyenlőek azok a szögek?

-Mert váltószögek.

-Miért?

-Mert az ábra szimmetrikus.

Itt megköszöntük a részvételt és elköszöntünk.

A válaszadók közül többen eljutottak a téglalap felrajzolásáig, és ettől a ponttól több eltérő bizonyítást is adtak. Volt, aki a négyszög szögeinek összegét úgy indokolta, hogy felosztotta azt két háromszögre és azt mondta, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180° . Ilyenkor megkérdeztük, hogy ezt honnan tudja. Válaszként felrajzolt egy háromszöget a

táblára, melynek egyik oldalegyenesét a vele szemben található csúcsba tolta el és meghosszabbította a többi oldalegyenest is. Felhasználva, hogy az eltolás szögtartó és hogy metsző egyenesek metszéspontjában keletkező szemközti szögek egyenlő nagyságúak belátta, hogy a háromszög szögeinek összege 180° , azaz a klasszikus bizonyítást mondta el. Mi itt csak arra figyeltünk, hogy a megfelelő résznél valóban kimondja-e a párhuzamossági axiómát, vagy legalábbis utal-e rá. Olyan is volt, aki berajzolta az oldalak felezőpontjait és megmutatta, hogy az ábra (négyyszög) szimmetrikus. Továbbá interjúztattunk olyan hallgatót is, aki ezek között az állítások között körbe-körbe járt a beszélgetés alatt.

Előfordult olyan hallgató is, aki másképp adta meg az egyenest: az eredeti egyenesen kijelölt két különböző pontot, merőlegest bocsájtott a két pontban az eredeti egyenesre, felmért d - d távolságot, majd az így kapott pontokra illesztett egyenest. Majd azt mondta, hogy ez az egyenes párhuzamos az eredetivel.

-Mit jelent az, hogy párhuzamos?

-Hogy nem metszik egymást.

(Ilyenkor úgy rajzoltuk az ábrát, hogy valahol távol a felrajzolt egyenes elmetszi az eredeti egyenest.)

-Ilyen nem lehet.

-Miért? (Itt kicsit többet gondolkozott a tanuló, de ráértett arra, hogy a kapásból felmerülő válaszok nem lennének helyénvalóak.)

Rövid gondolkodás után azt válaszolta, hogy szimmetriai okok miatt a túloldalon is lenne egy metszéspont. Két egyenesnek pedig nem lehet két metszéspontja, hacsak nem egyeznek meg.

Akadt olyan matematika BSc-s hallgató is aki kevésbé mintaszerűen válaszolt a kérdésre. Bemutatunk egy ilyen típusú interjút is:

- Hát 2 egyenes.

- Melyik kettő?

- Hát ez meg ez (felrajzolta a táblára).

- És miért az?

- *Hát mert ez az egyenes.*

- *De hogy kapta meg ezt az egyenest.*

(Akkor általában ő is megadta jól az eljárást, amivel az egyenest felvette.)

- *És miért ezek azok a pontok?*

- *Mert ezek vannak rajta az egyenesen.*

Ilyenkor gyorsan váltottunk és megkérdeztük, hogy van-e minden háromszögnek köréírt köre.

Olyan hallgatóval is beszélgettünk, aki szintén az eredeti egyenesen kijelölt két különböző pontot, merőlegest bocsájtott a két pontban az eredeti egyenesre, felmért d - d távolságot, majd az így kapott pontokra illesztett egyenest és innen nem jutott tovább. Innen kicsit körülményesebb is az általunk ismert bizonyítás. Ezt az is mutatja, hogy számos 5. szintű hallgató is először így vette fel az egyenest, majd amikor megkérdeztük, hogy ennek az egyenesnek miért jó minden pontja, akkor hirtelen taktikát váltott, másképp vette fel az egyenest, mert látta, hogy az a módszer célravezetőbb.

Egy hallgató kivételével kis rávezetés után mindenki tudta, hogy igen, létezik minden háromszögnek köréírt köre és ez az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Minden alkalommal lerajzoltuk úgy a három egyenest, hogy nem egy pontban metszik egymást. Ekkor mondták, hogy ez lehetetlen, ezek egy pontban metszik egymást és sikerült indokolniuk is. Érdekesség, hogy egy hallgató úgy bizonyította ezt be, hogy rajzolt egy háromszöget, köré egy nagy kört és annak a sugarát kezdte el csökkenteni.

5.3.2 Példák tanárszakos interjúkra

A tanárszakosok, akiket később teszteltünk, abban különböznek a matematika BSc szakosoktól, hogy nekik részben más a tananyag: náluk nagyobb hangsúlyt kap az elemi geometria (hiszen később a középiskolában is azt kell tanítaniuk), ezért az általuk tanult anyagrész közelebb áll az Usiskin-féle teszt kérdéseinek a szelleméhez. Ugyanakkor kevesebb matematikát tanulnak, mint az alapszakos hallgatók. Az a néhány interjúztatott hallgató, aki 5. szinten volt félév elején és félév végén is, az a válaszait másképp fogalmazta meg, mint az alapszakos hallgatók. Például az egyikük azt mondta, hogy az egyenest az eredeti eltolásával

kapjuk meg. A BSc-s diákokkal készített interjúk tapasztalatai alapján innen már nem kérdeztünk többet...

A tanárszakosoknál a 2. kérdés az alapszakosakkal ellentétben az volt, hogy van-e minden háromszögnek beírt köre. A harminckét válaszolóból négy azt mondta, hogy igen, huszonnyolc pedig azt, hogy nem mindig. Voltak olyan interjúalanyok, akiknek miután nem sikerült bebizonyítaniuk, hogy minden háromszögnek van beírható köre, feltettük azt a kérdést, hogy van-e minden háromszögnek köréírt köre. A hallgatók közül volt olyan, aki miután ezt megoldotta, be tudta látni a beírt körre vonatkozó tételt is.

Alább egy olyan hallgató válaszaiból idézünk, aki az első alkalommal 5-ös, második alkalommal 3-as szintet ért el a teszten, viszont az interjú során kétséget kizáróan meg tudtuk állapítani, hogy valójában csak 3-as szinten van.

- *Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?*
- *Tehát van egy egyenes, nevezzük e -nek, és egy d távolság, vagyis egy szakasz. (Közben rajzolja.) Ezt most szerkeszsem meg neked, vagy csak mondom el, hogy hol vannak azok a pontok?*
(Meggértük, hogy mondja meg, hol vannak a pontok. Ezt sikeresen megtette, majd ezután megpróbáltuk rávezetni arra, hogy ezt bizonyítsa is be.)
- *És ez biztos?*
- *Miért ne lenne az? Szerintem biztos.*
- *És miért biztos ez akkor?*
- *Az e egyeneshez kétféle párhuzamost szerkesztettünk, és mivel párhuzamosak, és ezt tudom, mert ugyanazt a... Öhm. Mivel kétféle helyen is felmértem, és a végpontokat kötöttem össze, ezért biztos, hogy párhuzamost kaptam, mert hogy bármelyik következő ponton néznék egy merőleget, akkor az is ugyanúgy d távolságra lenne.*
- *És miért lenne az is?*
- *Mert párhuzamos.*
- *És nem lehetne például úgy, hogy: (ekkor összekötöttük a két kijelölt pontot egy olyan görbével, ami nem d távolságra volt e -től minden pontban).*
- *Ez nem egyenes. Nem tudom mire vagy kíváncsi most még.*
- *Be tudnád-e látni, bármelyik pontról, hogy ezek jók, vagyis hogy ezek mind d távolságra vannak?*

- *Szerintem nem tudnám belátni, mármint most ide tudnék húzni, de ez nem számítana belátásnak...*

Ezután rögtön áttértünk a második feladatra.

Volt olyan 3-as szintű hallgató, aki több alkalommal is az általa rajzolt ábrára igyekezett támaszkodni.

- *(Mikor már a második kérdés bizonyításán próbálkozott.)*
- *Várjál, rajzolok egy jobbat, hátha kitalálok tőle valami okosat.*
- *Jó, és akkor egyáltalán létezik ez a metszéspont? Kettő metszéspontját ugye mindig ki tudjuk választani, de a harmadik biztos, hogy ugyanott metszi őket?*
- *Szerintem mindig metszik egymást. Várj, most rajzolok egy nagyon absztraktat. Hát, ebből nem látok sokat... Erre nem tudok biztosat mondani, de ha kéne, tuti azt mondanám, hogy metszik.*

A 4. szint finomításának motivációját tán a következő példa is kellően alátámasztja, hiszen lényegi különbség van például a bizonyítási igény megjelenése, és a különböző nehézségű bizonyítások elvégzése között, valamint abban is jelentős különbségek mutatkoznak, hogy a hallgatók milyen bonyolultságú állításokra vezetik vissza a kérdést a bizonyítás során.

(Megkérdeztük azt is, hogy minden háromszögnek van-e köréírható köre. A hallgató eljutott addig, hogy a köréírható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.)

- *(...) És most megint meg fogod kérdezni, hogy ezek minden esetben metszik egymást? Mert arra nem tudok válaszolni, de mivel van mindegyik háromszög minden oldalának szakaszfelező merőlegese, ezek pedig egy pontban metszik egymást - ezt nem tudom bizonyítani, - akkor biztos, hogy van köréírható körük is, az összesnek.*

A bizonyítási képességek hiányosságaira is sok esetben akadt példa.

(Az első a korábban már hivatkozott interjú folytatásában.)

- *Mert arra nem tudok válaszolni, de mivel van mindegyik háromszög minden oldalának szakaszfelező merőlegese, ezek pedig egy pontban metszik egymást - ezt nem tudom bizonyítani, - akkor biztos, hogy van köréírható körük is, az összesnek.*

- *Mostmár akkor tényleg csak az van hátra, hogy ezek egy pontra illeszkednek. Próbáld meg, aztán legfeljebb megyünk tovább, ha nem megy, nem muszáj.*
- *Gondolkodom. De akkor ezt mostmár feltehetem, hogy van köréírható köre, vagy ezt csak akkor tehetem fel, hogyha ezt már bebizonyítottuk?*

Valamint sok esetben pont a bizonyítási igényről világlott ki, hogy nem túl erős, ha van.

- *Van-e minden háromszögnek beírt köre?*
- *Van.*
- *És miért?*
- *Mert a középpontja a (...) szögfelezők metszete.*
- *És ez miért igaz?*
- *Mert ezt tanultuk az iskolában.*

Erre másik példa:

- *(Miután nem sikerült a beírható kör meglétét bizonyítani egy másik hallgatónak:)*
- *Van-e minden háromszögnek köré írható köre?*
- *Van.*
- *És miért?*
- *Mert az oldalflező merőlegesek mindig metszik egymást, egy pontban.*
- *Miért?*
- *Nem tudom, mert így működik a matek.*

(Ezt kimondva kis szünet után a hallgató megadta a klasszikus bizonyítást, két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helyével, „Ja, igen, ez volt a bizonyítás...” és miután ezt megoldotta, a beírt körre vonatkozó tételt is be tudta bizonyítani, azonban kijelenthető, hogy az igényt csak erős külső motiválásra lehetett felszínre hozni.)

Az elmélet kimondja, hogy az a hallgató, aki egyszer megszerzett egy adott Van Hiele szintet, az azt meg is tartja, illetve csak abban az esetben történhet szemléletfejlődés, ha az oktató és a hallgató közti kommunikáció megfelelő. Tehát az elmélet azt sugallja, hogy az év elején 3. szinten teljesítő hallgató a félév végén, a geometriakurzus ellenére sem vált szintet, ugyanis az egyetemi oktató által alkalmazott nyelv szintje magasabb az övéénél: egy egyetemen matematikát oktató tanár minimum 4. szintet vár el a hallgatóságtól. Ezzel szemben 112 tanulóból volt hét olyan, aki az első fordulóban 3., majd a második fordulóban 5. szinten teljesített. Az interjúk során viszont kiderült, hogy 3. szinten állnak mind a heten. Ennek a

jelenségnek a háttérében az Edubase nevezetű online program áll. A tanárszakosoknál ugyanis már nem papír alapon, hanem a program segítségével végeztük a tesztelést, ami sajnálatos módon a kitöltést követően megmutatta az elrontott válaszokat, és azok helyes megoldását is. Így a diákok közül voltak olyanok (nem sokan), akik emlékeztek, hogy előző alkalommal mit rontottak el, és ez alapján tudták javítani az eredményüket. Ahogyan azt korábban említettük, az elmélet az 5. szintről való visszalépést sem engedné, ennek ellenére voltak olyan tanulók, akik bár 5. szintet értek el az első teszten, a másodikon 3. szinten teljesítettek. A teszt tesztelését követően, kiderült, hogy ők azon kevés emberek közé tartoztak, akik igen jó érzékkel tudtak tippelni, lehet véletlenül jól kitölteni egy tesztet.

Az interjúkból az derült ki, hogy mindenki, aki nem 5. szinten teljesített a teszten mindkét alkalommal, az valójában 3. szinten áll. Megállapítható tehát, hogy a Van Hiele teszt felfele torzít. Az interjúk eredményi alapján azt mondhatjuk, hogy a Van Hiele elmélet egyetemi szinten sem vezet ellentmondásra, azonban a szintek mérésére szolgáló teszt az 5. szinten megbukott. Ezenkívül pedig kiderült, hogy ugyanazt a tesztet kétszer nyugodtan ki lehet tölteni a hallgatókkal, nem (nagyon kevesen) fognak emlékezni a kérdésekre, főleg, ha nem kapnak visszajelzést a hibáikról.

5.4 Túl a Van Hiele szinteken

A Van Hiele elmélet kommunikációs része nem vezetett ellentmondásra az egyetemi kísérletünk alapján. A Van Hiele-ék által meghatározott szintek valóban egymásra épülnek, és a 4. szintig jól mérhetőek az Usiskin által létrehozott teszttel. Ami viszont nem igaz, az az, hogy ezek a geometria megértésének egyetlen lehetséges szintjei. Az első három szint csak alakzatokkal foglalkozik, viszont a geometria egyáltalán nem csak síkbeli alakzatokról szól, pláne nem csak a parallelogrammáról, hanem sok minden másról is. Az igaz, hogy léteznek olyan tipikus megértési szintek, amelyek egymásra épülnek és igaz rájuk a Van Hiele elmélet, de egészen biztosan fel lehet írni másféle szinteket is, amik nincsenek ellentétben a Van Hiele elmélettel. Azt gondoljuk, hogyha az egész geometriát kell a tesztnek lefednie, akkor nincs bizonyítva, hogy ez a teszt azt is méri. Nem tudjuk, hogy aki itt 5. szinten teljesít, az a geometria más területén, más értelmezésénél hogyan szerepelne.

Az Usiskinre hivatkozó cikkek alapján úgy tűnik, hogy 1980-ban ezt a tesztet egységesen jónak ítélték a világban. Azóta is használják, és működik, leszámítva egyetlen elemet, ami sok helyen, már magánál Usiskinnél is megemlítest nyer, kutatásunk során pedig

bebizonyosodott, ez pedig az 5. szint. Tapasztalataink azt mutatják, hogy még a matematikával komoly szinten foglalkozó egyetemistáknál sem jön elő triviálisan az 5. szint, azaz a más axióma rendszerben, és a más geometriában való gondolkodás és bizonyítás képessége. Ugyanakkor egyáltalán nem igaz, hogy tudni kell a mi geometriai rendszerünkben bizonyítani ahhoz, hogy valaki axiomatikusan gondolkodjon egy másikban. A teszten nem véletlenül tapasztaltuk, hogy 12 olyan hallgató is volt, aki teljesítette a 3. szintet és az 5. szintet is, de a 4. szint nem sikerült neki. Az 5. szint úgy gondoljuk, megbukott, mert hol bukhatna meg máshol, mint egy egyetem matematika szakán; és főleg azért, mert a világon nagyon kevesen jutnak el odáig, hogy lehetőségük legyen ilyen szinten gondolkodni. Ezt a szintet lehet, hogy be kéne illeszteni valahova, de az nem igaz, hogy lineárisan fejlődik és a 4. Van Hiele szint után következik, hanem ennek a szintnek a fejlődése párhuzamosan történik a matematikai érettséggel, és nem pedig a geometriai megértéssel.

Annak megvizsgálása érdekében, hogy egyáltalán milyen felépítések képzelhetőek el az 5. szint helyett, vagy az eddigi Van Hiele szintekkel párhuzamosan, először megpróbáltuk feltérképezni, és megtudni azt, hogy manapság mit értünk geometria alatt. 1957 illetve 1980 óta sokat változott a világ, és még ha ez a teszt meg is felel az akkori geometria szellemének, érdemes felülvizsgálni. Tehát fontos lenne először megtudni, hogy mit kell érteni a mai világban geometria alatt, majd pedig az alapján kéne tesztet készíteni. Megtettük az első lépéseket, megkérdeztük mi az a geometria. Három egyetemi geometria oktatót kérdeztünk meg arról, hogy ők mit értenek ma geometria alatt: Dr. Csikós Balázs habilitált egyetemi docenst, az ELTE TTK Geometria Tanszék vezetőjét, Dr. Naszódi Márton szintén habilitált egyetemi docenst és Dr. Muzsnay Zoltánt, habilitált egyetemi docenst, a Debreceni Egyetem TTK Geometria Tanszék vezetőjét.

Csikós Balázs a lineáris algebra és a geometria összekapcsolását tekinti kiemelkedően fontosnak. Azt, hogy a determinánsra gondolhatunk úgy, mint egy lineáris leképezésre a tér fölött, vagy például a mátrixszal való szorzásra tekinthetünk úgy, mint egyfajta transzformációra. Lényegesnek tartja azt is, hogy lássuk, hogy az algebrai egyenleteket össze lehet kapcsolni geometriai alakzatokkal. Erre egy kézenfekvő példa a lineáris programozás, ahol van sok-sok egyenlőtlenségből álló rendszer, és a maximalizálás a feladat: ilyenkor nekiállhatunk számolgatni, de valószínűleg egyszerűbben megoldható a feladat, ha látjuk, hogy az egyenlőtlenségekre úgy is gondolhatunk, mint félsíkokra vagy félterekre, és azoknak a metszetét keressük. Meg kell érteni a feladathoz kapcsolódó geometriai képet.

Naszódi Márton hasonlóképpen gondolkodik a geometriai szemléletről, megértésről.

Szerinte is az összefüggéseket kell látni: azt, hogy az alakzatokhoz kapcsolható algebrai egyenlet, és az, hogy valaki az algebrai egyenletet össze tudja kötni adott alakzat képével, az egy fontos képesség. Ne csak mint formális egyenletet lássa, hanem lássa, hogy geometriailag az milyen élőlény. Amikor például egy többváltozós függvénynek tanulja a diák az érintőjét, akkor lássa, hogy ott egy geometriai vektorfogalomról van szó, illetve egy érintősíkról.

Muzsnay Zoltán egy másik nézőpontot képvisel. Az előzőekkel ellentétben ő pont azokat a tulajdonságokat, mennyiségeket emelné ki, amelyek paraméterezéstől, koordináta-rendszerstől függetlenek. Ahogy Einstein is megfogalmazta, a fizikai törvények igazából geometriai tulajdonságok, és egy törvény nem függhet viszonyítási rendszerstől, koordináta-rendszerstől. Azokra a geometriai tulajdonságokra, összefüggésekre, jellemzőkre helyezné a hangsúlyt, amik nem függenek attól, hogy milyen segédeszközt használunk.

A célunk alkotni egy (vagy több) olyan tesztet, ami megfelel ezen szempontoknak, ennek az ismeretrendszernek, geometriai kultúrának. Ahogyan az interjúk alapján is láttuk, a geometria nagyon sokrétű, más területeken máson van a hangsúly, és éppen ezért nehéz lenne egy tesztben minden szempontot egyszerre figyelembe venni. Továbbá a fentiek túl szeretnénk egy térbeli tesztet is létrehozni az Usiskin-féle teszt mintájára, ugyanis azt többen hiányolják. Egy meggyőző érv a térbeli teszt megalkotása mellett az a tény, hogy a téri szemlélet szorosan összefügg a matematikai képességgel, ennek kiinduló pontja Dehaene hármaskódolás modellje (Dehaene 1992). Ezt nem úgy gondoltuk megtenni, hogy kitalálunk néhány kérdést és a teszt máris kész, hanem figyelembe vesszük, hogy mit mondanak a geometriaiak. Az ez alapján készített tesztet kitöltetjük, majd megnézzük, hogy standard vagy az Usiskin-féle tesztel megegyező eloszlást kapunk-e, megfelelő-e az elvárásoknak, módosítjuk, ha kell, és ha kész, akkor még több emberrel kitöltetjük. Igaz, ez egy nagyon hosszú folyamat, de a mai modern kutatómódszertan illetve pszichológia megkívánja. Mi ebben a dolgozatban csak néhány kérdést állítottunk össze. Amit át kell gondolni az az, hogy ezek az algebrai típusú, koordináta-rendszeres feladatok kiknek valók, kik azok, akiknek kiadhatók. Szemmel látható, hogy az új NAT nem követi ezen kérdések szemléletét (3), ugyanis nincs egy éve, hogy a kör egyenlete már nem része a tantervnek. Bár távolságot kell számolni a Pitagorasz-tétel alapján a NAT szerint, a kör egyenlete még sem tananyag. Kérdés az, hogy ezekkel a tesztkérdésekkel tényleg geometriai megértési szinteket mérünk-e, illetve azáltal, hogy nem követi a NAT-ot, a valóságtól elrugaszkodott-e vagy sem a tesztkezdemény. Azt gondoljuk, hogy ha egy országban kialakul egy követelményrendszer, az nem jelenti azt, hogy minden matematikai tartalom kellő formában és mértékben van felölve. Ha

megnézzük, hogy Németországban nem tanítanak számelméletet, viszont a deriválás a tananyag részét képezi, akkor észrevevessük, hogy az egyes országok nagyon különböző oktatási kultúrával rendelkezhetnek. Éppen ezért egyáltalán nem biztos, hogy mindenkinek ugyanaz a teszt való. Senki ne essen kétségbe, ha az ő diákjai nem írják meg jól akár ezt a tesztkezdeményt, akár az Usiskin-féle tesztet, mert nem kétségbevonható, hogy úgy kell tanítani a diákot, hogy egy Van Hiele teszten jól szerepeljen.

5.5 Javaslat tesztkérdésekre

Az alábbiakban a készülő tesztek pár lehetséges kérdésére közlünk példákat. A tesztkérdések között szerepelnek az algebrai összefüggéseket előtérbe hozó kérdések, valamint a „geometriaibb” szemléletet hangsúlyozó kérdések is.

Az alábbi kérdések mindegyike az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térre vonatkozik.

1. Adott két egyenes. Melyik állítás igaz az alábbi állítások közül a helyzetükre?

- (a) Mindig metszők.*
- (b) Mindig párhuzamosak.*
- (c) Mindig metszők vagy párhuzamosak.*
- (d) Nem mindig metszők vagy párhuzamosak.*
- (e) Vagy egy vagy nulla pontjuk közös.*

2. A kocka lapjainak síkjai részekre osztják a teret. Melyik hamis az alábbi állítások közül?

- (a) Nincs olyan térrész, ami tartalmaz egyenest.*
- (b) Van olyan térrész, ami nem tartalmaz félegyenest.*
- (c) Van olyan térrész, ami tartalmaz félegyenest.*
- (d) Nincs olyan egyenes, ami legalább öt térrészbe belemetsz.*
- (e) Egy kocka egy lapközéppontján átmenő egyenes legalább három térrészbe belemetsz.*

3. Legyen $u \in \mathbb{R}$ paraméter! Tekintsük az alábbi egyenletet: $(a - u)^2 - b^2 = 5$.

Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

- (a) Minden $a \in \mathbb{R}$ -hez létezik olyan $b \in \mathbb{R}$, mely kielégíti az egyenletet.
- (b) Van olyan u érték, amire a fenti egyenletnek nincs megoldása.
- (c) Minden u értékre végtelen sok olyan a, b számpár létezik, mely kielégíti az egyenletet.
- (d) Rögzített $b \in \mathbb{R}$ -hez végtelen sok $a \in \mathbb{R}$ érték létezik, amely kielégíti az egyenletet.
- (e) Minden $b \in \mathbb{R}$ -hez egyértelműen létezik $a \in \mathbb{R}$, mely kielégíti az egyenletet.

4. Legyen adott egy ABC derékszögű háromszög, befogói: $a, b \in \mathbb{Q}$, átfogója $c \in \mathbb{Q}$, területe T . Az ABC háromszögből középpontos nagyítással kapjuk az $A'B'C'$ háromszöget (oldalai: $a', b' \in \mathbb{Q}$, területe T' , m_c' a c' -höz tartozó magasság). Mely állítás igaz az alábbiak közül?

- (a) $a', b' \in \mathbb{Q}$, viszont c' nem mindig racionális.
- (b) $a', b', c' \in \mathbb{Q}$
- (c) $T' \in \mathbb{Q}$
- (d) $a', b' \in \mathbb{Q}$ vagy c' és $m_c' \in \mathbb{R}$.
- (e) a' és c' nem lehet egyszerre racionális.

5. Adott az $x^2 + y^2 = 7$ egyenlettel megadott pontok halmaza: H . Melyik állítás hamis az alábbiak közül?

- (a) H tartalmaz egyenest.
- (b) H -ba a tér minden egyenesbe belemetsz, melynek van olyan pontja, hogy x, y koordinátára $x^2 + y^2 < 7$ teljesül.
- (c) Van olyan egyenes, melynek minden x, y koordinátájára igaz, hogy $x^2 +$

$$y^2 = 7.$$

(d) A H halmaznak lehet pontosan egy közös pontja egy egyenessel.

6. $x^2 - 2x + y^2 - 2ay + z^2 + 6z = -10$ ahol $a \in \mathbb{R}$. Mely állítás(ok) hamis(ak) az alábbiak közül?

- (a) Minden a esetén van olyan x, y, z számhármass, amely kielégíti az egyenletet.
- (b) Van olyan a , amire végtelen sok megoldása van az egyenletnek.
- (c) Van olyan a , amire pontosan egy megoldása van az egyenletnek.
- (d) Minden z, a -ra van olyan x, y számpár, mely kielégíti az egyenletet.

7. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$I. \quad x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 6z = a \text{ ahol } a \in \mathbb{R}$$

$$II. \quad x + y + z = 0$$

Mely állítás(ok) igaz(ak) az alábbiak közül?

- (a) Minden a -ra van megoldása az egyenletrendszernek.
- (b) Minden x, y számpár esetén van olyan z, a , mely kielégíti az egyenletrendszert.
- (c) Minden a -ra végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.
- (a) Nincs mindig megoldása az egyenletrendszernek, de ha van, akkor végtelen sok megoldása van.

6. Összefoglalás

Dolgozatunkban a magyarországi matematika-és matematikatanár szakos hallgatók geometriai megértési szintjét vizsgáltuk a Van Hiele modell segítségével. A Van Hiele-elmélet tekintélye széles körben elismert a nemzetközi szakirodalomban, hasonlóan a rá alapuló mérés, amely 1982-es megalkotása óta a mai napig gyakorta alkalmazott. Azonban a teszt magasabb, egyetemi szinten való alkalmazhatóságának vizsgálata nemzetközi szintén is hiánypótló vállalkozás. Kutatásunk során az ELTE elsőéves matematika alapszakos valamint elsőéves matematika tanárszakos hallgatóival töltöttük ki az Usiskin-féle tesztet.

A tesztet a kísérletben résztvevő minden diák két alkalommal töltötte ki, egyszer a tavaszi félév elején, egyszer pedig ugyanazon félév végén. A két kitöltés között mind az alap- mind a tanárszakos hallgatók elvégezték első egyetemi geometriakurzusukat, az alapszakosok Geometria1, a tanárszakosok Bevezetés a geometriába címen. Korábban már megállapítottuk, hogy a NAT és a kerettanterv követelményei alapján egyértelműen behatárolható, hogy a diákok a középiskola évei folyamán mely szintek eléréséig kellene eljussanak, megvizsgáltuk és megállapítottuk azt is, hogy a tanulók valós teljesítményei azonban lényegesen ezen szintek alatt vannak. Ezek alapján a középiskolába belépő elvárt szint a 3., a kilépő pedig a 4., így az volt a feltételezésünk, hogy a felmérésünkben résztvevő matematika területén továbbtanuló hallgatók már mind legalább a 4. szinten vannak, a geometriakurzus elvégzése után pedig akár az 5. szintet is elérhetik.

A tesztek eredményei alapján azonban a 4. szinten csak elhanyagolható számú hallgató állt, a legtöbben a 3. vagy az 5. szintet érték el. Saját eredményeink is alátámasztották az Usiskin által és a szakirodalomban azóta is többször megfogalmazott kétséget arra vonatkozóan, hogy a teszt kérdései valóban jól mérik-e az 5. szintet. Erre további bizonyítékként szolgál az a tény, hogy a hallgatók között sok olyan volt, aki a 4. szintet nem érte el, viszont az 5. szint kérdéseire jól tudta a választ; ez pedig a szintek alapvető tulajdonságának, az egymásra épülésnek is ellentmond. A geometriakurzus elvégzése után pedig azt tapasztaltuk, hogy általánosan érdemi fejlődés a szintek alapján nem történt a tanulók geometriai megértésében, ennek okaként pedig a Van Hiele elmélet kommunikációs részével egybehangzóan azt feltételezzük, hogy az oktató által feltételezett hallgatói megértési szint magasabb, mint a diákok valós eredményei, hiszen az ismert elméletek alapján a tanítási folyamat akkor lehet sikeres, vagyis akkor járulhat hozzá eredményesen a tanuló gondolkodási és problémamegoldó készségének fejlesztéséhez, ha az oktató a hallgatók valós megértési szintjének megfelelően alakítja kommunikációját. A Van Hiele elmélet részét képezi az a megfontolás is, hogy a különböző szinten lévő egyének „különböző nyelvet beszélnek”, tehát nem értik meg, vagy nem fogadják el egy másik szinten lévő indoklásait. Ezáltal a feltételezett és a valós szintbeli különbségek kommunikációs akadályokhoz, majd a tanítási folyamat megghiúsításához vezethetnek.

Annak érdekében, hogy megállapíthassuk, valóban a NAT által elvárt 8.osztályos szinten van-e a matematika szakos hallgatók jelentős része, teszteltük a teszt eredményeit és a hallgatókkal interjúkat készítettünk. Megfigyelhettük, hogy minden olyan tanuló, aki nem teljesített mindkét alkalommal 5. szinten, valójában 3. szinten áll. Az interjúk eredményei

alapján azt mondhatjuk, hogy a Van Hiele elmélet egyetemi szinten sem vezet ellenmondásra, az elmélet kommunikációs vetülete is igazolódni látszik az egyetemisták és az egyetemi oktatók körében is, azonban az Usiskin-féle teszt az 5. szinten megbukott, általánosan pedig felfelé torzít.

Bár kutatásunk alátámasztotta, hogy az elmélet egyetemi szinten sem vezet ellentmondásra, az továbbra sem bizonyított, hogy a teszt a teljes geometriát lefedné. Úgy gondoljuk, hogy felállíthatók másfajta megértési szintek is, amelyek nincsenek ellentmondásban a Van Hiele-elmélettel. Egy ilyen teszt készítésének első lépéseként megkezdtuk feltérképezni, egyáltalán mit is értünk manapság geometrián. Első körben két geometria tanszékvezető és egy habilitált docens véleményét kértük ki arról, hogy mi igazán fontos geometria területén; a válaszaikban egyrészt az algebra és a geometria összekapcsolásának képességét, másrészt a viszonyítási rendszertől független geometriai tulajdonságok, összefüggések vizsgálatát emelték ki. Meggyőződésünk szerint ez két különböző irányzat, amelyek nem feltétlenül épülnek egymásra, ezáltal a megfontolásokból kiindulva két különböző teszt megalkotása is lehetséges. Célunk ezen szempontoknak megfelelő, valamint az Usiskin-féle teszt alapján, egy annak szellemiségével rokon térbeli teszt megalkotása. Tudjuk, hogy a kész tesztek elérése egy rendkívül hosszú folyamat, azonban elindulva az úton már megtettük az első lépéseket felé, valamint a dolgozatban szerepel néhány előzetes javaslatunk is a lehetséges tesztkérdésekre.

6.1 Önálló munkánk összefoglalása

Miután megválasztottuk jelen dolgozatunk témáját, (a Van Hiele modell tesztelése magyar diákok körében) mivel Magyarországon a Van Hiele teszt alkalmazására nemigen volt példa, korábbi TDK dolgozatunk (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016) során megszereztük az eredeti Usiskin-féle teszt jogait, azt követően pedig a csapat aktívan részt vett a teszt magyarra fordításában, ezzel létrehoztuk tán az első magyar Van Hiele szintek mérésére szolgáló tesztet. Ezután leszűkítettük témánk és megfogalmaztuk a kutatási célt, – vagyis elsőként terveztük megállapítani a Van Hiele szinteket matematika szakos egyetemisták körében, valamint szintén hiánypótló módon a Van Hiele teszt tesztelése magasabb megértési szinteken volt célunk – majd megterveztük magát a kutatást.

Először, 2016 tavaszi félévének elején és végén 65 az ELTE matematika alapszakján hallgató diákkal kitöltettük a tesztet, majd 2018 tavaszi félévének elején és végén ezt

megismételtük ű 51 tanárszakos hallgató körében is. A teszteket az alapszakos hallgatókkal papír alapon, míg a tanárszakosokkal az Edubase online rendszer segítségével töltöttük ki. Értékeltek a válaszokat, ezek alapján megállapítottuk a diákok teszt szerinti Van Hiele szintjét. Ezután a kapott adatokat összevetettük és elemeztük, ezek alapján pedig megállapítottuk a teszt kritikus részét.

Miután értékeltük a teszt eredményeit, továbbra is fenntartottuk a kapcsolatot a kutatásban részt vevő hallgatókkal, a teszteken elért eredmények alapján kiválasztottuk az interjúk alanyait. Megfogalmaztuk az interjúkérdéseket, ezt követően pedig levezettük az interjúkat. A hallgatók válaszaiból megállapítottuk a hallgatók valós Van Hiele szintjét, és kiemeltük az interjúk lényegi mozzanatait. Összevetettük az interjúk eredményeit a teszt eredményeivel, és ez alapján már bizonyítottan ki tudtuk jelteni, hogy a teszt nem méri jól az 5-ös szintet. Ennek orvoslására megfogalmazódott bennünk egy új teszt megalkotására való törekvés.

Megtettük az első lépéseket a teszt megalkotása felé, nagy szakmai tekintélyű geometereket kerestünk fel azzal a kérdéssel, hogy mi ma a geometria lényege. Mint ahogy a Van Hiele elmélet felállítása és Usiskin tesztjének megalkotása óta a világ is rengeteget változott, ugyanúgy mára a geometria lényege sem egyezik meg azzal, ami hatvan vagy harminc évvel ezelőtt volt, így az új teszt szakmai megalapozottságához valóban elengedhetetlen ez a kérdés. A geometerek javaslatain elindulva megkezdtek az új teszt tervezését, ezek alapján alkottunk meg pár lehetséges tesztfeladatot.

A dolgozat megírásáig kutatásunk eredményeit a következő helyeken ismertettük:

1. Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Budapest, 2017.: A geometriai szemléletmód fejlődése. (Muzsnay Anna, Szabó Csaba)
2. Előadás tartása meghívott előadóként: Széchenyi István Egyetem Alkalmazott Matematika Tanszék, Győr, 2017.: A geometriai szemlélet fejlődése és nemfejlődése az egyetemen. (Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szabó Csaba, Szeibert Janka)
3. Előadás tartása meghívott előadóként: Pavlov Jozef Safárik University, Kassa, 2017.: Students understanding geometry on high-school and university levels. (Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szabó Csaba, Szeibert Janka)

7. Hivatkozások

- Bruner, Jerome Seymour 1966. *Toward a Theory of Instruction*. Mass.: Belkapp Press. Cambridge.
- Bruner, Jerome Seymour 1986. *Actual Minds, Possible Worlds*. MA: Harvard University Press. Cambridge.
- Bruner, Jerome Seymour 1990. *Acts of Meaning*. MA: Harvard University Press. Cambridge.
- Bursics Anna – Fehér Ágnes Csenge – Muzsnay Anna 2016. *Geometriai szemléletfejlődés a magyar középiskolákban*. TDK dolgozat
- Chew, Cheng Meng 2009. Enhancing Students' Level of Geometric Thinking through Van Hiele's Phase-based Learning. *Indian Journal of Science and Technology*. U. Science Malaysia.
- Chong, L. H. 2001. *Pembelajaran geometri menggunakan perisian GSP dak kaitannya dengan tahap pemikiran Van Hiele dalam geometri*. Unpublished master's thesis. Universiti Malaya. Kuala Lumpur.
- Csányi Petra – Pozsonyi Enikő – Szabó Zsanett 2014. *A számelmélet oktatásának hatékonysága általános- és középiskolában*. TDK dolgozat
- Dehaene, Stanislas 1992. Varieties of numerical abilities. *Cognition*,
- Grigoriadou, Olga 2012. *Reasoning in geometry How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof*. Msc Thesis. U. of Amsterdam
- Györy Ákos: *Van Hiele levels of gifted Hungariam pupils* (manuscript)
- Herendiné Kónya Eszter 2003. A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei. *Iskolakultúra*. Debreceni Egyetem
- Jones, Keith 2002. Issues in the teaching and learning of geometry. In: Linda Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics*. London, Routledge

- Kospentaris, George – Spyrou Panayiotis 2008. Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-descriptive level. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. Strasbourg.
- Kovács Veronika – Palotay Dorka 2012. *Ez is hungaricum - A modern tudomány és az oktatás kapcsolata*. TDK dolgozat
- N. Kollár Katalin – Szabó Éva 2004. *Pedagógia Pszichológusoknak*. Osiris Kiadó. Budapest.
- Rafidah Mohd Nor 2003. *Mengenalpasti tahap pemahaman pelajar sekolah menengah mengenai konsep geometri berdasarkan kepada teori van Hiele*. Unpublished master's thesis, Universiti Kebangsaan Malaysia. Bangi.
- Selkirk, C. H 2011. An investigation into the level of understanding of two-dimensional shapes among learners at the end of the Intermediate Phase in a well-resourced former Model school in the Eastern Cape: A case study, M. Ed., U. of Fort Hare.
- Tay Bee Lian 2003. *A Van Hiele-based instruction and its impact on the geometry achievement on form one students*. Unpublished master's thesis. Universiti Malaya. Kuala Lumpur.
- Usiskin, Zalman 1982. Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. *Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project* Department of Education. University of Chicago. US.
- Vigotszkij, Lev Szemjonovics 1967. *Gondolkodás és beszéd*. Akadémiai Kiadó. Budapest
- Wilson, Mark 1990. Measuring a van Hiele Geometry Sequence: A Reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*
- Wang, Sasha 2011. *The van Hiele theory through the discursive lens: Prospective teachers' geometric discourses*. PhD dissertation. Michigan State University.
- Zachos, I. 1994. *Problem Solving in Euclidean Geometry in Greek Schools*, PhD dissertation, The U. of Leeds School of Education.

(1) Kerettanterv 5-8. osztály, 2012.

http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html

(2) Kerettanterv 9-12. osztály, 2012.

http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html

(3) *Nemzeti alaptanterv*, 2018.

https://www.oktatas2030.hu/wp-content/uploads/2018/08/a-nemzeti-alaptanterv-tervezete_2018.08.31.pdf

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

BERECZKY-ZÁMBÓ CSILLA GYÖNGYVÉR –
MUZSNAY ANNA – SZEIBERT JANKA

**MATEMATIKATANÁR-SZAKOS
HALLGATÓK PROBLÉMA-ALKOTÁSI
KÉPESSÉGEINEK FEJLESZTÉSE**

MATEMATIKA - FIZIKA ÉS MATEMATIKA-KÉMIA
OSZTATLAN TANÁRSZAK

TDK DOLGOZAT

Témavezetők:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék.....	2
1. Bevezetés.....	2
2. Kísérlet	7
3. Összefoglalás	10
3.1. A szerzők részvétele a kutatásban.	12
4. Irodalomjegyzék.....	12
5. Függelék.....	13
5.1. Algebra kurzusok tematikája.....	13
5.2. : 1. feladatsor.....	15
5.3. : 2. feladatsor.....	15
5.4. : 3. feladatsor.....	16

1. Bevezetés

„A tanulók matematikai fejlődése és a tanulási folyamat során alapvető, hogy ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő készségek kialakítása, valamint az ezeket megalapozó képességek fejlesztése.” (NAT, 2012)

Dolgozatunk témája a matematikatanár szakos hallgatók probléma-felvetési, probléma-alkotási képességének vizsgálata. A problémafelvetés, ahogy láttuk, mint kompetencia megjelenik a Nemzeti Alaptanterv követelményei között, elsősorban, mint a valós életben megjelenő probléma egyszerűsítése egy megoldható formára, amihez hozzá tartozik még annak ellenőrzése, hogy az így kapott eredmény alkalmazható-e a valódi feladat/probléma megoldására. Ha ez egy diáktól elvárando, akkor még inkább elvárando egy matematika tanártól. Különösen igaz ez amiatt, hogy a magyarországi matematikaoktatás köztudottan problémaközpontú, az általános- és középiskolai matematikaoktatás egyik központi célja a probléma-megoldási képesség fejlesztése.

A 2018-ban az EU által elsődlegesen megjelölt (Niss, 2015) (és a NAT-ban is szereplő) 8 matematikai kompetencia közül kettőt emelnénk ki, melyek a mi kutatásunk szempontjából a leginkább lényegesek. Ezek a kompetenciák a következők:

(3.) A matematikai problémamegoldás: felismerni, megfogalmazni és osztályozni a problémákat; önállóan alkotni problémákat; ellenőrizni, értékelni a probléma-megoldási folyamatot; stratégiákat/sejtéseket alkotni; megoldani különböző fajta problémákat (változatos kontextusban, a matematikán kívülieket is, nyílt végűeket is)

(4.) A matematikai modellalkotás: lefordítani a matematika nyelvére a különböző területekről vett problémákat; a modellen belül dolgozni; az eredményeket visszafordítani az eredeti kontextusba; megmutatni a különbséget az adott problémaszituáció és a matematikai modellje között.

A modellezési feladatok mind szöveges feladatok és a legtöbb szöveges feladatnak is van modellezési jellege. Ebben a cikkben problémafelvetésen elsősorban szöveges probléma-felvetést és modellezéshez közel álló probléma felvetést értünk. A szöveges feladatoknak kiterjedt szakirodalma van (Blum & Niss 1991; Boaler 1993; Cooper & Dunne 2000, Palm 2006). Ezek a kutatások szöveges feladatokat többféle szempont alapján osztályozzák, pl. nyitottság, összetettség, szövegezés, beöltöztettség, érdeklődés, valóságtartalom, sztereotípiák, iskolán kívüli tartalom, kognitív tevékenység, megoldhatóság, különböző nemek feladatban elért eredményessége, fejlesztett kompetenciaterületek. (Bereczky-Zámbó, Muzsnay, Szeibert 2017). Mi ebben a kutatásban az összes ilyen szempontnak megfelelő feladatot figyelembe vesszük.

Egy fontos szempontja a problémafelvetésnek az, hogy új problémák keletkezzenek. (Singer, 2011.) A régi problémák, bár akkoriban megfeleltek a követelményeknek, elavulhatnak. Elavulhatnak a témáik miatt, elavulhatnak a matematikai tartalmuk miatt, és az is lehet, hogy bizonyos feladatok eleve nem jó feladatok voltak. Gyakran emlegetik Palm pékséges feladatát (Palm, 2006), amiben piskótatekercs térfogatára illetve eladási gyakoriságára kérdez rá. Ha belegondolunk, mennyire senkit nem érdekel az első feladat és senkinek nincs kedve kiszámolni...vagy eszünkbe jut a vicc, hogy csak egy matekfeladatban fordulhat elő, hogy valaki vesz 89 db görögdinnyét... Napjainkban válik elavulttá az a feladat, hogy hányféleképpen lehet kilyukasztani egy BKV – vonaljegyvet, hiszen alig van már néhány villamosvonal, ahol hagyományos 3x3-as lyukasztó működik. Problémákra tehát szükség van, és új probléma csak úgy születik, ha azt valaki felveti.

A problémafelvetés vizsgálata és gyakorlata új lendületet kapott, amikor 1994-ben Silver (Silver, 1994) összefoglalta a problémafelvetéssel foglalkozó addigi kutatásokat. Ezek alapján és segítségével többféleképpen osztályozza a problémafelvetés lehetséges módjait. Ezután a

cikk után számtalan olyan munka jelent meg, amelyeknek fő célja különböző taxonómiák, szempontrendszerek felállítása a problémafelvetés leírására, illetve a sztenderdizálható elnevezések bevezetésére való törekvés.

Ilyen például Silvertől magától az a cikk (Silver, 1995), amelyben az alapján osztályozza a probléma-felvetést, hogy probléma-megoldás előtt, alatt, vagy azt követően megy-e végbe. Stoyanova (1998) három kategóriát különböztet meg az alapján a szempont alapján, hogy mennyi és milyen jellegű megkötés van a kitűzendő problémát illetően. Az első kategória: új probléma felvetése egy már megoldott problémára alapozva, a második: kérdések feltevése megadott történet vagy feltételek alapján, a harmadik, legágabb kategória: probléma kitűzése tartalmi megkötés nélkül, a célközönségre fókuszálva, azaz úgy, hogy problémamegoldók egy bizonyos köre számára legyen érdekes az adott feladat.

Leendő tanárok és tanítók probléma-felvetési képességét is többen vizsgálták. Például Patáková (2013) a matematikatanárokat, mint problémakitűzőket három típusba sorolja: újonc, szakértő és specialista. A mi szempontunkból a szakértő a legfontosabb kategória. Azokat sorolja ide, akik gyakorlott problémafelvetők, de nem rendszeresen gyakorolják ezt a tevékenységet. A cikkből kiderül, hogy ilyen keveset találunk, pedig optimális esetben a tanárok többségének (legalább) ebbe a kategóriába kellene tartoznia. A szakértők legfőbb jellemzője ugyanis, hogy tevékenységük minden szempontból tudatos. Általában tudják előre, hogy kell kinéznie egy problémának, nagyon széles az eszköztáruk, magas mércéket állítanak maguk elé és azokat el is érik. Ezért kézenfekvő, hogy szakértő szintű feladatkészítők képzése lenne a cél a matematika tanárképzés során. A tanárok és leendő tanárok körében a probléma-felvetés képességét elsősorban tanítók és általános iskolai tanárok körében vizsgálták. Olsana & Pelczer (2015) az 1990 és 2012 között, tanító szakosok matematika módszertan óráin történő probléma-felvetésével kapcsolatos kutatásokról nyújt áttekintést. Ők például három kategóriába sorolták az általuk vizsgált cikkeket: problémafelvetés, mint a tanítási tevékenység szerves része, mint attól független tevékenység és mint kutatási eszköz a tanító szakosok tudásának és elképzeléseinek vizsgálatához. Az általános iskolai tanárnak készülő hallgatók probléma-felvetési képességeit tárgyalja Leung (1994). Úgynevezett probléma-láncok segítségével arra a megállapításra jutottak, hogy azok, akik magasabb pontszámot értek el a kísérlet során kitöltött matematika tudásmérő teszten, sokkal strukturáltabb, rendszerezettebb folyamat során alkottak feladatokat, mint matematikából gyengén teljesítő társaik. Olvashatunk elemzéseket arról is, hogy különböző, feladatmegoldásban és –kitűzésben rutinos matematikusok és tanárok feladatkészítési technológiái mennyire különböznek, illetve hogy milyen mértékű és jellegű

kreativitást kíván meg a versenyfeladatok megalkotása. Kontorovich és Koichu (2012) több esettanulmánya azt vizsgálja, hogy ezekben a feladatkitűzőkben milyen, egymással összefonódó kognitív és érzelmi folyamatok játszanak irányító szerepet a feladatkitűzés során, például min múlik, hogy egy feladatkitűzőben egy feladat kitűzésekor megjelenik-e a felfedezés vagy az újdonság érzése. Egyik esettanulmányukban az interjú során azt mondja a tanulmány alanya, hogy ha kérnek tőle egy kitűzött feladatot, akkor az egyik kedvenc tételét felidézi és annak alkalmazására ír egy feladatot. Jó lenne, ha minden matematikatanár és feladatkitűző ezt ilyen könnyedséggel tudná csinálni, amihez elengedhetetlen a biztos szakmai tudás. A szaktárgyi tudás ugyanis erősen összefügg a tanári hatékonysággal. A számos lehetséges szempont közül Poulos (2017) a feladatkészítők pedagógiai célkitűzéseit vizsgálja kutatásai során. Eredménye szerint négy, szorosan összefüggő pontban fogalmazhatók meg ezek a célok: Az első: lehetőséget adni a diákoknak igazi, mély matematika tanulására. A második: megerősíteni a diákok pozitív hozzáállását a matematikához. A harmadik: szellemi kihívást állítani a tanulók elé. A negyedik: meglepni a hallgatókat.

Christou et al (2005) a korábbi szakirodalmi szempontok összefésülésével, a problémamegoldás és problémafelvetés közben végzett tevékenységek osztályozása és vizsgálata alapján dolgozta ki empirikus taxonómiáját. A taxonómia magába foglalta a következőket: mennyiségekre vonatkozó információk kiválasztása és kezelése, mennyiségekre vonatkozó információk megértése jelentés társításával, mennyiségre vonatkozó információk más formára való „fordítása”.

Kognitív szempontból is többféleképpen osztályozták a problémafelvetést, például a felhasználandó matematikai számolások mélysége szerint (Cai,1995), illetve a tanár által megadandó reprezentációk szerint. (Cai, 2005). Ide tartozik még a problémafelvetés országonként különböző kulturális háttere, amelyet vizsgáltak Kínában és Amerikában (Cai & Lester, 2005), Japánban (Hashimoto & Sawada, 1984) és Finnországban (Pehkonen, 1995). (Singer et al, 2011) Törökországi kutatások például azt mutatják, hogy a leendő tanárok általában szokványos problémákat tűznek ki. Újítani nem mernek és attól is tartanak, hogy nem tudják megoldani a saját maguk által kitűzött problémákat. (Lavy & Shriki, 2007)

Látható, hogy sokan foglalkoztak a problémafelvetéssel, és ahányan voltak, annyiféleképpen tették ezt. Más-más szempontokat vettek figyelembe, amik nehezen fűzhetők össze egy nagy, összefoglaló képpé és rendszerré. Egy egységes nyelvezet megfogalmazását tűzi ki célul (Kontorovich & Koichu, 2012) ahol arra dolgoznak ki egy szempontrendszert, hogy milyen

alapon lehetne kidolgozni a problémafelvetés módszertanát. Mi ehhez a kutatáshoz szeretnénk hozzájárulni egy új megközelítéssel.

A magyarországi feladatcultúra magas és szerteágazó, a matematikatanítás problémaközpontú. A magyarországi feladatcultúra erősségét jelzi a számtalan matematika-verseny, amelyeken évente több ezer diák vesz részt. Nem csoda tehát, hogy a magyarországi problémafelvetésre a fenti osztályozások egyike sem megfelelő, mert vagy túl egyoldalú, vagy túl általános. Mi azt próbáltuk megvizsgálni, hogy (Kontorovich & Koichu, 2009)-hoz hasonló erős szakmai háttérrel (Patáková, 2013) szerinti kategóriák alapján legalább szakértő kategóriában (Poulos, 2017) szempontjait tekintetbe véve képesek-e a magyarországi tanárszakos hallgatók problémát felvetni, figyelembe véve a magyarországi viszonyokat. A követelményrendszer elég erős.

Kísérletünkben az egyik fő vizsgált szempont az egyetemi tudás alkalmazása volt: tudnak-e az egyetemi tudás felhasználásával feladatot készíteni. (Kontorovich & Koichu, 2012)-vel összhangban a problémafelvetést, mint a probléma-megoldás egy speciális fajtáját is vizsgálhatjuk, így az a kérdés, hogy a korábban megszerzett tudást erre a speciális típusú feladatra tudják-e alkalmazni. A második vizsgált szempont az volt, hogy tudnak-e feladatot készíteni rögzített témakörben, amelyet a kurzuson elhangzott feladatok és elméleti anyag adott meg és alapozott meg. A vizsgálat harmadik szempontja az volt, hogy tudnak-e különböző szintű feladatokat készíteni, ahol a szint mind korosztálybeli eltérést, mind a korosztályon belüli tudás- és képesség szerinti differenciálást jelenthetett. Röviden összegezve tehát kísérletünkben azt vizsgáltuk, hogy a magyarországi tanárszakos hallgatók és doktoranduszok képesek-e rögzített háttérrel, rögzített témakörben különböző szintű feladatokat készíteni.

A feladat a következő volt: készítsünk egy feladatsort az alábbiak alapján:

- rögzített elméleti tudás: az egyetemi kurzusok algebra és számelmélet anyaga
- rögzített témakör: lehetőleg kombinatorikai jellegű feladatok
- öt-hat választható különböző szint 5. osztályos gyakorló feladattól a 12. osztályos versenyfeladatig.

2. Kísérlet

A kutatás megvalósításának eszköze egy új kurzus meghirdetése volt a 2016/2017-es tanév tavaszi félévében „Az algebra alkalmazásai középiskolai feladatokban” címmel. A résztvevők közé elsősorban elit harmad- és negyedéves hallgatókat vártunk, illetve a Matematika Doktori Iskola Didaktikai Programjának doktoranduszait.

A kurzusnak, mint tanegységnek két fő célja volt. Az egyik a feladatmegoldásról, a másik a feladatkészítésről szólt.

Cél volt, hogy a résztvevők képessé váljanak annak eldöntésére, hogy egy adott középiskolai feladat – különös tekintettel az országos és nemzetközi versenyek nehéz feladataira – megoldható-e magasabb szintű algebrai eszközökkel. Amennyiben ilyen megoldás létezik, akkor azt meg is találják és a benne szereplő absztrakt algebrai gondolatokat le tudják fordítani „középiskolai nyelvre”. A kurzus második fő célja az volt, hogy a hallgatók maguk is tudjanak absztrakt algebrai eszközök segítségével olyan általános- és középiskolai problémákat felvetni, amelyek megoldásának hátterében absztrakt algebra áll, de megfelelően „lefordítva” anélkül is megoldható a feladat. Ez utóbbi volt a kísérletünk fő célja.

Irányított tematikájú feladatok készítését szerettük volna látni a résztvevőktől. Így magának a kurzusnak a kutatás szempontjából további fontos szerepe volt, hogy a tematikát megadja, és a diákok találkozzanak inspirációként és etalonként szolgáló feladatokkal. Emellett (főként versenyfeladatokból) helyben megoldandó feladatok és beadandó leckék is szerepeltek a kurzus anyagában.

A kurzus óráit három típusba sorolhatjuk.

- 1) tisztán szakmai órák, ahol a háttérrel és tematikát megadó egyetemi tananyag leadása történt meg.
- 2) szakmai alapokkal megoldható feladatok megoldásával töltött órák. Itt általában irányított feladatmegoldás történt, azaz adott volt a diákok számára, hogy milyen eszköztárat kell használniuk.
- 3) Versenyfeladatok megoldása

A kurzus az Algebra és Számelmélet 1-4. kurzusok anyagára épült. (Ld.: Függelék.). A kurzus szempontjából az Algebra és Számelmélet 1 és 3 kurzusok témakörei, illetve az Algebra és

Számelmélet 4 utolsó néhány témaköre voltak a legfontosabbak. A főbb témák, fogalmak, amelyek ismeretére a kurzus épített: dimenzió fogalma, generátor és független vektorrendszer, bázis, főként véges (prím) elemszámú test felett, többváltozós polinomok, számelméleti függvények, rend; és természetesen a lineáris egyenletrendszerek megoldása, a megoldások száma és az egyenletrendszer mátrixának rangja közötti kapcsolat, a megoldáshalmaz jellemzői. Fontos megjegyezni, hogy a bilineáris és kvadratikus alakok és a skalárszorzat nem szerepelnek a matematikatanár szak tematikájában.

A kurzust végül két PhD hallgató, öt negyedéves és négy harmadéves tanárszakos vette fel és egy Erasmus hallgató Újvidékről, Vajdaságból. Ez azért fontos, mert a PhD hallgatók már régebben végezték az egyetemet, a szakmai anyagot fel kellett frissíteniük. A szakmai anyag első- és harmadév elején szerepel, azaz a harmadéves hallgatóknak az algebrai rész a frissen szerzett tananyag, a negyedévesek pedig egy éve tanulták. A számelmélet és klasszikus algebra tananyagot a harmadévesek egy éve tanulták, a negyedévesek régebben. A tanulás óta eltelt idő jelenthet akár felejtést, akár ülepedést. A kurzus elsősorban a kísérlet céljait szolgálta, ezért a kurzus tematikájára a nagymértékű rugalmasság volt jellemző. A kurzus előadója kérésre bármilyen elméleti vagy gyakorlati kérdés, szakmai anyagot vagy feladatot újra elmagyarázott.

Kiindulásul a sor-és oszloptündéres feladat (Palotay & Pozsonyi, 2013), illetve a brazil matematikai olimpiai csapat egyik számelméleti feladatsora szolgált.

Mivel a kurzus célja eléggé összetett volt és új feladatok megalkotása is szerepelt a feladatok között, az osztályzási rendszert alaposan át kellett gondolni. Általában a magyar egyetemeken vagy két zárhelyi dolgozat, vagy egy vizsgajegy alapján kapnak jegyet a hallgatók. Egyik sem volt igazán jól alkalmazható a mi kurzusunk esetében: Nem lehet elvárni, hogy megadott idő alatt legyenek képesek a diákok feladatot alkotni, problémát felvetni. Az adott idő alatt lezajló vizsgák, dolgozatok magas szintre fejlesztett módszereket és begyakorlást követelnek. Egy otthon megírandó „zárhelyi” tűnt a legjobb megoldásnak, a következő: ahhoz, hogy jegyet szerezzen, a hallgátónak be kell adnia egy 4-7 feladatból álló feladatsort, amelyre az alábbiak közül az egyik igaz:

- minden feladat megoldása ugyanazon az ötleten alapul és minden feladat különböző szintű. Pl. általános iskola, gimnázium 9-10. o., gimnázium 11-12. o., gyakorlófeladat, versenyfeladat iskolai válogatóra, versenyfeladat országos verseny döntőjére.
- egy nehéz célfeladat (tetszőleges, de a feladatsort beadó hallgató által megadott korosztálynak), egy rávezető feladatsorral. Itt megengedtük egy létező nehéz

versenyfeladat használatát, rávezetőként pedig könnyebb vagy a probléma egy részét lefedő feladatokat kellett készíteni, amelyek megoldásai vagy a bennük szereplő ötletek segítenek a célfeladat megoldásában.

Mindkét típusú feladatsoron legalább három olyan feladatnak kellett szerepelnie, amit a szerző talált ki, nem más forrásból válogatta. Az utolsó opcióra azért volt szükség, mert a kísérlet előtt nem tudhattuk, hogy a kurzus résztvevői képesek-e egy megfelelő nehézségű feladat elkészítésére.

Mi most a fenti két típusba tartozó, nagyobb lélegzetvételi beadott feladatsorokkal foglalkozunk részletesebben.

„Nehéz lenne formalizálni, hogy mitől jó egy feladat. De ha már elkészült egy feladat, akkor az beszél magáért. Vagy maga ellen.” (Konstantinov, 1977).

Igaz ez a feladatsorokra is, amelyek között kiemelkedő a Függelék 2. feladatsora. Most mi mégis megmagyarázzuk, mitől jók ezek a feladatok. Nem csak azért jók, mert hasonló ötletet igényelnek, mint az órán elhangzott vezéranyag, hanem emellett fokozatosan nehezednek és lépésről lépésre vezetnek rá a célfeladatra. A kurzus tematikájába beilleszkedik a feladatsor, abból a szempontból is, hogy invariánsokat kell használni a megoldáshoz. Sőt, nem csak a megoldáshoz, hanem a feladat elkészítéséhez is – a kurzus célkitűzéseinek megfelelően. Ezek az invariánsok hasonlóak a kurzuson elhangzott invariánsokhoz, de készítésük túlmutat a kurzuson bemutatott technikákon. A finom történelmi-irodalmi utalás valószínűleg azért van jelen a célfeladatban, mert a szerzője matematika-történelem szakos hallgató.

Most megmutatunk két olyan feladatsort, amik nem feleltek meg a követelményeknek. A harmadévesek által beadott első beadott feladatsorok mind ilyenek voltak, de a kurzus hangulata és légköre annyira baráti és kreatív volt, hogy mindenki pozitív segítségnek fogta fel, ha csak annyit mondtunk, hogy ez a feladatsor „vidd haza és csináld újra” kategóriájú. A Függelékben található 3. feladatsor például egy ilyen feladatsor, amely egy jól ismert feladatra épül, a „szultán és börtönőr, meg a 100 rab” problémára. Ez valóban középiskolás számelméleti feladat, megoldható egyetemi tudás nélkül is. Sőt, a legelegánsabb a legegyszerűbb általános- vagy középiskolai eszközökkel (osztók párosítása) adható megoldás. Sokkal elegánsabb, mint a számelméleti függvényeket használó módszer, a feladatsor viszont az utóbbira vezet rá, ami felesleges és erőltetett. A hallgató által másodikként beadott feladatsor más témáról szólt és már minden követelménynek megfelelt.

A Függelék 1. feladatsora egy nehéz versenyfeladat megoldására vezet rá. Ezt a feladatsort egy doktorandusz adta be. A feladatsornak az a hiányossága, hogy az 1-2. feladatoknak csak szövegezésében van köze a célfeladathoz, a mögöttes matematikai tartalomban nem, míg az utolsó előtti feladatok olyan mértékben vezetnek rá a célfeladatra, hogy már nem jelent plusz lépést annak megoldása – azaz nem segítenek a megoldásban annak, aki nem tudja megoldani a célfeladatot magát. Aki pedig meg tudja oldani, annak nem lennének szükségesek.

Mind az órai tevékenységgel, mind az otthoni feladatsor-készítéssel kapcsolatban azt tapasztaltuk, hogy összefüggés van a hallgatók évfolyama és a teljesítményük között. Az ötödéves hallgatók, akik mind az 5 félév Algebra és Számelmélet kurzust teljesítették, az Algebra és Számelmélet 3-at már egy évvel korábban befejezték. Így az ő tudásuk sokat kophatott – másrészt viszont ülepedhetett is. A negyedévesek, akik frissen fejezték be az Algebra és Számelmélet 3-at, még friss tudással érkeztek – de nem is volt idő arra, hogy elmélyüljön, igazán összeálljon a fejükben a tanultak rendszere.

A tapasztalat az, hogy ha felejtettek is az ötödévesek, készüléssel ezt könnyen tudták ellensúlyozni, így az eltelt egy év inkább előnyösen hatott. Ugyanis akik frissen tanulták az Algebra és Számelmélet 3 tárgy anyagát, azok nem tudtak ahhoz kapcsolódó feladatot feladni, sőt megoldani sem. Ezek szerint az eltelt idő rövideségének negatív hatása volt erősebb, nem érkeztek még el a Gestalt állapotba, így nem tudták alkalmazni a tanultakat.

A doktoranduszok nem teljesítettek sem jobban, sem rosszabbul, mint a többi hallgató. Erősségük volt a forráskutatás, jó érzékkel találtak nehéz feladatokat, de például a fentebb említett 3. feladatsor is egy doktorandusz első (gyenge) próbálkozása, amit többszöri javítás követett.

3. Összefoglalás

Kutatásunkban a matematikatanár szakos hallgatók és doktoranduszok feladatkészítési, probléma-felvetési képességeit vizsgáltuk. A szakirodalom szellemének megfelelően kidolgoztunk egy szempontrendszert, ami a felsőbb szakmai háttérre, a különböző szintű feladatokra, a témaközpontúságra és a magyar feladatcultúrára alapul. A kísérlethez meghirdettünk egy kurzust az ELTE TTK felsőbbéves és doktorandusz hallgatói részére, amelynek végső célja a problémafelvetés ezen szempontok szerinti vizsgálata volt. A

kísérletben 11 elit hallgató vett részt. Megállapítható, hogy a szakmai háttérnek le kell ülepednie, mielőtt valaki annak a segítségével feladatot tud kitűzni. Az elkészített feladatok minden esetben az egy-másfél évvel azelőtt tanult tananyagra alapultak. Megállapítható, hogy a harmadévesek által benyújtott feladatsorok első próbálkozásra nem feleltek meg a kurzus követelményeinek, a második alkalommal azonban már igen. A felsőbbéves hallgatók feladatsorai minden szempont szerint jobban helyt álltak. A doktoranduszok inkább létező feladatokhoz készítettek rávezető feladatsort, amelyek több szempontból teljesítették, néhány szempontból nem teljesítették a feltételeket.

Azt gondoljuk, hogy a frissen szerzett tudás még nem elég alapos ahhoz, hogy egyből alkalmazzuk más környezetben, míg a leülepedett tudás használhatónak bizonyult. A doktoranduszok teljesítményére is próbáltunk magyarázatot keresni. Az egyik lehetőség az, hogy a tanári munkájuk alatt annyira kiestek az egyetemi matematikából, hogy a felsőbb tananyag segítségével nem tudtak új, nehéz feladatot kitalálni. Egy másik lehetséges eset az, hogy munkájuk során találkoztak olyan nehéz versenyfeladatokkal, amik megfelelték a kurzus követelményeinek, így kényelmesen adódott nekik, hogy a kurzus követelményeihez gyártsanak egy rávezető feladatsort. A bevezetőben felsorolt eredmények alapján azonban az a legvalószínűbb, hogy eddigi tanári munkájuk során nem készítettek elég sok feladatot, nem váltak szakértővé a Patákova-féle értelemben.

A negyedévesek által beadott feladatok azt jelzik, hogy a probléma-felvetési képesség valamikor megvan a leendő tanároknál. Ahhoz, hogy ezt a képességet megtartsuk, szinten tartsuk, ahhoz az eddigi kutatások alapján az szükséges, hogy a gyakorló tanárok, ha nem is gyakran, de rendszeresen készítsenek önállóan feladatot. Mind a harmad-, mind a negyedévesek által beadott feladatsor azt mutatja, hogy az egy éves távlatban felfrissített szakmai anyaggal már tudnak mit kezdeni a hallgatók. Az órai munka alapján megállapítottuk, hogy a doktoranduszok hétről hétre képesek felfrissíteni az elhalványult tudásukat. Minden alkalommal, amikor valami hiányosság kiderült egy órán, a következő alkalomra ők már fel tudták idézni a régen tanultakat. Az, hogy mégsem ilyen feladatsort küldtek be, annak praktikus okai vannak, ilyen módon könnyebben tudták a kurzust teljesíteni.

Összegzésül elmondhatjuk, hogy a kurzus keretében tapasztaltak alapján a hallgatók feladat-kitűzési képességeinek fejlesztése lehetséges, de nehéz feladat, emellett mindenképpen szükséges. Emellett fontos tanulság, hogy nem reális elvárás, hogy a hallgató feladatot tudjon frissen tanult egyetemi tudás alkalmazásával, annak ülepednie kell.

3.1. A szerzők részvétele a kutatásban.

A szerzők a kutatás teljes egészében részt vettek, többek közt maguk is résztvevői voltak a kurzusnak. A témából előadást tartottak a MIDK 2018 konferencián.

4. Irodalomjegyzék

- Nemzeti Alaptanterv (NAT), 2012 <http://ofi.hu/nemzeti-alaptanterv> (utoljára letöltve: 2019.01.01.)
- Niss, Mogens: Mathematical competencies and PISA, 2015, https://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9783319101200-c2.pdf?SGWID=0-0-45-1491757-p176885643 (utoljára letöltve: 2019.01.01.)
- Blum, Werner and Niss, Mogens: Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects. State, trends, and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, (1991), 37-68.
- Boaler, Jo. : The role of contexts in the mathematics classroom: do they make mathematics more "real"? For the Learning of Mathematics, 13(2), (1993) 12-17.
- Christou, Conastantinos, Mousoulides, Nicholas., Pittalis, Marios., Pitta-Pantazi, Demetra, Sriraman, Bharath Sriraman. An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149-158. , 2005.
- Cooper, Barry and Dunne, Máinéad: Assessing children's mathematical knowledge: social class, sex, and problem-solving. Open University Press, Buckingham, Philadelphia, 2000.
- Kontorovich, Igor, Koichu, Boris, Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 401-408).
- Kontorovich, Igor, Koichu, Boris Feeling of innovation in expert problem posing *Nordic Studies in Mathematics Education* (NOMAD) 17 (3-4), 199-212 2012.
- Lavy, I. and Shriki, A.: Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Eds: Woo, J.; Lew, H.; Park, K.; Seo, D.) 129-136 2007.
- Leung, Shuk-kwan S., On analyzing problem-posing processes: A study of prospective elementary teachers differing in mathematics knowledge. In J. P. Ponte, J. F. Matos.

(Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 168-175. Lisbon, 1994

- Olsana, H., Pelczer I., Review on Problem Posing in Teacher Education in: *A Collection of Problem Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference* Edz: S. Crespo) 469-492
- Palm, Torulf : Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), (2006) 42-47.
- Patáková, Eva: Teacher's problem posing in mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 93 (2013) 836-841
- Poulos, Andreas: A research on the creation of problems for mathematical competitions *The teaching of mathematics* 2017, Vol. XX, 1, pp. 26-36
- Pozsonyi Enikő, Palotay Dorka: Ha tudom, hogy miről van szó - Iskolai feladatok absztrakt algebrai háttérrel. TDK dolgozat, 2013.
<http://web.cs.elte.hu/~csaba/tdk/algebra.pdf> (utoljára megnyitva: 2019.01.08.)
- Silver, Edward A. : On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics* 14, 1 (February, 1994)
- Singer, Michaela; Ellerton, Nerida; Cai, Jinfa; Leung, Eddie C.K.. 2011. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 137-166. Ankara, Turkey: PME.
- Stoyanova, Elena: Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh, N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: a contemporary perspective*, (pp. 164-185). 1998

5. Függelék

5.1. Algebra kurzusok tematikája

forrás: www.cs.elte.hu/~csaba/bboard

- Algebra és Számelmélet 1. , 1. félév: Oszthatóság az egészek körében, irreducibilis és prímszámok, összetett számok, páros számok számelmélete. Maradékos osztás, Euklideszi algoritmus, kitüntetett közös osztó és legkisebb közös osztó, prímek és felbonthatatlanok közötti összefüggés. A Számelmélet Alaptétele, kanonikus alak. Kongruenciák, maradékosztályok, teljes és redukált maradékrendszerek. Számelméleti függvények: osztók száma, osztók összege, Euler-fv. Multiplikatívitas, formulák.

Lineáris kongruenciák és –kongruencia-rendszerek. Lineáris diofantikus egyenletek, oszthatósági szabályok (2,4,8,3,9,5,25,11). Euler-Fermat-tétel, Wilson-tétel. Nevezetes azonosságok (összegek és különbségek hatványai). Mersenne- és Fermat-számok. Tökéletes számok, Dirichlet-tétel (bizonyítás nélkül), végtelen sok $4k-1$ alakú prím van. Fermat-sejtés. Rend, tulajdonságai, osztók, hatvány rendje. Mersenne- és Fermat-számok osztói. A számelmélet híres problémái. Oszlopvektorok, mátrixok, összegük, szorzásuk, transzpozíció. Előjeles aldetermináns, kifejtés sor és oszlop szerint, inverz mátrix, bal- és jobb inverz.

- Algebra és Számelmélet 2., 2. félév: Komplex számok, polinomok. (A témák nem játszanak kiemelt szerepet a kísérletben, így nem fejtjük ki őket részletesen.)
- Algebra és Számelmélet 3, 5. félév: Permutációk. Szorzás, Inverz, paritás, előjel, felbontás ciklusokra. A rend és a paritás megállapítható a ciklusszerkezetből. Előjelek szorozhatósága. Determináns: definíció, tulajdonságok (linearitás, oszlopcsere, transzpozíció). Kiszámítás eliminálással. Vandermonde-determináns, determinánsok szorzástétele. Vektortér, altér, lineáris függetlenség, bázis, dimenzió. Altérak összegének dimenziója, direkt szorzat. Vektorok koordinátái adott bázis felett. Lineáris leképezések, transzformációk és műveletek leképezésekkel, lineáris leképezés mátrixa. Bázistranszformáció. Kép, mag, ezek dimenziója, rang, determináns. Térfogat és determináns kapcsolata. Lineáris transzformációk invertálhatósága, ekvivalens leírások. Nullosztók. Sor- és oszloprang egyenlősége. Szorzat rangja. Lineáris egyenlőségrendszerek és a rang. Cramer-szabály. Polinomosztás, euklideszi algoritmus és számelmélet alaptétele, irreducibilis polinomok . test felett. Kapcsolat a gyökök és a polinomok irreducibilitása között másod- harmad és magasabb fokú polinomokra. Irreducibilis polinomok leírása valós és komplex számtest felett. Sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus polinom, diagonalizálhatóság, transzformáció minimálpolinomja, Cayley-Hamilton-tétel. Jordan- féle normálalak (bizonyítás nélkül). Csoport fogalma, példák: mátrixok, szimmetriacsoport, kvaterniók. Hatványozás és tulajdonságai. Rend, ciklikus csoport, izomorfizmus. Részcsoport, mellékosztály, Lagrange-tétel. Permutációcsoportok. Orbit, stabilizátor, számolások. Cayley-tétel.
- Algebra és Számelmélet 4. , 6. félév: Testbővítés, hányadostest. Szerkeszthetőség. A fontosabb témaköröket a dolgozat szövegtörzsében felsoroltuk.
- Algebra és Számelmélet 5. , 7. félév: Gyűrűelmélet, véges testek. A 2. félévi kurzushoz hasonlóan most nem részletezzük.

5.2. : 1. feladatsor

1.1. Aladár és Boglárka kavicsokkal játszanak. 2017 kavicsot tesznek egy kupacba, ezután ebből felváltva elvesznek 1-3 kavicsot. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Kinek van nyerő stratégiája, ha Aladár kezd? Mi a nyerő stratégia?

1.2. Aladár és Boglárka változtatnak a szabályokon. Ezúttal a kezdő játékos (Aladár) mondhatja meg a kezdőlépés előtt, hogy hány kavicsot vehetnek el az adott játék-ban maximum. (A minimum továbbra is 1 kavics, nem mondhat 2016-nál nagyobb számot.) Milyen számokra lehet Aladárnak nyerő stratégiája?

1.3. Van-e 3 olyan négyzetszám, amelyek összege 8-cal osztható, ha közülük a) legfeljebb 2, b) legfeljebb 1, c) egyik sem osztható 8-cal.

1.4. Bizonyítsd be, hogy $6|(n^2 + 5)n$, ha n pozitív egész.

1.5. Adottak a számok 1-től n -ig, ahol n osztható 8-cal. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan párosítás, amelyben minden pár összege négyzetszám!

1.6. Az 1; 2;...; 2014^{2014} számok közül Aladár és Boglárka felváltva törölnek le egy számot (Aladár kezd), amíg csak két szám marad. Ha a megmaradó két szám összege négyzetszám, akkor Boglárka nyer, egyébként Aladár. Kinek van nyerő stratégiája?

(OKTV III. kategória /"spec. mat."/ döntő 2014.)

5.3. : 2. feladatsor

1. Egy négyzet négy sarkára számokat írok. Ezeket úgy változtathatom, hogy két szomszédos csúcshoz ugyanannyit adhatok hozzá (vagy vonhatok ki). Elérhető-e, hogy a négy csúcsban ugyanaz a szám legyen, ha kiindulásként rendre

a, 1, 0, 0, 0,

b, 1, 0, 1, 0 szerepeltek?

2. a, (*Állapotfüggvény feladatsor, összeállította Surányi László*) Egy asztal körül hatan ülnek, közülük kettő előtt egy-egy tányér van. A többiek előtt nincs tányér. A két „tányéros” ember között egy ember ül. Egy lépésben két szomszédos személy elé egy-egy újabb tányért helyezünk. Elérhető-e néhány lépéssel, hogy mindenki előtt ugyanannyi tányér legyen?

b, Mi a helyzet hét ember esetén? (A kiosztás és a szabályok nem változnak)

3. (Elemi matematika I feladatgyűjtemény) Most egy háromszög csúcsaihoz írok számokat.

Megengedett lépés, hogy az egyikből elveszek néhányat és a másik kettőhöz hozzáadok kétszer ennyit.

Elérhető-e, hogy a három szám egyenlő legyen, ha kiindulásként az

a, 5, 11, 14,

b, 11, 9, 5 szerepeltek?

4. Ödön, Richárd és Jenő zsetonokért kártyáznak. Minden kör vesztese ad 2 zsetont a tőle balra, 1 zsetont a tőle jobbra ülőnek. A játék kezdetén (hogy az esélyek nagyjából egyenlőek legyenek), a legfiatalabb Jenőnek 7, a középső Richárdnak 5, míg Ödönnek 3 zsetonja volt. Lehetséges-e, hogy a játék végén rendre 7, 4 és 4 zsetonnal álltak?

5. Ödön, Richárd és Jenő megváltoztatják a szabályokat. Minden kör végén a győztes kap 2 zsetont a tőle jobbra ülőtől, a tőle balra ülő pedig a bankból kap egyet. Ha kezdetben mindenkinek 20 zsetonja volt, elérhető-e, hogy néhány kör után 25, 29 és 33 zsetonjuk legyen?

Megoldás ötletek:

1. a, Paritás miatt nem lehetséges
b, Átlók összege
2. a, Valójában ez az 1/a feladat (a merőleges vektor a $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$)
b, megoldható
3. a, megoldható
b, mod 3, merőleges az $(1, 1, 1)$, középiskolásan: az összeg hárommal való oszthatósága nem változik
4. Nem, mert bár az összeg 7-tel vett maradéka nem változott, de a $4A+2B+C$ maradéka igen (és a $(4, 2, 1)$ is merőleges vektor)
5. Az $A-4B+3C$ 13-mal vett maradéka nem változik, ezért nem érhető el.

5.4. : 3. feladatsor

Azért választottam ezt a feladatot, mert általános iskolában is megoldható általános iskolai módszerekkel viszont ott egy nehezebb feladatnak számít.

Feladat: A Héttoronyban 100 rab sínylődik, celláik szép rendben sorakoznak egymás után. A szultán egy éjszaka elküldi egyik börtönőrt, hogy minden egyes cellán fordítsa el a zárat.

Csakhamar meggondolja magát, és megparancsolja, hogy minden második cella ajtaján újfent fordítsák el a zárat. Rögtön ezután egy harmadik őrt is elküld, hogy most minden harmadik cella zárján fordítson. Ez megy egészen hajnalig. Miután a századik börtönőrnek is parancsba adta, hogy a

századik cella ajtaján fordítsa el a zárat, a szultán végre álomba merül. Azok a rabok pedig, akik reggel cellájuk ajtaját nyitva találják, békében elmehetnek. Hányan is vannak ők?

Megoldás:

Mindegyik zár annyiszor fordul, ahány osztója van a cella sorszámának.

Azok fognak kiszabadulni, akik cellasorszámának páratlan számú osztója van.

Legyen n a cella sorszáma. n kanonikus alakja: $n = \prod p_i^{\alpha_i}$. n osztóinak száma: $\prod (\alpha_i + 1)$ Ez akkor lesz páratlan, ha a szorzat minden tényezője páratlan, azaz ha minden α_i páros. Így pont a négyzetszámokat kapjuk.

Tehát azok fognak kiszabadulni, akiknek a cellasorszáma négyzetszám. 1 és 100 között a négyzetszámok: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Azaz **10** rab mehet el.

Rávezető feladatok

Írd fel a következő számok kanonikus alakját (Vagy prímtényezős felbontását, attól függ, hogy éppen hányadikosok és hogy tanulták.)! 8, 26, 58, 100, 150

Igazak-e a következő állítások? Válaszodat indokold!

a. $2 \mid 65$ **b.** $3 \mid 129$ **c.** $6 \mid 288$ **d.** $15 \mid 95$

Hány osztója van a következő számoknak? 7, 16, 28, 242 Sorold fel mindet!

Kati mamának van 20 db cukorkája, melyet szétosztott az unokái között. Sikertült úgy szétosztania az összes cukorkát, hogy minden unoka ugyanannyi cukrot kapott. Hány unokája lehet Kati mamának?

Mond meg 1 és 100 között a legkisebb olyan számot, aminek 3 db osztója van és a legkisebbet, aminek 10 db osztója van!

Van 10 db korongom, melyeket az asztalon egymás mellé letettem egy sorba és megszámoztam őket 1-től 10-ig. A korongok egyik oldala piros, a másik kék és most épp mindegyik piros oldalával felfele van az asztalon. Fogadtam a testvéremmel, hogyha mindegyiket annyiszor fordítom meg, ahány osztója van a sorszámának, akkor kevesebb, mint 3 db korong lesz kék oldalával felfele. Nyertem?

Megoldások

1. $8 = 2^3$, $26 = 2 \cdot 13$, $58 = 2 \cdot 29$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

2. Nem, mert 65 nem páros / prímtényezős felbontásában nem szerepel a kettő.

Igen, mert $1+2+9 = 12$ és a 12 osztható 3-mal, azaz a 129 számjegyeinek összege osztható 3-mal / 129 prímtényezős felbontásában szerepel a 3.

Igen, mert 2-vel és 3-mal is osztható / prímtényezős felbontásában szerepel a 2 és a 3 is.

Nem, mert 3-mal nem osztható / prímtényezős felbontásában nem szerepel a 3.

3.

szám	7	16	28	242
osztók száma	2	5	6	6
osztók	1,7	1,2,4,8,16	1,2,4,7,14,28	1,2,11,22,121,242

Unokáinak száma lehet: 1,2,4,5,10,20. (Ezek pont a 20 osztói.)

A legkisebb, aminek 3 db osztója van: **4**, mert neki 3 osztója van és előtte mindenkinek kevesebb vagy mert ő az első négyzetszám az 1-t követően.

A legkisebb, aminek 10 db osztója van: 10 osztói: 1,2,5,10 ebből a 10 kétféleképpen bontható szorzattá: $2 \cdot 5$ vagy $1 \cdot 10$. Az első esetben a keresett szám kanonikus alakjában 2 prímszám szerepel nem nulla hatványon, amiből az egyik első a második pedig negyedik hatványon szerepel: $n = p_i^1 \cdot p_j^4$. Ez a szám akkor lesz a legkisebb, ha $p_j = 2$ és $p_i = 3$. Tehát a keresett szám: 48. A második esetben a keresett szám kanonikus alakjában egy prímszám szerepel nem nulla hatványon. Azaz a keresett szám: p^9 . Ez a szám akkor lesz a legkisebb, ha $p = 2$. Azaz a keresett szám: 512. Viszont a keresett számnak 1 és 100 közé kell esnie és a legkisebb ilyen számot keressük, ezért a keresett szám: **48**.

Azok lesznek a végén kék oldalukkal felfele, amelyeket páratlan sokszor fordítottam meg. Ezek azok a korongok lesznek, ahol a korong sorszámanak páratlan számú osztója van. Ezek a négyzetszámok. 1-től 10-ig a négyzetszámok: 1,4,9. Tehát 3 db korong lesz kék oldalával felfele. Vesztettem ☹ (Több számelméletet kellene tanulnom... ☺)