

SZAKDOLGOZAT

Orbán Zsófia Gyöngyi

2021

Orbán Zsófia Gyöngyi
ÁLTALÁNOS HIBÁK KÖZÖNSÉGES TÖRTEKKEL
KAPCSOLATBAN ÁLTALÁNOS-ÉS KÖZÉPISKOLÁBAN

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
Bölcsészettudományi Kar

A HÁNYADOSTEST FONTOSSÁGA EGY TANÁRSZAKOS HALLGATÓNAK



Témavezető:
Dr. Szabó Csaba
Egyetemi tanár

Készítette:
Orbán Zsófia Gyöngyi
Osztatlan Tanárszak

Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Fried Katalin tanárnőnek és Dr. Vásárhelyi Éva tanárnőnek, hogy végig ellenőrizték munkámat a kísérleti szakaszban, tanácsokat adtak és segítettek összeállítani a feladatsorokat. Köszönetet mondok Vas Viviennek, aki, mint független személy kijavította és lepontosította feladatlapokat, amiket megírtam a diákokkal, ezzel validálva a kísérleti eredményeimet.

Tartalomjegyzék

Bevezető	2
A kutatás célja és előkészítő szakasza	4
Típushibák	8
Egyszerűsítés és bővítés	9
Közös nevező	11
Műveleti sorrend	16
Osztás, szorzás	17
Szöveges feladatok	20
Tanárokkal való együttműködés	21
Feladatlap általános és középiskolás korosztály számára	24
Feladatlap első változata	24
Feladatlap végső változata	27
A pontozás kialakítása	31
Feladatsor megírása, értékelése	35
Értékelés	38
Adatok összegyűjtése	38
Pontszámok alakulása a harmadik feladatban	46
Adatok elemzése évfolyamok szerint	48
A dolgozatok értékelése	49
A törtekkel való műveletek értelmezése a hányadostestben	51
Irodalomjegyzék	66

BEVEZETŐ

Témaválasztásom esett a hányadostestre, mert az iskolában több éven át oktatják a törteket, folyamatosan visszatérő anyag, és mert személyes tapasztalataim is vannak a törtek tanulásával és tanításával kapcsolatban. Általános iskolában egy olyan matematika tanárt kaptam, aki játékokkal és szemléltető eszközökkel elérte nálunk, hogy ne csak megértsük a törteket és a matematikát, hanem meg is szeressük. Középiskolában viszont szinte mindenkinél a legutáltabb matematikai témakör a közönséges törtek voltak. Elgondolkodtató volt már akkoriban is, hogy mi az, amiért ez nem megy a többségnek (hiszen már óvodás koruk óta használják pl.: óra leolvasásának értelmezése), illetve hogy miket ronthatnak el feladatmegoldás közben és miért. Akkor egyszerűen az volt a válasz, hogy nem értik, és én ezt el is fogadtam. Most lehetőségem nyílt arra, hogy kutatást végezzek arról, hogy milyen hibák merülnek fel a közönséges törtekkel kapcsolatos feladatok megoldásánál. Szakdolgozatom terjedelme annak köszönhető, hogy az utóbbi évben rengeteget kutattam, ami nagy hatással volt rám. Így le szerettem volna írni tapasztalataimat.

Kutatásom elején fel szerettem volna mérni, hogy melyek a főbb típus hibák a közönséges törtekkel kapcsolatban, amit a diákok lekövetnek. Ehhez meglátogattam több iskolát, és átnéztem 4203 feladatlapot és füzetet, hogy megvizsgáljam, mik a fő típus hibák. Nehézségek mindig akadtak a kutatásom során, de a legnagyobb gond azzal volt, hogy hogyan is tudnám a középiskolásokat is bevonni a vizsgálatokba, akik konkrétan már nem tanulnak a törtekről, csak alkalmazzák őket.

Ezután összeállítottam egy feladatlapot, amely az általam talált hibákra kérdez rá. A feladat összeállításánál figyelembe vettem a szaktanárok véleményét is. Az összeállításban Fried Katalin és Vásárhelyi Éva tanárnők segítettek. A végleges verziót próbáltam minél több általános-és középiskolás diákkal megíratni. Az íratás részleteit és a közben tapasztaltakat, mint például a szaktanárok hozzáállása, is részletezem a dolgozatban. A feladatlapok értékelése

során Vas Vivien tőlem függetlenül is lepontozta. Minőségi és általános értékelést is használtam, amit az „Értékelés” alcímben írok le. Kutatásomban kimutatom, hogy a feltételezett típus hibák valóban típushibák.

A szakdolgozatom második felében megpróbáltam végig venni az összes általános- és középiskolában használt közönséges törtekkel kapcsolatos műveletet. Minden ilyen művelethez először egy olyan feladatot mutatok be, megoldva, lépésről-lépésre, amilyet az iskolában tanulnak a tanulók. A leírt műveleteket algebrai úton is levezetem. Az algebrai úton való levezetés után levezetem a módszereket axiomatikusan, a testaxiómák segítségével is. Utána megmutatom, hogy ugyanezek a levezetések hogyan működnek a hányadostestben. Úgy gondolom, hogy ha egy szaktanár tisztában van ezekkel a levezetésekkel, akkor sokkal hatékonyabban tudja tanítani a törteket, és a velük való műveleteket.

A KUTATÁS CÉLJA ÉS ELŐKÉSZÍTŐ SZAKASZA

Szakedolgozatom célja, hogy megmutassa milyen típushibákat követnek el a felső tagozatos és középiskolás diákok a közönséges törtékkel kapcsolatos feladatok megoldása során.

Kutatásom elején megvizsgáltam tanulók gondolatmenetét a törtékkel kapcsolatos feladatokban, majd a típushibákat összegyűjtöttem és csoportosítottam. Ezután készítettem egy diagnosztikai feladatsort, ami a tapasztalt típushibákon alapszik. A feladatsor megírása után összevetésre kerültek a korábban tapasztalt típushibák az általam készített feladatsorban ejtett hibákkal. A törtékkel kapcsolatban tényleges típushibának azt a hibát nevezem a továbbiakban, amely a felmérés alatt és a feladatsorban egyaránt megjelent. Megfigyelésen és dokumentumelemzésen kívül, kutatási eszközként választottam még az interjút. Matematika tanárokat interjúvoltam meg annak érdekében, hogy pontosabban megértssem, milyen fogalmi útvonalak alapján oldják meg a feladatokat a tanulók. A kutatás kezdeti szakaszának folyamatát a következő oldalakon ismertetem részletesebben is.

Kutatásomat Dunaújvárosban végeztem, mert ott nőttem fel és a pedagógus szüleimnek köszönhetően szinte az összes iskola támogatására számíthattam. Célom az volt, hogy részletes példákkal alátámasztva lássam, hogy milyen hibák szoktak előfordulni a diákok munkájában a törték használatakor, ehhez 23 dunaújvárosi iskolából gyűjtöttem adatot.

Arany János Általános Iskola; Dózsa György Általános Iskola; Gárdonyi Géza Általános Iskola; Móra Ferenc Általános Iskola és Egységes Gyógypedagógiai Módszertani Intézmény; Móricz Zsigmond Általános Iskola; Pentelei Mentálhigiénés Általános Iskola; Petőfi Sándor Általános Iskola; Sándor Frigyes Zeneiskola; Szórád Márton Általános Iskola; Vasvári Pál Általános Iskola; Dunaferri Szakközép- és Szakiskola Villamos Tagiskola; Dunaferri Szakközép- és Szakiskola; Dunaújvárosi Egyetem; Kálvin János Református Gimnázium, Szakközépiskola és Általános Iskola; Pannon Oktatási Központ; Rosti Pál Gimnázium és Általános Iskola; Szakképző Iskola és Gimnázium; Szabó Magda

Református Tagintézmény; Széchenyi István Gimnázium és Kollégium; SZC Bánki Donát Gimnáziuma és Szakgimnáziuma; SZC Hild József Szakgimnáziuma, Szakközépiskolája és Szakiskolája; SZC Kereskedelmi és Vendéglátóipari Szakgimnáziuma és Szakközépiskolája; SZC Lorántffy Zsuzsanna Szakgimnáziuma, Szakközépiskolája és Kollégiuma; SZC Rudas Közgazdasági Szakgimnáziuma és Kollégiuma.

Csak az általános iskolákban tudtam eredményes kutatást végezni a feladatlapom összeállításához. Középiskolás adatokat nem tudtam használni, mert „Kilencedik osztálytól a diákok már nem foglalkoznak a törtekkel külön anyagrészben. Ha találkoznak is törtes feladattal, akkor azt számológép segítségével oldják meg.”

Ahhoz, hogy nagyobb rálátást kaphassak a témával kapcsolatban, nyolc különböző, tagozatokkal rendelkező általános iskolából gyűjtöttem adatokat (kisgimnázium, sport, ének és művészet, tánc). Itt a hatodik osztály dolgozataitól a nyolcadikig megnéztem a vétett hibákat (ábrázolás, ábra leolvasás, egyszerűsítés, bővítés, összehasonlítás, halmazban levő elhelyezés, számegyenes, szöveg feladatok, összetett műveleti sorrendes feladatok, közös nevezőre hozás, vegyes alakba átírás). Az iskolák engedték, hogy belenézhessek a megíratott dolgozatokba. Két hónap alatt feladatsorból és dolgozataból 4203-at, füzetből pedig 97-et néztem meg. Öt fő típushiba osztályt különböztettem meg egymástól, amelyet a 1. ábra táblázatban összegeztem. A közös nevezőre hozás okozta a legtöbb problémát, majd az osztás és a szorzás. Az egyszerűsítés, bővítés a harmadik legproblémásabb, míg a legritkábban előforduló hibák közé tartozik a műveleti sorrenddel kapcsolatos feladatok és a szöveges feladatok.

Lehetőségem volt interjút készíteni az iskolák igazgatóival és matematika tanáraival. Óralátogatásokon vettem részt, így a törtek oktatására nagyobb rálátásom lett. Azt tapasztaltam, hogy a pedagógusok nem szeretik ezt a témakört oktatni. Egyik oka a pozitív élmény és visszacsatolás elmarad, valamint hiányzik az otthoni tanulás, a motiváció és az osztálytársakkal való együttműködés.

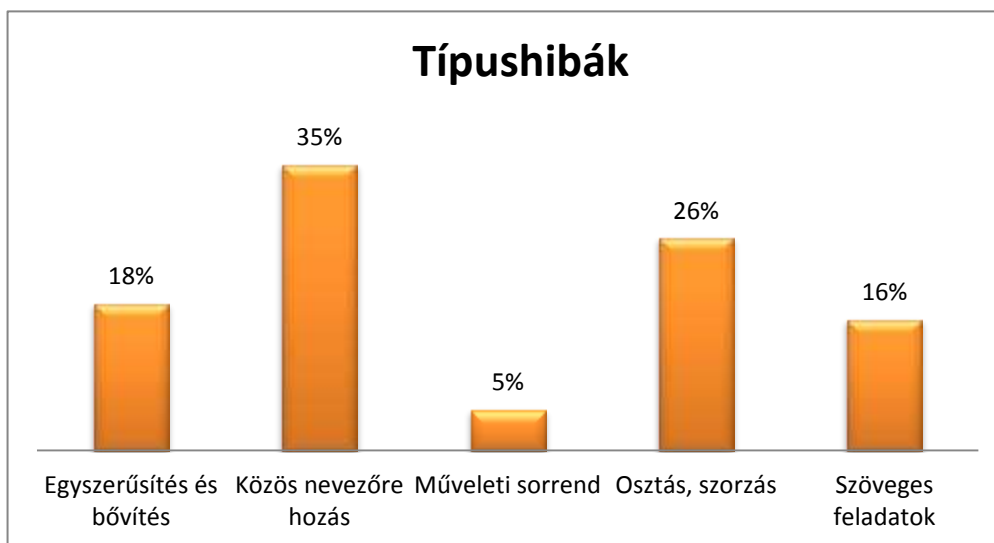
Végül olyan feladatlapot állítottam össze, mellyel a középiskolásokat is bevonhattam a kutatásomba, hogy a korosztályok közti különbségek nyilvánvalóvá váljanak. A feladatlap készítésénél minőségi és nehézségi változtatásokat hajtottam végre az ELTE-s szaktanárok (Fried Katalin, Szabó Csaba és Vásárhelyi Éva) javaslatára, így a feladatsor megfelel a mai oktatási követelményeknek. Típushibákon alapszik, és 45 perc alatt megoldható egy 6. osztályos diák számára is. A végleges feladatlappal újra felkerestem az általános- és a középiskolákat, hogy az eredmények alapján cáfolatot vagy megerősítést kapjak a hipotéziseimre. Néhány intézmény saját döntése alapján nem vett részt ebben a kutatási részben. Az okok között szerepelt, hogy az igazgatók szerint nincs órakeret a feladatlap kitöltésére; a nyomtatásban nem tudnak segíteni; a pedagógusoknak voltak fenntartásaik a feladatlap tartalma és erőssége miatt (a feladatsor nehéz, valamint zavaró, hogy egy feladatnak több megoldása van). Végül összesen 13 iskola segített kutatásom e részében. 596 diák írta meg a feladatlapot 6.-11. évfolyamokban, melyet a 7. ábrában összegeztem (12. évfolyamból adatokat nem lehetett gyűjteni az érettségi közelsége miatt).

Az feladatok értékelését három táblázatban összegeztem (8.-10. ábra). A tanulóknak már az alapfogalmakkal problémájuk van, ezért számítani lehetett arra, hogy a számítások során a 3. feladatban hibák merülnek fel. Összesen 15 típushiba jelentkezett ebben a részben, melyből 13-at táblázatba rendeztem (9. ábra). Ezeket példákkal is alátámasztottam. Megfigyeltem, hogy minél idősebbek a diákok, annál gyakrabban használják a tizedes törteket a feladatok megoldása során, illetve a halmazábrához szükséges feladatmegoldó képességük csökken. Elemeztem azt is, hogy miben különbözik a diákok teljesítménye akkor, ha (az igazgatók kérésének megfelelően) számológépet is használhatnak. Az eredmények alapján kiderült (12. ábra), hogy a számológépet alkalmazó tanulók rosszabb pontszámot értek el. Ennek oka lehet, hogy a gép az eredményt kiszámolja és azt le is írják a diákok, de a számolás menetét teljesen kihagyják. Az évfolyamok eredményeit a 13. és 14. ábrában összegeztem. A 8. évfolyamban érték el a legjobb eredményeket, amire a felvételre való készülés adhat okot. A 6. osztály után a 11. évfolyam teljesített a harmadik legjobban.

Az értékelés és osztályozás kétféleképpen történt (13. és 14. ábra). A megírt feladatlapok értékelése kvalitatív módon, és iskolán belüli dolgozatjavítás szempontjai alapján is zajlott. A kvalitatív értékelésnél nem vettem hibának, ha a tanuló nem kezdett hozzá a feladathoz, így az nem járt pontveszteséggel. Az érvényesség érdekében egy független pontozó is átnézte a dolgozatokat. A kiértékelt feladatlapok eredményeit nem kellett visszajuttatnom az intézményekbe. A pedagógusok közül csak ketten tartottak igényt az eredményekre és a típushibákra, a többi tanár nem. Ezt azzal indokolták, hogy ismerik diákjaiknak a képességeit, és biztosak abban, hogy az osztály nagyobb része rosszul teljesít a feladatlap kitöltése során. Az iskolákon belüli mérések ellenére, nem hasonlítottam össze az iskolákat egymással, így az anonimitásukat is megőriztem, de az eredményeket (15.-16. ábra) rendeztem.

A kutatásom elején feltételezett típushibák megalapozottaknak tűnnek. A vizsgálat során sok tapasztalatot szereztem az iskola dolgozóival és a közönséges törtékekkel kapcsolatban egyaránt. Ezek a típushibák rámutattak arra, hogy a pedagógus pályám alatt kiemelt hangsúlyt kell majd helyeznem erre a témakörre, ahhoz, hogy ezt a nagy mennyiségű hiányosságot csökkenthessem.

TÍPUSHIBÁK



1. ábra. A megvizsgált 4300 feladatban megjelenő típushibák felsorolása látható az ábrán, százalékos gyakoriságuknak megfelelően

„A számtani szabályokat gyakran változatosan használják és sok esetben helytelenül. A tartalmi megértés nincs kellően fejlesztve.” (Padberg, 2002, old.: 529)

Az átnézett feladatsorokban, füzetekben, dolgozatokban megfigyeltem milyen típushibák jelentek meg a megoldások során. Ezeket összegyűjtve öt osztályt hoztam létre, amibe a hibák típusa alapján be tudtam sorolni a megoldásokat. Típushibák előfordulási gyakoriságát oszlopdiagramon (1. ábra) ábrázoltam. A leggyakrabban ejtett hibát a legmagasabb oszloppal jelöltem, míg a kevésbé gyakori típushibát a legalacsonyabb oszlop mutatja.

Annak érdekében, hogy egyértelmű legyen, mit milyen típusú hibának nevezek, a következőkben példával alátámasztva részletesebben jellemzem az egyes típusokat. A példákat a dolgozatok, feladatsorok és füzetek feladataiból választottam.

Egyszerűsítés és bővítés

Megfigyelhető, hogy az elkövetett típushibák alapján első oszloppal szemléltetett „egyszerűsítés és bővítés” jelenti a harmadik legproblémásabb fogalomkört. A kategórián belül négy altípusba sorolhatók a diákok hibái az alapján, hogy milyen feladatban követik el azt:

- 1) Egy törtet, amelynek a számlálója és a nevezője is nagy szám, egyszerűsíteni kell. Példa egy füzetből:

$$\frac{615}{380} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 41}{2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 19} = \frac{41}{38}$$

A feladat megoldásakor a diákok kétféle út közül szoktak választani.

Az elsőben, megvizsgálják, hogy melyik az a szám, amely a számlálóban és a nevezőben is megvan, majd azzal egyszerűsítanak. Mindezt annyiszor hajtják végre, amíg a legegyszerűbb alakját meg nem kapják a törtnek, azaz amikor a számláló és a nevező relatív prímek. A második lehetőség az, hogy a számokat prímtényezős felbontását elkészítik, majd egyszerűsítanak a közös prímeikkel. Ez a megoldásmenet látható a példán is.

Bár könnyebb egyszerűsítéseket és bővítéseket már 5. osztályban is végeznek a gyerekek, bonyolultabb feladatokat a témakörben csak 6. osztályban vesznek. A tanulás menete során előbb megtanulják az oszthatósági szabályokat, majd a prímeket, a számok prímtényezős felbontását, ezután ismerkednek meg egy, a fentihez hasonló, „komolyabb”, több prímtényezőt tartalmazó tört egyszerűsítésével. Ebben a példában jól látszik, hogy az oszthatósági szabályokat és a prímtényezős felbontást nem sajátította el kellőképpen a tanuló ahhoz, hogy egy ilyen feladatot meg tudjon oldani.

- 2) Egy törtet egyszerűsíteni, bővíteni kell úgy, hogy a sorozatot folytatjuk és a betűk helyére a megfelelő számot írjuk.

$$\frac{2}{5} = \frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{3}{c} = \frac{8}{d} = \frac{e}{50}$$

Tanulói megoldás: $a = \frac{4}{10}; b = \frac{6}{15}; c = \frac{3}{5}; d = \frac{8}{20}; e = \frac{20}{50}$

Annak ellenére, hogy a tanuló a bővítést és az egyszerűsítést szinte hibátlanul használta, nem vette figyelembe, hogy csak a számlálót vagy nevezőt kell leírni nem pedig az egész törtet. A legtöbb esetben a tanulóknál még nem vált egyértelművé az, hogy itt a tört két egész szám hányadosát jelenti vagy az egységtörtek többszöröseit. Ezt a törtértelmezést C. Neményi Eszter „második értelmezésének” nevezte.

- 3) Egy megadott törttel egy másik, a megadott törttel megegyező törtet kell írni.

Megadott tört: $\frac{5}{6}$

Tanulói megoldás: $\frac{5}{6} = \frac{6}{5}$

Előfordul a diákok körében, hogy azt hiszik, hogy egy tört megegyezik a reciprokával. Az interjúk után világossá vált, hogy összekeverték a bővítést a törtekkel való osztással.

Mivel itt egy egyszerűbb, viszonylag kis nevezőjű törtről volt szó, meglepő, hogy egy tanuló sem volt, aki modellezéssel oldotta volna meg a feladatot. A modellezés (ami jelen esetben lehet akár csak egy „pizza-ábra” vagy egyéb egyszerű ábra alkotása) sokat segítené a diákoknak, mert rájöhetnének arra, hogy a feladatnak több megoldása is van. A fenti példában segíthetett volna a modell a diáknak, hogy ellenőrizze a feladatot, mert az ábrázolás során látta volna azt, hogy az „eredeti” tört és az általa megadott tört nem egyezik meg. Voltak olyan diákok is, akik modellezés nélkül, egyszerűsítéssel vagy bővítéssel oldották meg az ilyen típusú feladatokat.

- 4) Egy, a műveleti sorrend ismeretét is igénylő törtet tartalmazó feladatot kell megoldani, ahol a végeredményt a legegyszerűbb alakra kell hozni, mégpedig vegyes tört alakban, ha ez lehetséges.

$$\text{Első példa: } 8\frac{6}{10} + \left(\frac{27}{4} - 2\frac{5}{10}\right) = \frac{86}{10} + \frac{135}{20} - \frac{25}{10} = \frac{172}{20} + \frac{135}{20} - \frac{50}{20} = \frac{257}{20} = 12\frac{17}{20}$$

Annak ellenére, hogy a tanuló a feladat lépéseit hibátlanul hajtotta végre és a végeredmény is a lehető legegyszerűbb közösleges tört, a vegyes törtté átalakítás mégsem sikerült. Ennek egyik oka lehet, hogy a tanulónak nem világos, hogy mik az egységtörtnek a többszörösei, hiába találkozott velük már 4. osztályban különböző képi szemléltető eszközökkel kiegészítve. (C. Neményi, Relációk, függvények, sorozatok; A törtszám; A negatív szám, 2008)

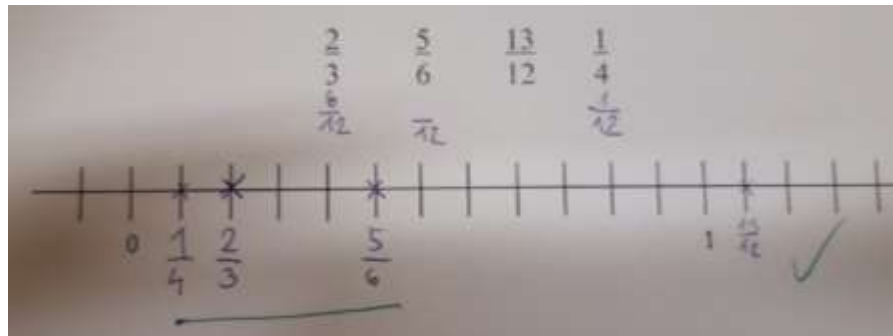
$$\text{A második példa pedig a következő: } \frac{28}{14} \cdot 4 = \frac{114}{14}$$

A szorzás maga is hibás, de amit ki szeretnék emelni, az az, hogy a tanuló a kapott eredményét nem egyszerűsítette tovább, és a vegyes alakját sem adta meg a közösleges törtnek. Az egyik interjúalanyom azt mondta, ez azért van, mert mire a feladat végéhez ér örül, hogy kapott egy eredményt, sikerült kiszámolnia és gyorsan nekikezdhethet a következő feladatnak, mielőtt kifutna az időből. Emiatt sosem ellenőrzi a feladatot, az eredményt és gyakran elfeledkezik arról, hogy a legegyszerűbb alakot kéri a feladat.

Közös nevező

A következő oszlop a diagramon a „közös nevezőre hozás”, ezzel akadt a legtöbb problémájuk a tanulóknak. Ide sorolom azokat a feladatokat is, amelyeket bár máshogyan is meg lehet oldani, a közös nevezőre hozás inkább célravezető. Ebben a témában nyolc különféle hibát ejtettek a diákok, amelyekhez egy-egy példát mutatok.

- 1) Számegyenesen vegyük fel az adott törteket, utána pedig adjuk meg a számegyenesen jelölt betűk értékét.



2. ábra. Adott törtek ábrázolása számegyenesen

Ebben a feladatban (2. ábra) kaptak a diákok egy kis segítséget, hiszen annyi részre volt felosztva a 0 és 1 közötti szakasz, ami pont a közös nevező volt és így minden törtet egy vonalhoz lehetett rendelni. Ehhez a tanulónak érdemes közös nevezőre hozniuk a feladatban szereplő törteket. A bemutatott megoldásban ezt el is kezdi a diák, viszont már ebben a lépésben problémák merültek fel. Helytelen számok kerülnek a számlálóba, ennek következményeként rossz az ábrázolás is. Természetesen ez a feladat is megoldható közös nevezőre hozás nélkül, viszont ekkor a szakasz már meglévő felosztása mellett kellene berajzolni a tanulónak a 3, majd a 6-felé osztást. Közben könnyen belekavarodhat az ábrán szereplő sok vonalba.



3. ábra. Betűk meghatározása törtszámokkal

A feladat második részére vonatkozó példában (3. ábra) a betűk helyére kellett keresni a törteket úgy, hogy szintén meg volt adva a 0 és 1 közötti szakasz felosztása. Itt a törték leolvasása lett volna a feladat, de sok diáknak ez is nehézséget jelentett. Az egyik közvetlen ok az lehet, hogy a diákok sokszor nem

tudják megkülönböztetni, mely érték a számlálóé és mely tartozik a nevezőhöz. Ezt is a modellezés hiányához lehet visszavezetni.

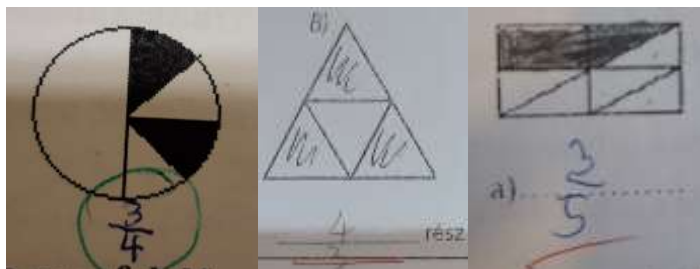
Volt olyan feladat is, ami az abszolútértékkel, ellentettel és a reciprokkal volt kapcsolatos, de itt szinte senki nem tudta a helyes választ. Az egyik tanuló szerint ez azért volt nehéz, mert nem ismerik, nem emlékeznek a fogalmakra annak ellenére, hogy tanulták pár éve.

Megfigyelhető volt, hogy általában akinek az egyszerűsítéssel, bővítéssel problémái voltak, annak a közös nevezővel is gondjai akadtak. Például az $\frac{1}{4} = \frac{a}{12}$ feladatban, ahol az „a” értékét kellett meghatározni, az „a” helyére több esetben is $a = 1$ került.

2) Törtek sorba rendezése.

Az a tapasztalat, hogy a diákok a sorbarendezésnél sem használják a közös nevezőre hozást. Az egyik tanulóval folytatott interjú során kiderült, hogy ő a nevezőket veti össze egymással, az alapján teszi növekvő vagy csökkenő sorrendbe a törteket, így a $\frac{2}{3} < \frac{1}{4}$. Ez a fajta gondolatmenet magamtól - az interjú segítségével nélkül - nem jutott volna eszembe. A feladatsorok többi hasonló feladatát vizsgálva és elemezve látható, hogy az imént említett gondolatmenet nem egyedi, hanem számos tanulónál megjelennek hasonló hibák. Az ilyen típusú feladatokban is segítséget nyújthatna a diákoknak a modellezés, mint ellenőrzés, de senki nem élt ezzel a technikával.

3) Ábrázolni vagy leolvasni kell a rajz valahányad részét.



4. ábra. Mennyiségek felírása tört alakban az ábrák szerint

Kétféle típushibát követtek el az általános iskolások ezen feladatok megoldása során. Az egyik az volt, hogy annyit írnak a számlálóba, amennyi be van színezve és annyit a nevezőbe, amennyi fehérén maradt. A másik megoldás esetén jól olvassák le az ábrát, viszont a számláló és a nevező helyét felcserélik. Mikor ábrázolniuk kellett az adott törtet, akkor ugyanezek a problémák merültek fel. Jól mutatja a feladat, hogy a törtfogalom kialakítása nem volt elég alapos ahhoz, hogy erre építeni lehessen a további törtekkel kapcsolatos alkalmazásokat.

4) Döntsük el, melyik tört nagyobb.

A két megadott tört: $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$.

Tanulói megoldás: $\frac{4}{5} < \frac{3}{4}$

Ezt a feladatot is többféleképpen lehet megoldani. Lehet például ábrázolni vagy közös nevezőre hozni a törtet. Azonban a tanulók ezek helyett itt is sokszor csak a tört nevezőjét veszik figyelembe. Az egyik diák elmondása szerint a példa alapján azért a három negyed a nagyobb, „Mert a tortát csak négy részre kell osztani és nem ötre. Mivel a néggyel nagyobb részekre osztottam a tortát, ezért az a nagyobb”.

5) Adjuk meg a betűk értékét vagy értékeit a természetes számok halmazán, ha $a \neq 0$!

Példa: $\frac{10}{a} \geq 2$;

Tanulói megoldás: $a = 5, 4, 3, 2, 1$

Ennél a típusú feladványnál jellemző, hogy ha találnak egy helyes megoldást a kisebbek, akkor utána már a többit nem is ellenőrzik le, hogy jó lenne-e.

Más megoldásfogalom él a különböző korú (képzettségű) diákok fejében. A kisebbek úgy gondolják, hogy ha egy példát adnak, akkor az jó és végeztek a feladattal. Míg a nagyobbak jó esetben tudják, hogy az összes megoldást meg kell

adni. Ezt az igényt fejleszteni kell egy bizonyos korosztálytól kezdve, fel kell hívni a figyelmet arra, hogy több megoldása is lehet egy-egy példának.

Ebben a feladatban még egy hiba rejlik. Előfordulhat, hogy a tanulók bizonytalanok a relációjelekkel kapcsolatban. Egy 14 évest idézve „Sose tudom, merre mutat nagyobbat a kacsacsőr.”

Sokat segíthet a diáknak, ha az egész számot közös nevezőre hozza az adott törttel és az alapján már könnyebben meg tudja adni a megoldásokat.

6) Végezzük el a műveleteket törtekkel.

Tanulói megoldás: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{10}{7}$

A tanuló közös nevezőre hozás helyett a számlálót a számlálóval, míg a nevezőt a nevezővel adta össze. Ez a hibás lépés a leggyakoribb a törtek összeadásakor. Az utolsó lépést egy iskolás mondta el, hogy azért nem 5 van a számlálóban, mert „mivel két törtről van szó ezért a számlálónak az értékét meg kell szorozni kettővel”.

További típushiba, hogy a közös nevező megtalálásánál annyira a legkisebb lehetséges közös nevezőre törekszenek a diákok, hogy a nevezőknek nem többszöröseit, hanem osztóit nézik.

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{40} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} + \frac{56}{5} + \frac{1}{5}$$

Itt például az 5 az, ami mindhárom nevezőnek osztója. Ezt veszi közös nevezőnek, utána pedig a számlálót annyival szorozza meg, amennyiszer a nevezőben az öt megvan.

Kiderült, hogy a diákok nagyon sokszor a törtre nem egy racionális számként gondolnak, hanem mint két különálló egész számra. Mivel (az ő fejükben) egész számokról van szó, ezért a rájuk érvényes műveleti szabályokat alkalmazzák. Így adódik, hogy a számlálókat összeadják vagy kivonják egymásból, majd a nevezőket is ugyanígy.

Például: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{-1}$

$$\frac{3}{20} + \frac{9}{20} = \frac{12}{40}$$

Viszonylag ritkán, de az is előfordul, hogy a közös nevezőt megtalálja, viszont a számlálókat nem változtatják meg, mint ahogy az alábbi példában is ez történik:

$$\frac{5}{2} + \frac{2}{4} = \frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}.$$

7) Alakítsd át az egész számokat és a vegyes törtet közös nevezőre.

$$4 = \frac{1}{1}$$

Nagyon nehezen értik meg azt, hogy az $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \dots = \frac{182}{182} = \dots$, sőt, ha már nem egy egésze van szó, hanem többről, azt általában már egyáltalán nem értik. Ennél a kérdésnél is a modellezés hiánya okozhat problémákat.

Műveleti sorrend

A legritkábban előforduló hiba a diagramon a „műveleti sorrend” a törtekkel. Ez a tananyag is előfordul már 5. osztályban, ott megpróbálnak rá nagy hangsúlyt fektetni, és a későbbi években a spirális elve szerint visszatérnek a fogalomra, és egyre bonyolultabb műveletek használatával mélyítik a módszer megértését. Mégis előfordulnak típushibák, mint ahogy a következő példán is láthatjuk (5. ábra).

A példában a diák már ismeri és alkalmazni is tudja a törtekkel való műveletvégzés szabályait, de a módszere hibás, mert nem a valós műveleti sorrend alapján végzi el a műveleteket. A kutatásom során azonban azt tapasztaltam, hogy az ilyen hibát elkövetők száma elenyésző.

$$\frac{4}{6} \cdot \left(\frac{6}{10} - \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2} \right) = \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{24}$$

5. ábra. A diákoknak meg kell oldaniuk ezt a feladatot, ahol alpműveletek vannak törtekkel és még a műveleti sorrendre is figyelni kell

Osztás, szorzás

Az utolsó előtti oszlop a diagramon a törtekkel való szorzására és osztására vonatkozik. A diákok a közös nevezőre hozás után ezt a hibát ejtik a leggyakrabban. Ennek oka, hogy a gyerekek a szabályokat megjegyzik, de aztán elfelejtik, hogy mire kell alkalmazni, teljesen esetlegesen alkalmazzák őket. Elmondják a rigmusokat például: úgy osztok, hogy az osztandó reciprokával szorzok. A szavak nagy része megmarad a fejükben, de elfelejtik, hogy összeadásra vagy szorzásra kell alkalmazni, vagy osztásra, vagy a reciprokképzésre. A feladatok megoldása közben tízféle módon oldották meg helytelenül a szorzási és osztási feladványokat. A megvizsgált feladatsorokból arra is lehet következtetni, hogy az osztással kapcsolatos hibák sokkal gyakrabban fordulnak elő, mint a szorzással kapcsolatosak. A példákat a dolgozatból másoltam és egyes hibákhoz több példát is mutatok.

1) Végezzük el az alábbi szorzást.

Ezekben a példában a diák szorzásnál az egész számnak a reciprokát vette:

$$1\frac{3}{8} \cdot 6 = \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{48} \qquad \frac{7}{12} \cdot \frac{9}{5} = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{9} = \frac{35}{108}$$

Ebből arra lehet következtetni, hogy keveri a szorzás és az osztás lépéseit egymással. Persze az is lehetséges az első esetben, hogy csak az egész számot akarta átírni közönséges tört alakba és úgy beszorozni, viszont akkor a törtek bevezetésekor nem tudta értelmezni vagy megfelelően elsajátítani az egészek átírását tört alakba.

Szorzásnál a leggyakoribb hiba, amit a gyerekek ejtenek, hogy a számláló

beszorzása helyett a nevezőt szorozzák be: $\frac{20}{24} \cdot 9 = \frac{20}{216}$

Az is érzékelhető volt a feladatsorok áttekintése közben, hogy a diákoknak csak az elenyésző része használt keresztbe egyszerűsítést, mind egész számmal való szorzás esetén, mind törtekkel. Akik használták ezt az egyszerűsítési lépést, még

azok sem tudták kiszámolni a helyes eredményt általában, mint ahogy a következő példában illusztrálom:

$$4 \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{6}$$

A példán látszik, hogy helyesen tudja a tanuló, hogy az egész számot a nevezővel kell egyszerűsíteni, viszont a végrehajtásnál valamilyen sajátos technikát alkalmaz.

Az is elő szokott fordulni, hogy ha egész számmal való szorzásról van szó, hogy a diák a tört számlálóját és nevezőjét is megszorozza az egész számmal és nem veszi észre, hogy így szorzás helyett egy bővítést hajtott végre: $\frac{4}{7} \cdot 6 = \frac{24}{42}$.

2) Végezzük el az osztásokat.

$$\frac{17}{20} : \frac{2}{5} = \frac{17}{10}$$

Ebben a példában az figyelhető meg, hogy a szorzásnak a keresztbe egyszerűsítését használja a diák. Véltetően az is okozhatta a hibát, hogy a tanuló arra emlékszik, hogy ha tud majd osztásnál, akkor keresztbe egyszerűsít, mert ezek a lépések kellenek az osztás elvégzéséhez. Viszont egy lépés kimarad, méghozzá az, hogy vegye az osztó reciprokát és azzal szorozzon.

Adódott olyan megoldás is, hogy az osztandónak veszi a reciprokát a diák és a további lépéseket már helyesen hajtja végre.

$$\frac{5}{9} : 7 = \frac{9}{5} \cdot 7 = \frac{9 \cdot 7}{5} = \frac{63}{5}$$

Ebben az esetben is emlékszik a diák, hogy reciprokot kell venni, de úgy rögződött benne, hogy mindig a törtnek a reciproka kell. A hibák nagyobb része azért keletkezhet, mert a tanulók pontosan nem tudják, hogy mit jelenthet a reciprok, hogy miért is jó, ha azt vesszük, és miért kell szorozni vele. Tapasztalataim alapján néhány iskolában nem magyarázzák el ezt a gyerekeknek, csak bemagoltatják a következő mondókát: „Úgy osztok, hogy az osztandó

reciprokával szorozok.”. Ezt a tanár az elején mindig mondja, majd csak elkezdí és a gyerekek a feladat megoldása közben befejezik a mondatot.

A következő példában látszik, hogy az összes művelet, amit a gyerek végrehajtott, helyes, azt leszámítva, hogy az egész számot helytelenül írja át tört alakba.

$$3\frac{3}{7} : 8 = \frac{24}{7} : \frac{1}{8} = \frac{24}{7} \cdot \frac{8}{1} = \frac{192}{7}$$

Ahogy korábban is említettem, itt az lehet a probléma, hogy a diáknak nem volt lehetősége eleget modellezni, így az alapfogalmak nem épültek be.

Az utolsó osztási típushibából adódik az is, hogy ha a nevezőt el tudják osztani

maradék nélkül az egész számmal, akkor azt meg is teszik: $\frac{13}{12} : 4 = \frac{13}{3}$.

Ez a megoldásmenet abból is adódhat, hogy a tanárok, mikor ismertetik, hogyan osztunk törtet egész számmal, akkor kétféle megoldást mutatnak egyszerre: a reciprokkal szorzást és a számlálóval való egyszerűsítést. Ezek a lépések keveredhetnek össze a tanulóknál.

Mindkét művelet esetében találkoztam olyan megoldásmenettel is, hogy közös nevezőre hozzák a törtet és úgy végzik el a feladatot.

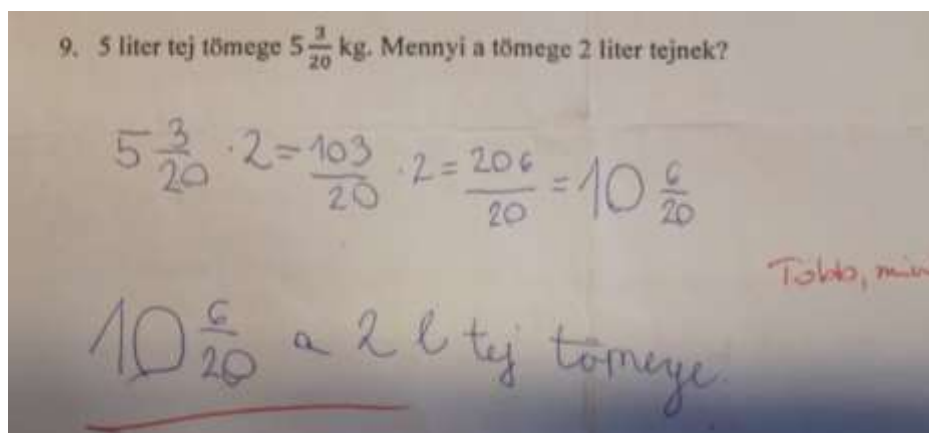
$$\frac{35}{60} \cdot 10 = \frac{350}{60} \cdot \frac{35}{60} = \frac{12250}{60} = \frac{1225}{6}$$

Ilyenkor megtörtént az, hogy ezres nagyságrendű számokat szoroztak össze a diákok és számolási hiba miatt nem sikerült a helyes eredményt megkapni.

Az osztási és a szorzási műveletek úgy is megjelentek a dolgozatokban, hogy egy adott mértékegységet kellett átváltani egy tőle különbözőbe, $\frac{9}{25} \text{ kg} = 280 \text{ g}$ (6. ábra).

Az ilyen feladatoknál szinte senki nem tudta a megoldást. Neki se tudtak kezdeni a tanulók, mert a mértékegységek közötti váltószámokban is bizonytalanok voltak.

Szöveges feladatok



9. 5 liter tej tömege $5\frac{3}{20}$ kg. Mennyi a tömege 2 liter tejnek?

$$5\frac{3}{20} \cdot 2 = \frac{103}{20} \cdot 2 = \frac{206}{20} = 10\frac{6}{20}$$

Több, mint

$10\frac{6}{20}$ a 2 l tej tömege.

6. ábra. Mértékegységes szöveges feladat megoldása, amely alpműveletekre is épít

A diagram utolsó oszlopa a „szöveges feladatok” megoldása, amit a diákoknak elég kevés része hibázott el. Azonban érdemes azt is megjegyezni, hogy rengeteg feladatsorba inkább nem is raktak szöveges feladatot a tanárok, mert az alapeladatokra helyezték inkább a hangsúlyt. Azoknál a feladatsoroknál, ahol volt szöveges feladat, ott csak a legegyszerűbb típusúak voltak megtalálhatóak.

TANÁROKKAL VALÓ EGYÜTTMŰKÖDÉS

Több iskolában is lehetőséget kaptam, hogy matematikatanárokkal beszélgessek. Ezen felül, kutatásom részeként az matematikatanár óráját két hónapon keresztül rendszeresen látogattam. A beszélgetések, óralátogatások és dolgozatokra írt megjegyzések alapján sikerült jobb rálátást kapnom a törtek oktatásáról és annak hatékonyságáról. A továbbiakban néhány, ebben a rövid időszakban tapasztalt helyzetet mutatok be.

A dolgozatok ellenőrzése közben észrevettem, hogy az egyik évfolyamnak kifejezetten rosszul sikerült a dolgozat. A szaktanár szinte az összes dolgozatra ráírta, hogy „Járjál külön tanárhoz!” vagy „Korrepetálás javasolt!”.

Az egyik óralátogatás előtt a matematikatanár elmondta a törtek tanításával kapcsolatos gondolatait:

- *Én:* Ön szerint mi lehet az oka annak, hogy a törtek ennyire nehezen mennek a gyerekeknek?
- *Tanár:* Régen a tanulóknak, miután hazamentek, akkor le kellett ülniük és meg kellett tanulniuk az egészet, amit az órán vettek a tanárral. Manapság ezt már nem kötelező megtenniük, hisz a szülők nem tudják irányítani a gyermekeiket, így azt csinálnak, amit akarnak.
- *Én:* Esetleg az nem lehet egy indok, hogy az összes műveletet a törtekkel szinte egyszerre veszik, és nincs elég idejük a gyerekeknek elsajátítani ezt a témakört alaposan?
- *Tanár:* Nem hiszem, régen is meg tudták tanulni a fiatalok, most is meg tudnák, ha akarnák! Én mindent megteszek! Leadom az anyagot, mindent elmagyarázok többféleképpen és ezen felül van hetente egyszer korrepetálásom, amire a diákjaim ellátogathatnak, de feleslegesen, mert ott se figyelnek, csak hangoskodnak.

Azért, hogy az iskolákban átnézhessem a füzetekben szereplő hibákat, az órát megkezdve a tanár bekérte a rosszul teljesítő diákoknak a füzetét. Amíg ezeket átnéztem, addig a szaktanár elvégezte a szükséges adminisztrációt. Az óra további

részére kiosztott négy feladatot a könyvből és még négyet felírt a táblára. Amíg a gyerekek a feladatokat próbálták megoldani, addig a tanár a tanítási szemléleteit osztotta meg velem. Az óra végén a könyves feladatoknak a megoldását elektronikus úton ellenőriztük le, ahol csak a végeredményt lehetett látni. A táblára írt feladatokat pedig a diákok a táblánál oldották meg. A feladatok megoldása közben felmerült bennem néhány kérdés, amit a szaktanár engedélyével fel is tehettem nekik.

- *Én:* Azt szeretném megkérdezni, hogy hogy jött ki nektek egyből a végeredmény? Mert a táblára nem vezettétek le a menetét a feladatnak, de ez nem azt jelenti, hogy a füzetetekben nem tettétek volna ezt. Esetleg a füzetben számoltatok?
- *Diákok:* Nem számoltunk. Nem tudjuk végig levezetni a feladatot, így nem írjuk le és a végére tippelünk egy nagyjából jónak tűnő megoldást.
- *Én:* És azt tudjátok, ha csak elkezdték a levezetést, akkor már részpontszámokat kaphattok a dolgozatban, illetve a felvételin?
- *Tanár:* Látjátok gyerekek hányszor mondtam én ezt már el nektek? Na, hányszor a héten (felemelt hangsúly)?

Mit szoktam írni a feladat végére mikor én levezetem a feladatot elöttetek a táblán? Mit?

- *Diákok:* Pontszámokat.
- *Tanár:* Úgy van, pontszámokat. Szerintetek viccből írom le ezeket mindig?

Hányszor elmondtam már ezt ezeknek, de sose hallgatnak rám!

Majd az óra végén még azt is megtudtam, hogy a matematika tanár minden osztályának van egy online felülete, ahova a házi feladatokat és a napi tananyagot is feltölti. Ezen kívül tanulópárokat is alkottak, hogy egymást tudják segíteni matekból.

A legtöbb esetben, mielőtt a tanárok átadták a feladatsorokat nekem, fűztek egy-egy megjegyzést az eredményekhez. „Ne számítsak túl jó eredményekre, mert az

osztály motiválatlan és az érdeklődési körük is teljesen eltérő a matematikától.”. „A feladatok a legegyszerűbbek, mert nem volt elég idő arra, hogy mindenféle kontextusban megnézhessük a törtéket. Volt egy kis probléma a törtékekkel való műveletek megértésével, így az alpműveletekre helyeztem a hangsúlyt.”.

Találkoztam olyan tanárokkal is, akik boldogan meséltek arról, hogy diákjaik általában motiváltak, de néha ösztönözni kell őket. Annak ellenére is dicsérték diákjaikat, hogy a dolgozatjegyek nem lettek a legjobbak. A tanárok elenyésző része beszélt így a diákjaikról.

Középiskolákból az igazgatók nem tudtak segíteni nekem a típushibák összegyűjtésében, mert „Ezekben az években már nem foglalkoznak a tanulók a törtékekkel, hisz azt már megtanulták. Ha mégis valamilyen feladatban találkoznának törtékekkel, akkor azt a számológépükkel könnyedén ki tudják számolni.”.

Az általános iskolákban volt lehetőségem a tanulók megoldott feladatsorait, füzetait, dolgozatait tanulmányozni. Így meg tudtam figyelni, hogy milyen típushibák fordulnak elő jellemzően ebben a korosztályban. A középiskolások tudásáról ilyen formában nem gyűjthettem információt. Fontosnak tartottam középiskolában is megvizsgálni az egyes korosztályoknál jelentkező típushibákat, és az ottani eredmények összevetését az általános iskolások körében tapasztaltakkal. Ebben a korosztályban a diákok törtékekkel kapcsolatos tudását egy gondosan megtervezett feladatsor segítségével térképeztem fel, melyet 6., 7., 8., 9., 10., és 11. évfolyamos diákok töltöttek ki.

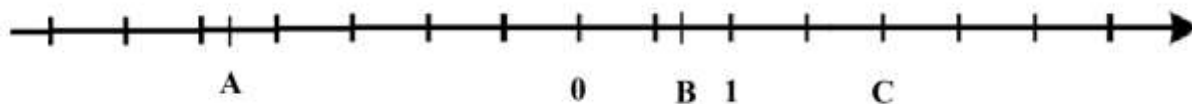
FELADATLAP ÁLTALÁNOS ÉS KÖZÉPISKOLÁS KOROSZTÁLY SZÁMÁRA

Ahhoz, hogy a középiskolásokat is bevonhassam a kutatásomba és lássam az egyes korosztályok közötti különbségeket, egy feladatsort állítottam össze. A feladatlap elkészítésénél szempont volt, hogy 45 percen belül hatodik osztályos tudással megoldható legyen, és rákérdezzen az egyes típushibákra: a törtekkel való alpműveletekre, a tört különböző funkcióira, nagyságára azok összehasonlítására, számegyenesen való elhelyezkedésére, továbbá fontosnak tartottam, hogy szerepeljen benne vegyes és negatív tört is.

Feladatlap első változata

- 1) Ábrázold a következő törteket az alábbi számegyenesen, majd válaszolj a kérdésekre!

$$\frac{5}{3}; -\frac{6}{5}; 2\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; -1\frac{5}{4}; \frac{3}{6}$$



- a) Határozd meg $A=$ ____, $B=$ ____, és $C=$ ____-t!
- b) Keress egy olyan racionális számot, amely az $\frac{5}{3}$ és a C közé esik!

- c) Sorolj fel 2db áltörtet a felsoroltakból! _____; _____
- d) Mondj egy valós törtet a felsoroltakból! _____

e) Mi az $\frac{5}{3}$ abszolút értéke? _____

f) Mi az ellentettje az $\frac{5}{3}$ -nak? _____

g) Mi az $\frac{5}{3}$ reciproka? _____

2) Karikázd be a helyes választ!

a) Azt mutatja meg, hány részre van osztva az egész.

a, törtvonal b, nevező c, számláló d, tört

b) $2:5=\frac{4}{10}$ műveletben az 5 az a...

a, osztó b, osztandó c, hányados d, nevező

c) Két egész szám hányadosa a ...

a, tört b, nevező c, számláló d, valós tört

d) Milyen művelet van a $2\frac{2}{3}$ között?

a, szorzás b, osztás c, összeadás d, kivonás

3) Végezd el a műveleteket és add meg a legegyszerűbb formájában!

a)
$$\frac{\left(\frac{4}{5} + \frac{162}{180}\right) \cdot \left(3\frac{3}{2}\right) : \frac{63}{70} - (-2)}{\frac{10}{3} + (+3) - \left(+\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)}$$

b)
$$\frac{1}{1001} + \frac{2}{1001} + \dots + \frac{1000}{1001} =$$

4) Hasonlítsd össze a két törtet egymással, majd tedd ki a relációs jelet!

$$\frac{8}{9} \square \frac{3}{4}$$

$$2\frac{1}{7} \square \frac{13}{16}$$

5) Tedd igazzá az egyenlőséget!

$$2\frac{1}{a} = \frac{245}{105}$$

$$\frac{b}{35} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{104}{13} = \frac{c}{d}$$

a=_____

b=_____

c=_____

d=_____

6) Vedd fel az N, Q és Z halmazokat egy ábrán, annak megfelelőnek, hogy melyiknek melyik a részhalmaza, majd írd be a felsorolt törtet a megfelelő helyre!

$$\frac{5}{7}; \frac{0}{8}; -\frac{2}{3}; -\frac{6}{2}; 1\frac{3}{3}; 2\frac{3}{6}$$

7) Zsófi palacsintát sütött a családjának. Mikor Attila hazaérkezett, akkor megette a palacsinták $\frac{4}{8}$ -át. Harminc perccel később Gergő is megérkezett, és a maradéknak a $\frac{2}{5}$ -ét ette meg. Este, mielőtt Gyöngyi haza ment volna vett a boltban még 9 palacsintát a biztonság kedvéért, hogy maradjon holnapra is. Mikor hazaérkezett, akkor a maradék palacsinták és a +9 palacsinta $\frac{2}{3}$ -át ette meg és így maradt még másnapra 13 palacsinta.

Mennyi palacsintát evett meg Gergő? _____

Mennyit evett meg Attila? _____

Mennyit evett meg Gyöngyi? _____

Mennyi palacsintát készített Zsófi? _____

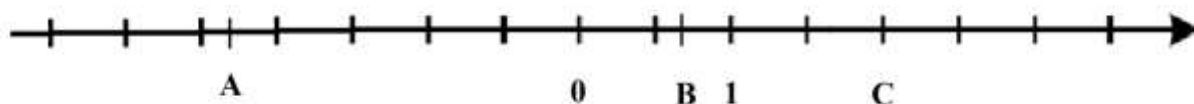
A palacsinták hányad részét ették meg ketten együtt, Attila és Gyöngyi? _____

A feladatsor első változatának kidolgozásában Szabó Csaba tanár úr, Fried Katalin és Vásárhelyi Éva tanárnők segítettek. Közös tárgyalták meg és elemezték ki az útmutatásuk alapján elkészített feladatokat, mind minőség, mind nehézség szempontjából. A változtatásokra azért volt szükség, hogy a mai oktatásnak megfeleljen, és hogy azonnal rájöhhessünk a típushibákra. A javaslatuk alapján végeztem néhány átalakítást a feladatokon. Az első feladatból kivettük a valós és az áltörtes részt, mert ezek a szavak elavultnak bizonyultak, a Nemzeti Alaptantervben sem szerepelnek már. A reciprokos feladatot is eltöröltük, mert félrevezető lehet, hiszen azt sugallja, hogy csak egy tört reciproka az $\frac{5}{3}$ -nak. A céljainkat jobban szolgálta az, hogy a harmadik feladatot egy olyan változatra cseréljük le, amely egyszerűbb példákat tartalmaz, hiszen ezekből jobban megállapítható, hogy el tudják-e végezni az alapműveleteket a tanulók vagy sem. A negyedik, illetve az ötödik feladat esetén a megfogalmazáson csiszoltunk. A negyedik feladatban kitettük a relációjeleket és az egyenlőségjeleket, hogy a tanulók tudják, hogy mik közül választhatnak. Az utolsó feladatban annyit módosítottunk még, hogy a 30 percet átírtuk tört alakba, és ezzel kapcsolatban még egy kérdést feltettünk. Erre azért volt szükség, mert ezen keresztül tudtunk képet kapni arról, hogy a tanulók a törteket automatikusan leírják, és azokkal számolnak, vagy megpróbálják értelmezni a feladatot. A változtatások és többszöri egyeztetés után elkészült a végső feladatlap.

Feladatlap végső változata

- 1) Ábrázold a következő törteket az alábbi számegyenesen, majd válaszolj a kérdésekre!

$$\frac{0}{7}; \frac{5}{3}; -\frac{6}{5}; 2\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; -1\frac{5}{4}; \frac{3}{6}; -\frac{35}{0}$$



a) Határozd meg $A=$ ____, $B=$ ____, és $C=$ ____-t!

b) Keress egy olyan racionális számot, amely az $\frac{5}{3}$ és a C közé esik!

2) Karikázd be a helyes választ!

• Azt mutatja meg, hány részre van osztva az egész.

a, törtvonal b, nevező c, számláló d, tört

• $2:5=\frac{4}{10}$ műveletben az 5 az a (z)...

a, osztó b, osztandó c, hányados d, nevező

• Kettő egész három ötöd és a mínusz négy harmad különbségének a négyszerese

a, $2\frac{3}{5}-\frac{4}{3}\cdot 4$ b, $2\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 4$ c, $\left(2\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\cdot 4$ d, $4\cdot 2\frac{3}{5}-\frac{4}{3}$

• Milyen művelet van a $2\frac{2}{3}$ között?

a, szorzás b, osztás c, összeadás d, kivonás

3) Végezd el a műveleteket és add meg a legegyszerűbb formájában!

a)

$$\frac{64}{9}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot 1\frac{1}{2}=$$

d)

$$\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{4}{60}+\left(-1\frac{2}{5}\right)=$$

b)

$$-\frac{15}{16}\div(-5)=$$

e)

$$\left(-\frac{5}{50}\right)\div\frac{3}{15}+\frac{3}{11}=$$

c)

$$\frac{8}{32} + \frac{11}{64} =$$

f)

$$\frac{8}{11} - \frac{10}{11} =$$

- 4) Hasonlítsd össze a két törtet egymással, tedd ki a megfelelő relációs jelet (<, =, >)!

$$\frac{8}{9} \boxed{} \frac{3}{4}$$

$$2\frac{1}{7} \boxed{} \frac{13}{16}$$

Mely a, b, c és d értékekre teljesül az egyenlőség!

$$2\frac{1}{a} = \frac{245}{105}$$

$$\frac{b}{35} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{104}{13} = \frac{c}{d}$$

a=_____

b=_____

c=_____

d=_____

- 5) Vedd fel a N, Q és Z halmazokat egy ábrán, figyelve hogy melyiknek melyik a részhalmaza, majd írd be a felsorolt törtet a megfelelő helyre!

$$\frac{5}{7}; \frac{0}{8}; -\frac{2}{3}; -\frac{6}{2}; 1\frac{3}{3}; 2\frac{3}{6}$$

- 6) Zsófi palacsintát sütött a családjának. Mikor Attila hazaérkezett este 6-kor, akkor megette a palacsinták $\frac{4}{8}$ -át. $\frac{1}{2}$ órával később Gergő is megérkezett és a maradéknak a $\frac{2}{5}$ -ét ette meg. Este, mielőtt Gyöngyi haza ment volna vett a boltban még 9 palacsintát a biztonság kedvéért, hogy maradjon holnapra is. Mikor hazaérkezett, akkor a maradék palacsinták és a +9 palacsinta $\frac{2}{3}$ -át ette meg és így maradt még másnapra 13 palacsinta.

Mennyi palacsintát evett meg Gergő? _____

Mennyit evett meg Attila? _____

Mennyit evett meg Gyöngyi? _____

Mennyi palacsintát készített Zsófi? _____

A palacsinták hányad részét ették meg ketten együtt, Attila és Gyöngyi? _____

Hánykor ért haza Gergő? _____

Az első feladatot azért készítettem, mert a törtek számegyenesen történő ábrázolása jelentős szerepet játszik abban, hogy a gyerekek megértsék, mi a törtek nagyságrendje. Továbbá egyenlő törtek ábrázolásakor tapasztalhatják a bővítés, egyszerűsítés lényegét. Ezért az ábrázolós feladat egyszerű, viszont nem triviális az $1/b$ feladat miatt. Mindemellett megtudhatjuk azt is, hogy le tudják-e olvasni az értékeket a számegyenesről. Ezt nehéz részfeladatnak érzem, mert a számegyenesen a szakaszok nem voltak felbontva egyenlő részekre, hogy pontos megoldást kapjunk számolással.

A „karikázd be a helyes választ” a számonkérés egyik alapvető formája. Fontos megnevezni a dolgokat, mert beszélni kell róluk, tudni kell mely a nevező, milyen műveletet közvetít egy ilyen tört, és ha nem tudjuk, melyiknek mi a neve, akkor nagyobb az esély, hogy elrontjuk a velük való számolást, mert a neveknek jelentőségük van.

A harmadik feladat négy rövid és két kifejtős feladatot tartalmaz. Ezekben a feladatokban található negatív előjelű tört, összeadás, kivonás, szorzás, osztás. Minden, ami jelzi azt, hogy a tanulók rendelkeznek-e az alpműveletekhez tartozó megoldó képességgel vagy sem.

A relációs feladat azért készült, hogy lássam, hogy egy sima, egyszerű törtet tartalmazó egyenletet meg tudnak-e oldani a tanulók. Ebben a részben volt olyan feladategység, amelyet máshogy értelmez egy általános és egy középiskolás diák, mint egy egyetemista, mert a c-t és d-t is ismeretlennek vettük, így nem egyértelmű a megoldás.

Az ötödik feladat rákérdez a számok osztályba sorolására. Ebben a részben tudni szeretném, hogy hogyan viszonyulnak a diákok az egész és a negatív számokhoz. Tudják-e, hogy mely halmazba tartoznak, mert a NAT alapján ennek fontos szerepe lesz még tanulmányaik során. Ezt a feladatot egyszerűnek gondoltam, így

tettem bele néhány trükkösebb törtet, ahol átalakítás után láthatták, hogy természetes számról van szó.

Az utolsó feladat egy szokványos szöveges feladat, amire szintén többféle megoldásmenetet lehet alkalmazni, például egyenletrendszer megoldását vagy szakaszos ábrázolást. Az időre vonatkozó kérdést azért tettem a feladatba, hogy lássuk, mennyire stabil a tudásuk, összezavarodnak-e egy ilyen figyelemelterelő tényezőtől. Itt arra voltam kíváncsi, hogy ha egy diák nekilát a számolásnak, akkor kellő alaposággal dolgozza-e fel a szöveget ahhoz, hogy az idővel kapcsolatos törtet külön kezelje a többitől vagy sem.

A feladatsor elkészítése után ismételten felkerestem az iskolákat, hogy minél több évfolyamban megíráthassam a feladatsoromat és visszaigazolást vagy cáfolatot kapjak a típushibákkal kapcsolatos előzetes feltételezéseimről.

A pontozás kialakítása

A pontozás során próbáltam sok részpontszámra bontani az összpontszámot, hogy pontosabb eredményt kapjak. A dolgozatok egy részét a validitás érdekében, Vas Vivien függetlenül lepontozta. A pontozást Szabó Csaba tanár úr és Fried Katalin tanárnő is leellenőrizte.

Az első feladatot három részre tagoltam.

Az első rész, amikor el kellett helyezni nyolc közönséges törtet a számegyenesen. Minden egyes helyesen elhelyezett törtért fél pontot adtam. Így összesen négy pontot lehetett elérni. Arra is járt a pont, ha a törteket tizedes törtté átalakították és úgy helyezték el a számegyenesen helyesen (kevés diáknál, de előfordult).

A második egység az a) feladat volt, ahol a számegyenesen be volt jelölve három érték, melyet betűvel jelöltem. A betűk helyes meghatározásáért szintén fél-fél pontot adtam, így ezzel a feladatrésszel összesen másfél pontot tudtak szerezni a diákok. Mivel a számegyenesen az intervallumokon belül nem voltak pontok jelölve, ezért több megoldást is elfogadtam, a lényeg az volt, hogy a válaszuk reális legyen. Tehát például aki a B helyére 0,6-ot, 0,66-ot vagy 0,7-et írt azt elfogadtam. Azért írtam én is tizedes törtben a példákat, mert annak ellenére, hogy

a feladatsor közönséges törtéről szólt, volt néhány tanuló, aki tizedes törtet használt. A tizedes törtet is elfogadtam jó válasznak, ha helyeset adtak meg.

A harmadik részben egy pontot lehetett szerezni. Fél pont járt arra, ha egy helyes megoldást írtak le, és a másik fél pont arra járt, ha láttam számolást is, hisz itt bővíteni kellett a törtet és ehhez szükséges számolást végezni.

A második feladatban az abcd részfeladatok mindegyikében, a helyes válasz betűjelének bekarikázásáért egy-egy pont járt, így négy pontot lehetett összesen elérni. Ennél a feladatnál nem lehetett részpontszámot adni, mert itt vagy jó a megoldás, vagy nem, nincs köztes opció.

A harmadik feladatban összesen 14 pontot lehetett elérni.

Az a) feladatban 2,5 pont volt a maximális pontszám, amit úgy lehetett elérni, hogy 1 pont járt arra, ha a három tényezőtől kettőt helyesen összeszorozott, fél pont járt arra, ha a vegyes törtet átalakította helyesen közönséges alakba és még 1 pont járt arra, ha helyesen elvégezve a szorzást megkapta a megoldást.

A b) feladatban 2 pontot lehetett elérni azzal, ha tudta a diák az osztási szabályt és az osztónak a reciprokát véve az osztásjelet szorzásjelre cserélte és még egy pont járt, ha a szorzást elvégezve helyes végeredményt kapott.

A c) feladatban 3 pont járt annak a tanulónak, aki tudta, hogy a +- előjelből – lesz (0,5 pont), a vegyes törtet helyesen közönséges törtté alakította (0,5 pont), helyesen hozott közös nevezőre (1 pont) és a végeredménye is jó volt (1 pont).

A d) feladatban 3,5 pont volt a maximálisan elérhető pontszám. 1 pont járt, ha tudta alkalmazni az osztási szabályt, így az osztónak vette a reciprokát és az osztás műveleti jelet szorzásra cserélte. További fél pont járt, ha a szorzást helyesen végezte el. 1 pont járt a közös nevezőre hozásért és még 1 pont a végeredményért.

Az e) feladatban 2 pont akkor járt, ha a közös nevezőre hozás és a végeredmény helyes volt.

Az f) feladat 1 pontot ért, ami akkor járt, ha a végeredmény korrekt volt.

Azoknál a feladatrészeknél, ahol a végeredmény negatív szám és az előjelet elhagyták, vagy a törtnek nem a legegyszerűbb alakját adták meg, ott 0,5 pontot levontam.

A negyedik feladatot két részre osztottam. 2 pontot lehetett kapni akkor, ha a relációjelek helyesek és 4 pontot, ha az egyenlőség jelet igazzá tették. Az utolsó résznél, ahol a c-t és a d-t kellett meghatározni, ott több helyes megoldás is létezik, így, ha akár csak egy jó megoldást írtak, akkor már járt a pont. Persze, ha csak a c lett helyes és a d helytelen, akkor nem tudtam rá pontot adni, mert akkor az egyenlőség nem lenne igaz. Tehát így összesen 6 pontot lehetett kapni ebben a feladatban.

Az ötödik feladatban 1 pont járt, ha helyesen vette fel a halmazokat és jelölte azokat. Majd fél-fél pont járt, ha helyesen helyezte el a törteket az ábrában. Így összesen 4 pontot lehetett szerezni. Itt a diákok kaphattak részpontoszámot azzal, ha egy törtet nem a legszűkebb halmazba írtak. Például a $-\frac{6}{2}$ -et, ha nem az egész számok halmazába helyezte el, hanem a racionális számok halmazába, akkor 0,25 pontot adtam, mivel igaz, hogy racionális szám, de nem találta meg a legszűkebb halmazt, amibe beletartozik.

Az utolsó feladatnál a maximális pont 6,5 pont volt. Fél-fél pontot kaptak a tanulók akkor, ha a kérdésekre helyesen válaszoltak. A maradék három pont pedig a helyes számolásért járt.

A feladatsor során 41 pontot lehetett szerezni. Mindegyik dolgozatot osztályoztam is, mintha az iskolában ez egy dolgozat lett volna. A határok a következőképpen alakultak:

90%-100% → 5

75%-89% → 4

55%-74% → 3

40%-54% → 2

0%-39% → 1

Majd minőségileg is osztályoztam a gyerekeket, ami azt jelenti, hogy azoknak a feladatoknak a pontszámát nem számoltam bele az összpontszámba, amihez hozzá se kezdtek. Majd a fenti százalékok alapján úgy is osztályoztam őket.

FELADATSOR MEGÍRATÁSA, ÉRTÉKELÉSE

Azokat az iskolákat kerestem meg először is, akik már a típushibák összegyűjtésében is segítettek, majd több másik középiskolát is meglátogattam. Sajnos számtalan iskola elutasította az ismételt vagy új együttműködést. Néhány visszautasítást idézek fel részletesebben a következőkben.

- *Igazgató:* Sajnálom, de nem tudunk segíteni. Már így is szívességet tettünk azzal, hogy tanáraink megmutatták a feladatsorainkat. Nem várhatom még azt is el tőlük, hogy építsék be az órájukba az ön feladatsorát.

Ebben az esetben (és néhány más hasonló helyzetben) próbáltam meggyőzni az igazgatót, hogy nem muszáj azonnal megíratni a feladatlapomat, hanem egy hónapon belül bármikor jó, mert így a tanárok jobban be tudják építeni a tananyagukba. Azt is próbáltam hangsúlyozni, hogy nem szükséges matematika órán megoldatni a feladatokat a diákokkal, hanem egy helyettesítésen is teljesen megfelel, ahol a tanár az adminisztrációs ügyeit tudná intézni. Ezen felül a feladatlapomat nem kötelező órán megíratni, házi feladatként is fel lehet adni a diákoknak, mert jó gyakorló feladatsor lenne számukra. Dolgozat helyett is lehet használni, melyet én javítanék ki és értékelnék, majd visszajuttatnám az eredményeket az iskolának, így a tanárokról levenném a terhet. Próbálkozásaim ellenére nem tudtam meggyőzni ilyen esetekben az igazgatókat.

- *Igazgató:* Hozott példányokat, amelyeket ki tudunk osztani az osztályokban?
- *Én:* Igen, hoztam egy minta feladatsort és abban bíztam, hogy az iskola tudna engem támogatni egy osztálynyi másolat készítésével.
- *Igazgató:* Kedves hölgyem, nekünk ki van számolva mennyit nyomtathatunk, mennyi papírt használhatunk, ha azt a limitet túllépjük, akkor nekünk fizetni kell, tehát ebben egyáltalán nem tudunk segíteni. Az ön érdeke, hogy ez a dolgozat meg legyen íratva, ezért be kellett volna fektetni pénzt ebbe az egészbe, készülnie kellett volna minimum 200

másolattal, amit az iskolánknak csak kiosztania kellett volna. Így sehogy sem vállalhatjuk ezt el, ha lesz annyi példánya, akkor talán beszélhetünk róla, addig felesleges. De szerintem egyik iskola se fog így segíteni önnek.

Ez csak egy iskolában történt meg. A legtöbb iskola, függetlenül attól, hogy általános iskola vagy középiskola, minimum egy osztálynyi dolgozat sokszorosításával és megíratásával tudott támogatni. Általában két vagy három osztálynyit nyomtattak nekem, de az is előfordult, hogy hat osztályból kaptam eredményeket egy iskolán belül.

Voltak olyan esetek, amikor nem technikai, hanem tartalmi okokra hivatkozva utasítottak el.

- *Igazgató:* Úgy döntöttek matematika tanáraink, hogy mivel az első feladatban illetve a negyedik feladatban több megoldás adható, tehát nem egy konkrét szám a megoldás, így kifogásolhatóvá vált feladatsora. Sajnos, így nem tudunk segíteni Önnek.

Külön érdekesség, hogy pont egy középiskolában gondolták zavarónak, hogy pár helyen több megoldás is születhet. Próbáltam megtudni, mi ebben az aggálykeltő, ha én az összes helyes megoldást elfogadom, így a gyerekeknek semmilyen hátránya nem keletkezik a pontozás során. Választ a kérdésekre nem kaptam.

Néhány további reakció:

- *Tanár:* Nagyon erős dolgozatot állított össze. Ha be kéne kategorizálni, akkor azt mondanám, hogy ezt egy versenyfeladatsornak tudnám elképzelni a nyolcadikosok körében, de azt is leginkább év vége felé.

Ezt a véleményt egy szakközépiskolás tanár fogalmazta meg, ami meglepő, mert a feladatsor 6. osztályos feladatokra épül.

- *Tanár:* Ne érje meglepetés, ha az első számegyeneses feladat üresen maradt, mert annyira nem ment ez a tananyag az osztálynak, hogy inkább az alapokra helyeztem a hangsúlyt. Viszont mondtam nekik, hogy ha a harmadik feladatot nem tudják megcsinálni, akkor megbuktatom az egész osztályt.

Itt ugyanazt tapasztaltam, mint mikor a típushibákat gyűjtöttem össze, akkor is néhány tanár a tanulási nehézségekről számolt be.

- *Igazgató:* Tizenkettedik osztályban nem lesz megíratva, mert nekik az érettségire kell készülniük és nem zavarhatjuk meg őket ezzel.

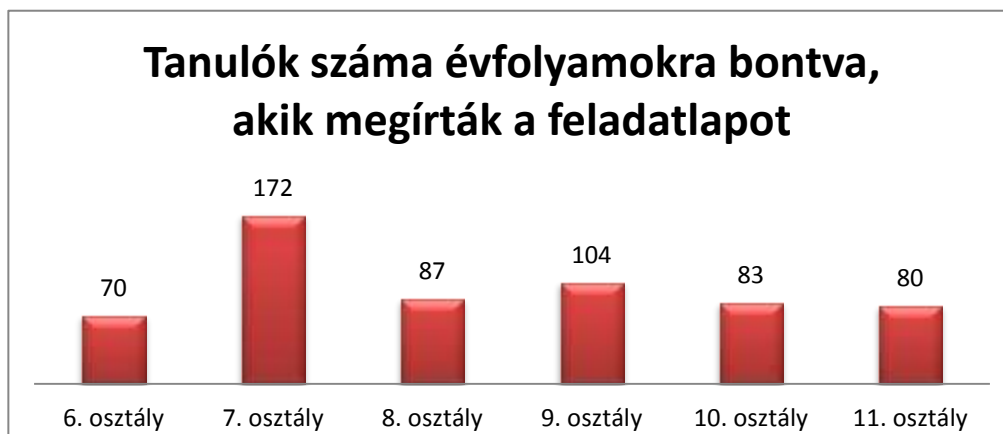
A középiskolák a 12. osztályban nem engedték a feladatsor megíratását, valamint feltételként szabták, hogy a diákok számológépet is használhassanak.

Rengeteg olyan iskola volt, amelyek nem segítettek nekem, köztük olyanok is, amelyek a kutatásom első részében már hozzájárultak a kutatásban való részvételhez. Ennek ellenére sok iskola részt vett a kutatás folytatásában: Arany János Általános Iskola, Bánki Donát Gimnáziuma és Szakgimnáziuma, Hild József Szakgimnázium, Kereskedelmi és Vendéglátóipari Szakgimnáziuma és Szakközépiskolája, Móricz Zsigmond Általános Iskola, Rosti Pál Gimnázium és Általános Iskola, Rudas Közgazdasági Szakgimnáziuma és Kollégiuma, Szabó Magda Református Tagintézmény, Széchenyi István Gimnázium és Kollégium, Vasvári Pál Általános Iskola. Az iskoláknak köszönhető, hogy 596 db diákhoz jutott el a feladatsorom. Felajánlottam a segítő iskoláknak, hogyha szeretnék, akkor visszajuttatom a kijavított dolgozatokat vagy az eredményeket, hogy a tanulók tanulhassanak hibáikból és a tanárok is visszajelzést kapjanak. Csak két tanár élt ezzel a lehetőséggel. A többi tanár nem szeretett volna visszacsatolást, mert biztosak voltak osztályaik teljesítményeikben és megfogalmaztak valami sarkos véleményt, mint például: „Értékelni se tudnám az eredményeiket, mert szinte biztos vagyok benne, hogy mindenki elégtelent ír.”. Így általában a középiskolás tanárok nyilatkoztak.

ÉRTÉKELÉS

Adatok összegyűjtése

A feladatlapok értékelése előtt előbb összesítettem, hogy melyik évfolyamból hány diák vett részt. Az értékeket a 7. ábra nevű diagramon ábrázoltam. A grafikon jól mutatja, hogy sikerült szinte minden évfolyamból ugyanannyi feladatlapot megíratni, kivéve 7. osztályban, ahol kimagaslóan sok gyűlt össze. Az összes (596 db) feladatlap áttanulmányozása után egy teljesebb képet kaptam a típushibákról, melyeket a tanulók követnek el a feladatok megoldása közben.



7. ábra. Megírt feladatsorok mennyiségének lebontása évfolyamokra nézve

Osztás	1. FELADAT			2. FELADAT				4. FELADAT						
	Üres	1/a-ban adott tört a megoldás	Tíz. tört használata	a	b	c	d	a	b	c	d	Nincs köz.nevező	Tíz. tört használata	Üres
	%													
11.	8,7	7,5	25	40	28	35	67	50	32	38	37	68	8	1
10.	9,6	9,6	34	43	24	31	61	33	10	16	16	80	6	4
9.	18	14	14	43	20	31	61	19	9	10	6	66	2	3
8.	3,4	9,1	28	20	24	25	68	27	18	13	14	31	1	1
7.	12	18	19	37	26	37	67	30	17	8	8	53	1	2
6.	7,1	10	17	32	22	27	42	42	40	7	7	32	0	0

8. ábra. Az 1., 2. és 4. feladatokban előfordult hibák felsorolása, előfordulásuk gyakoriságának megadása százalékosan évfolyamokra bontva

Az első feladatnál (8. ábra) három szempontot vizsgáltam meg: hányan hagyták teljesen üresen a feladatot, hányan használták fel az adott törtet az 1/a feladategységben és hányan használták a tizedes törtet a közönséges tört helyett. Az látható, hogy minél idősebbek a tanulók, annál szívesebben használják a tizedes törtet. Ha a legjobb átlageredményt nézzük bármely évfolyamon, akkor is csak 2,7 pontot érnek el a tanulók a 6,5-ből.

A 11. évfolyamban három érdekes dolgot láttam. Az első az volt, hogy valaki a számegyenest próbálta felbontani egyenlő részekre úgy, hogy a törtet el tudja helyezni rajta. Ezen kívül egyetlen eset volt, ahol a diák közös nevezőre hozta az összes törtet, majd úgy helyezte el azokat. Viszont láttam olyan feladatlapot is, ahol a tanuló nem tudta, mit kezdjen a $-\frac{35}{0}$ törttel, mert nem tudta értelmezni az előtte szereplő előjel miatt. 10. osztályban egy diák a számegyenes fölé írta, hogy a 0-tól a jobb oldali rész a „+”, míg a bal a „-” rész, ezzel is segítve magát. Míg

egy 8.-os diák csak egy „NOPE” feliratot írt az egész feladathoz. A tapasztalataim alapján a diákok nem tudják a számegyenesen elhelyezni a törteket, nem tudják melynek mi az értéke. Az 1/b résznél számolást nem használtak, csak tippeltek egy törtre.

A második feladat (8. ábra) fontosságát már korábban említettem: enélkül nem tudnak a diákok mire építkezni, sok hibát követnek el, ha ez nincs jól a fejükben. A táblázatban láthatjuk, hogy mely kérdést, az évfolyamra járó diákoknak hány százaléka rontotta el. Ebből a két leggyakoribb hiba az „a” és a „d” részben fordult elő. Ezeknél az egységeknél látszik, hogy van olyan évfolyam, ahol a diákok 67%-a nem tudta a választ. Egy diák általában két hibát ejtett ebben a feladatban és közülük az egyik szinte mindig a „d” volt. A legjobb átlagpontszám egy évfolyamon belül 2,5 volt a 4-ből, míg a legrosszabb éppen eléri az 1,6-os átlagpontszámot. Ezt a feladatot könnyűnek és gyorsan elvégezhetőnek gondoltam, de a felmérések alapján a diákoknak már az alapfogalmakkal is nehézségeik vannak.

A negyedik feladatban (8. ábra) megnéztem, hogy az „a, b, c és d” részben a diákok hány százaléka rontotta el a választ. Azt is figyelembe vettem, hogy hány százalékuuk használ tizedes törteket ahhoz, hogy össze tudják hasonlítani a törteket egymással. Megfigyeltem, hogy a tizedes törtet nem használó diákoknak hány százaléka nem használt közös nevezőt az összehasonlításnál. Meglepő eredményt kaptam: volt olyan évfolyam, ahol a tanulók 80% -a nem használt semmilyen összehasonlítási technikát a törtek között. Azonban voltak kivételes esetek is. 6., 8. és 9. osztályban volt 1-1 diák, akik modellezve, körcikket rajzolva hasonlította össze a törteket. 7. osztályban egy diák keresztbe egyszerűsítést végzett, míg 10. osztályban olyan megoldásokat írtak a diákok a feladat egyes részéhez, mint „Nem, Igen...”, „a=c, b=d...” vagy „Igaz, Hamis...”. Ebben a feladatban a legjobb pontátlag a 3,2 volt. Ennél a feladatnál egy esetben válasz helyett egy rajzot találtam, ahol a tanuló egy fa alatt ül, és arra gondol, hogy egyest kap - pedig a koncepcióm az volt, hogy aki egy jó megoldást ír, azt elfogadjuk (gondolva itt a „c és d” feladatra). Összesen két hetedikes diák volt, akik ezt a feladatot hibátlanul megoldották.

Ártásl	3.FELADAT													
	Üres	T. tört	(·) Közös nevezőre hoz	Előjel	(+·) össze vonása prob.	Vegyes tört	Egyszerű alak	(-) keresztbe egyszer.	(+) keresztbe egyszer.	(:) keresztbe egyszer.	K. n.-re hozás a prob.	(:) probléma	(+) külön a számaiót és nevezőt ad össze	
	%													
	11.	12	5	12	3	2	7,5	2	2	1	1	1	0	0
10.	25	6	6	3	3	3	6	1	2	2	2	2	2	8
9.	22	min	8	24	5	1	min	1	1	min	8	min	2	
8.	1	28	10	22	13	8	16	6	6	1	11	13	3	
7.	6	0	9	22	12	6	12	2	4	1	11	4	1	
6.	0	0	7	38	18	11	7	4	2	4	14	8	5	

9. ábra. 3. feladatokban előfordult típushibák felsorolása a második sorban. Előfordulásuk gyakoriságának megadása százalékosan évfolyamokra bontva

Miközben a harmadik feladatot (9. ábra) javítottam, gondoltam, hogy néhány alapvető számolási problémával találkozom majd, mint a közös nevező eltévesztése, osztásnál a reciprokt, illetve az egészek átírása közös nevezőre törtté, azonban ekkora mennyiségű hibára nem számítottam. Összesen 15 féle típushibát találtam, melyből 11-et soroltam fel a táblázatban (9. ábra). Jelöltem még azt is, hogy hány százalékban hagyták üresen a feladatokat és a tizedes törtek használatának gyakoriságát. A hibatípusok a következők voltak.

- Szorzásnál közös nevezőre hozzák a törteket

$$\frac{64}{9} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{512 \cdot (-27) \cdot 36}{72}$$

- Előjel elhagyása

$$\left(-\frac{5}{50}\right) : \frac{3}{15} + \frac{3}{11} = -\frac{15}{30} + \frac{3}{11} = \frac{11}{22} + \frac{6}{22} = \frac{17}{22}$$

- Nem tudják, hogy a +- előjelből mi lesz

$$\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{4}{60} + \left(-1\frac{2}{5}\right) = \frac{86}{60} + \frac{84}{60} = \frac{170}{60}$$

- Vegyes tört átírása közös nevezőre

$$-1\frac{2}{5} = \frac{72}{60} \qquad 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Egyszerűbb alak megadása

$$\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$

- Kivonásnál keresztbe egyszerűsítés

$$1\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{4}{60} = \frac{10}{20}$$

- Összeadásnál keresztbe egyszerűsítés

$$\frac{8}{32} + \frac{11}{64} = \frac{11}{32}$$

- Osztásnál keresztbe egyszerűsítés

$$1\left(-\frac{5}{50}\right) : \frac{3}{15} = -\frac{1}{10}$$

- Közös nevezővel kapcsolatos problémák

$$\frac{8}{32} + \frac{11}{64} = \frac{8}{64} + \frac{11}{64} \qquad \frac{8}{32} + \frac{11}{64} = \frac{8}{12} + \frac{11}{12}$$

- Osztásnál nem veszik az osztó reciprokát, vagy ha igen, akkor nincs szorozás, de az is előfordul, hogy az osztandó reciprokját veszik

$$-\frac{15}{16} : (-5) = \frac{80}{15}; \quad -\frac{15}{16} : (-5) = -\frac{15}{16} \cdot 5 = -\frac{75}{16}; \quad -\frac{15}{16} : (-5) = \left(-\frac{15}{16}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$$

- Összeadásnál külön a számlálók és külön a nevezők összeadása

$$\frac{8}{32} + \frac{11}{64} = \frac{19}{96}$$

A maradék négyféle hibát csak 1-1 évfolyamon belül néhány diák követte el, azaz a relatív gyakorisága $\sim 1\%$, így a táblázatba nem jelöltem, de itt megemlítem. A maradék 4 hibatípus:

- Osztásnál közös nevezőre hozás

$$\left(-\frac{5}{50}\right) : \frac{3}{15} + \frac{3}{11} = \left(-\frac{825}{8250}\right) : \frac{1650}{8250} + \frac{2250}{8250}$$

- Egész szám átírása közönséges tört alakba

$$(-5) = \left(-\frac{5}{1}\right)$$

- Műveleti sorrend

$$\left(-\frac{5}{50}\right) : \frac{3}{15} + \frac{3}{11} = \left(-\frac{5}{50}\right) : \frac{6}{26}$$

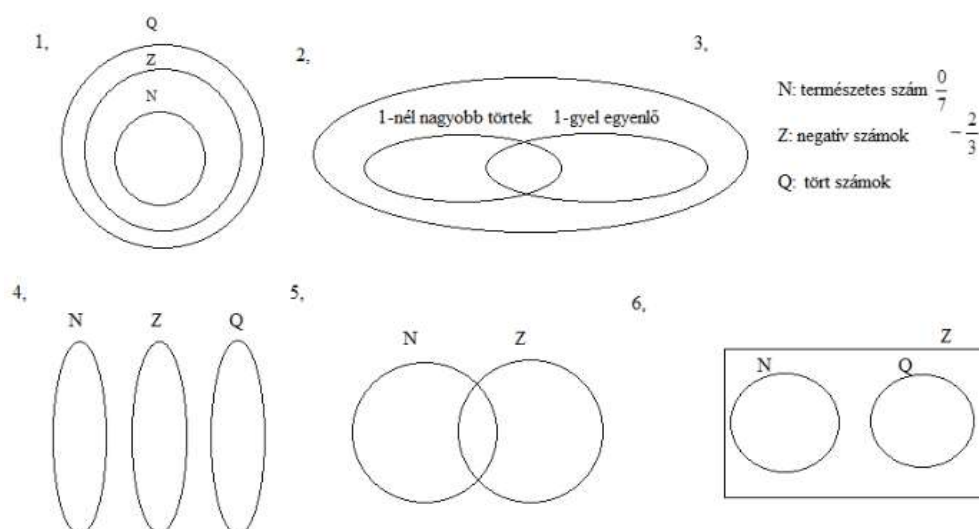
- Közös nevező esetén a nevező elhagyása

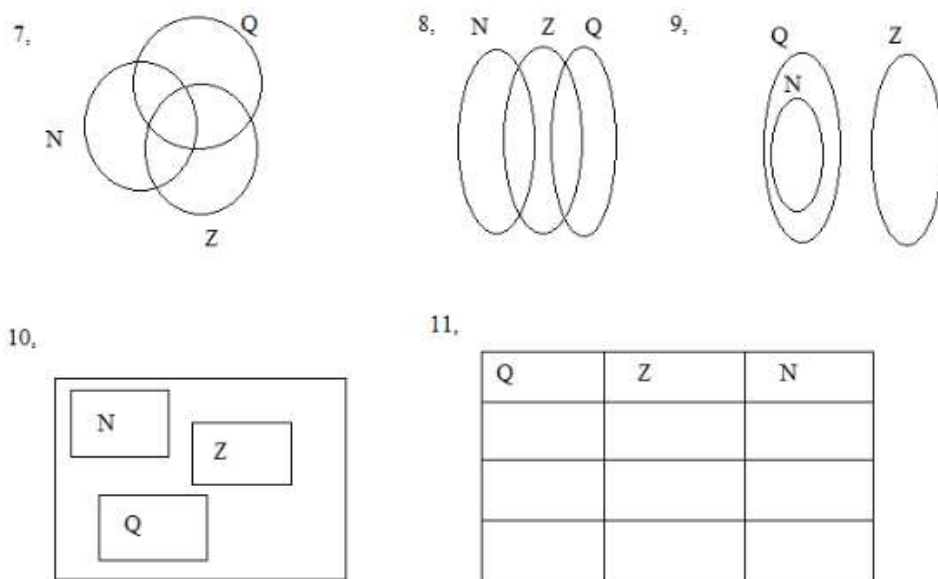
$$\frac{8}{11} + \frac{10}{11} = -2$$

Osztatás % / Átlagos	5.FELADAT	6.FELADAT						
	Üresen hagyja a feladatot	Szöveg adatai a válasz	Szakaszos ábrázolás	Egyszerű levezetés	Üresen hagy	Csak az Idő		Tippel
						Jó	Rossz	
11.	48	6	0	23	22	13	0	13
10.	54	15	0	3	31	15	2	28
9.	52	2	min	15	41	11	2	17
8.	16	10	12	25	6	18	0	12
7.	23	15	9	4	8	11	2	7
6.	10	11	0	1	27	7	4	0

10. ábra. 5. és 6. feladatokban előfordult hibák, problémák, megoldás menetek felsorolása a második sorban. Előfordulásuk gyakoriságának megadása százalékosan évfolyamokra bontva

Az utolsó előtti részbe (10. ábra) raktam trükkösebb törteteket is, hogy jobban felmérjem a válaszadók megértési szintjét. A feladat a legtöbb diáknak nagyon nehezen ment, már ott elakadtak a tanulók, hogy a halmazokat helyesen lerajzolják. Mivel a rajzok nem sikerültek, így nem tudták jó helyre elhelyezni a törteteket sem. Ezért ennél a feladatnál rengeteg részpontoszámot adtam. A részpontoszám már akkor is járt, mikor egy törtet egy bővebb halmazba helyeztek el és nem a legszűkebbbe. A halmazokat 11 féleképpen vették fel (11. ábra):





11. ábra. Számhalmazok ábrázolása 11 féleképpen a diákok által

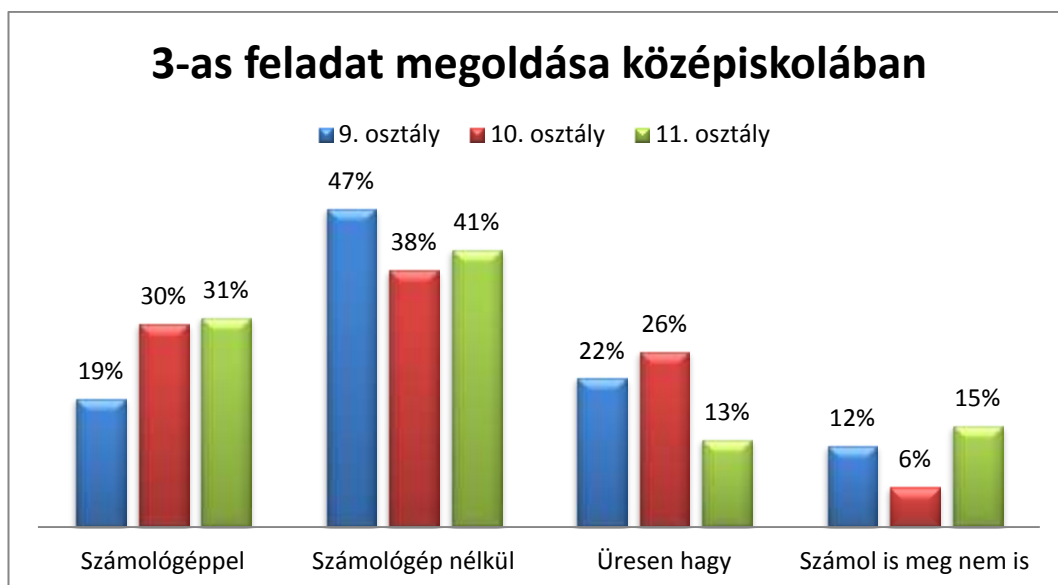
A táblázatból kiderül, hogy az idő előrehaladtával egyre rosszabbul teljesítenek a ebben a típusfeladatban a diákok, az évek során csökken az ehhez szükséges feladatmegoldó képességük. Középiskolában, szinte az összes évfolyamban, az összes diák 50%-a még neki se lát a feladatnak.

A legrosszabb eredményt az utolsó feladatnál (10. ábra) érték el a tanulók. A legjobb átlagpontszám 1,2 a 6,5-ből, a többi évfolyam még az 1-et sem éri el. Fontosnak tartottam ennél a feladatnál, hogy a gyerekek által adott megoldások közül többfélét összegyűjtsek. Sokan a szövegben megadott közösleges törtet adták meg válaszként a feladatra, számolás nélkül. Olyan is előfordult, hogy csak az „Idő”-vel tudott foglalkozni a diák. Szerencsére a tanulók többsége nem esett abba a hibába, hogy az adatokat leírja és elkezd számolni anélkül, hogy a szövegre figyelne. Persze akadt néhány kivétel is, ahol a diák csak az „Idő”-vel foglalkozott, de nem sikerült pontosan megadnia. Rengetegen nem kezdtek hozzá a feladatnak, amelynek egyik lehetséges indoka az lehet, hogy nem tudták értelmezni a szöveges feladatot, nem tudták átírni a matematika nyelvére. Volt két megoldásmenet, amit nem említettem meg a táblázatban, mert a relatív gyakoriságuk nem haladta meg a 2%-ot. Az egyik gondolkodási módszer a „gondoltam egy számra”, míg a másik az, hogy tizedes törtet használt a tanuló. A két használt levezetési technika a szakaszokkal való ábrázolás volt, míg a másik

az egyenlettel való megoldás. A többség az egyenlettel való számolást választotta, de nem tudták helyesen felírni az egyenletet, és így csak kevés pontot sikerült szerezniük. Ezzel szemben, akik a szakasszal ábrázolást választották, azok közül sokan hibátlanul oldották meg a feladatot, és mindannyian a felénél több pontot értek el. Azt is észrevettem, hogy azok közül, akik szakasz ábrázolás segítségével oldották meg a feladatot, körülbelül a diákok fele először egyenlet felírása útján kezdett neki a feladatnak, majd miután felismerte, hogy ezen az úton nem tud eljutni a végeredményhez, stratégiát váltott, és szakaszos levezetéssel eljutott odáig.

Pontszámok alakulása a harmadik feladatban

A legjobb átlagpontszám 7,2 volt a maximálisan elérhető 14 pontból. A táblázatban külön feltüntettem a számológép használatát, mert általános iskolákban nem használhattak gépeket a diákok, míg 9. osztálytól már igen. Az eltérő feltétel oka, hogy a középiskolákban az igazgatók - arra hivatkozva, hogy minden törtes feladatot géppel oldanak meg a diákok, mert azokat már ki tudják számolni maguktól is – azt kérték, hogy ennél a feladatlapnál is engedélyezzük a számológép használatát, mi pedig megengedtük. Ennek ellenére az általános iskolásoknak az átlagpontszáma szinte az összes középiskolás évfolyammal összevetve közel dupla annyi.

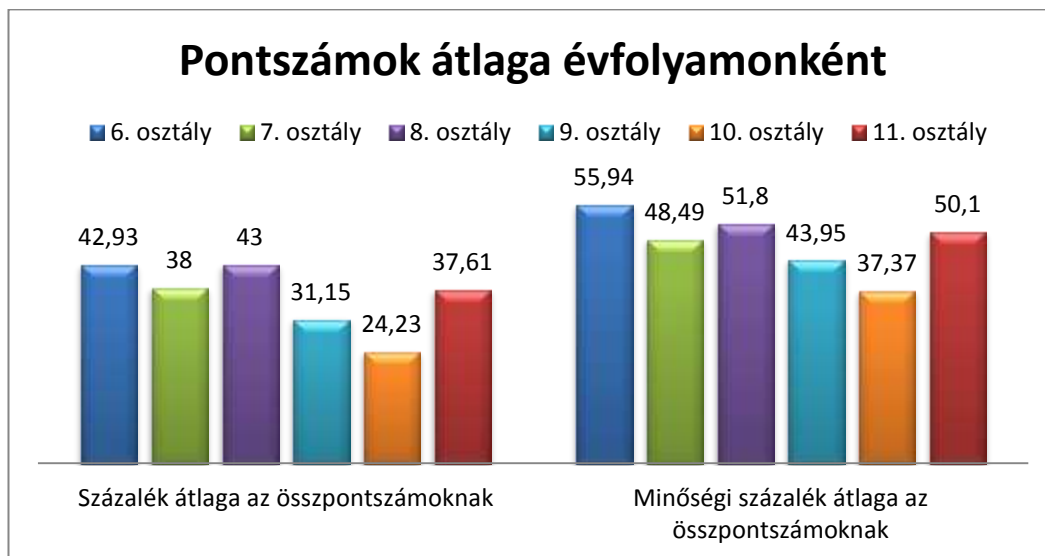


12. ábra. Az első két rész a 3. feladat megoldása hibátlanul segédeszközzel és nélküle százalékos eredményét mutatja. A harmadik azt mutatja, hogy hány százalék hagyta üresen ezt a feladatot a középiskolában. Az utolsó részben van feltüntetve azoknak a száma (százalékban), akik számoltak, de a feladatot félbehagyták

A középiskolákban voltak diákok, akik használtak számológépet a feladatsor megírása során, de sokkal több olyan tanuló volt, akik nem használtak segédeszközt. Volt egy 9. és egy 11. osztály, ahol a diákok nem használhattak gépet. Iskolájuk megkérte őket, hogy saját tudásuk alapján töltsék ki ezt a feladatsort, amely egy 6.-os tudására épül. Ha figyelmen kívül hagyjuk ezt az iskolát, akkor a számológép nélküli részben a százalékok megváltoznak. 9. osztályban a diákok 33%, és 11. osztályban a tanulók 16% nem használt számológépet ebben az esetben. Hasonló százalékokat kaptunk azoknál, akik üresen hagyták a teljes feladatot. Arra is volt példa, hogy a diákok, a könnyebb alpműveleteket írásban kiszámolták, mint például az „e” és „f” feladatok, és a nehezebb példákat a tanulók beírták a számológépükbe, majd a végeredményt leírták a papírra. Az eredményekből arra következtethetünk, hogy minél jobban használják a diákok a segédeszközöket, annál jobban elfelejtik a feladatok megoldás menetét. A gép kiszámolja a végeredményt, amit le is írnak, ezzel értékes pontokat veszítenek, mert nem lehet részpontszámot adni a feladat menetére csak a végeredményre.

Adatok elemzése évfolyamok szerint

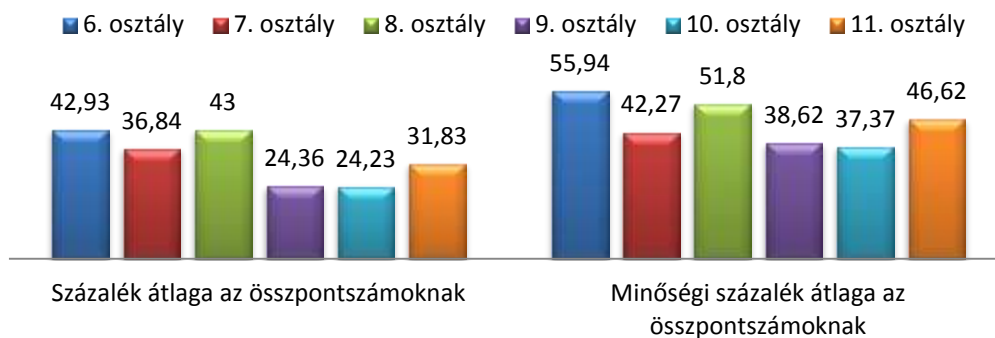
A 13. ábra diagramban összegeztem az eredményeket osztályok szerinti bontásban. Látható, hogy a legjobban teljesítő évfolyam a 8. volt, majd ugyanannyi pontot elérve a 6. illetve a 11. osztály követte. Végezetül 7., 9. és 10. osztályok egymás után.



13. ábra. Az első rész szemlélteti azt, hogy az évfolyamok milyen átlag százalékot értek el a diákok, míg a második részben minőségi értékelést végeztem (amely feladathoz nem nyúlt hozzá a diák, azt nem számítottam hibának) és annak a százalék átlaga van ábrázolva évfolyamokra lebontva

Megváltozik az eredmény akkor, ha a legjobban teljesítő iskolát ismételten figyelmen kívül hagyjuk (14. ábra). A 8. évfolyam marad a legjobban teljesítők között, míg 6. osztály lesz az utána következő. Harmadik lesz a 7., negyedik a 11., ötödik a 9. és hatodik a 10. osztály. Abból, hogy 8. évfolyamban lett a legjobb eredmény, arra lehet következtetni, hogy a felvételi miatt a diákok ezt a témakört átnézték. Ezt követően rosszabbul teljesítenek, míg 11. évfolyamban egy kis javulás látszik a korábbiakhoz képest. Ez utóbbi eredmény önmagában nem értelmezhető széleskörűen annak ellenére, hogy maga a jelenség mindenképpen érdekes.

Százalék átlag osztályokra bontva úgy, hogy a legjobban teljesítő iskola nincs benne



14. ábra. Az első rész szemlélteti azt, hogy az évfolyamok milyen átlag százalékot értek el a diákok, míg a második részben minőségi értékelést végeztem (amely feladathoz nem nyúlt hozzá a diák, azt nem számítottam hibának) és annak a százalék átlaga van ábrázolva évfolyamokra lebontva

A dolgozatok értékelése

A dolgozatokat kétféleképpen pontoztam. Az első módszer körülbelül megegyezik azzal, ahogyan a tanárok értékelik az iskolákban a dolgozatokat: minden feladatra kaptak pontszámot (részpontszámokat is) a diákok. A második pontozási módszerem inkább kvalitatív jellegű volt, hogy a feladatmegoldás minőségét is meg tudjam határozni. Ha egy diák nem kezdett hozzá egy feladathoz, akkor azt nem vettem hibás feladatnak. Az utóbbi alapján a feladatlapokat iskolák és évfolyamok szerint csoportosítottam (van olyan évfolyam, ahol több osztály is). Az iskolákat sorszámoztam, hogy anonimitásukat megőrizsem. Az iskolák eredményeit a 15. ábrában és 16. ábrában összefoglaltam.

Általános iskolák évfolyamainak eredményei minőségi
százalékokban

	6. osztály	6. osztály (2)	7. osztály	7. osztály (2)	7. osztály (3)	8. osztály	8. osztály (2)	Százalék átlag
Iskola 1	65,19		46,9	66,47	41,95	35,93		51,29
Iskola 2	59,96	45,92	54,52	53,35		55,33	65,95	55,84
Iskola 3			36,88	40		51,39	40,7	42,24
Iskola 4			33,19					33,19
Iskola 5			62,21					62,21

15. ábra. Iskolák évfolyamainak eredményei minőségi százalékban (amely feladathoz nem nyúltak hozzá, azt nem számítottam hibának) megadva

Középiskolák évfolyamainak eredményei minőségi százalékokban				
	9. osztály	10. osztály	11. osztály	Százalék átlag
Iskola1	39,72	52	57,7	49,81
Iskola 2	30,33	24,53	30	28,29
Iskola 3	77,86		60,55	69,21
Iskola 4	21,5	36,75	44	34,08
Iskola 5	49,44	33,89		41,67
Iskola 6		42,7	51,83	47,27

16. ábra. Iskolák évfolyamainak eredményei minőségi százalékban (amely feladathoz nem nyúltak hozzá, azt nem számítottam hibának) megadva

A TÖRTEKKEL VALÓ MŰVELETEK ÉRTELMEZÉSE A HÁNYADOSTESTBEN

A törtek és egész számok oktatásához ismerni kell az egész számoknak a fogalmát, az egész számoknak a bevezetését és hogy hogyan keletkeznek a törtek. Alsó tagozatban megtanítjuk a diákoknak az egész számokkal kapcsolatos fogalmakat, míg felső tagozatban már a törteket vezetjük be. A tudás átadásához szükség van tanítási és modellezési elemekre. Vannak olyan felsőbb matematikai elemek, amelyek nem szerepelnek egy matematika órán, mégis ott kell, hogy legyenek a tanárnak a fejében, amikor magyaráz. Ez biztosítja azt, hogy az anyagot pontosan tudjuk, illetve a felmerülő kérdésekre elbizonytalanodás nélkül válaszolhassunk. Ellenkező esetben, felmerülhet olyan kérdés, amire nem tudunk kielégítő választ adni. Ha sokkal többet tudunk, mint egy diák, akkor a diák kérdéseire egészen biztos tudunk majd válaszolni. Most olyan kérdéseket is feszegetni fogunk ebben a dolgozatban, amik a természetből jönnek, amik a definícióból jönnek, meglévő fogalmakból jönnek, és amik felmerülhetnek egyáltalán, mint egy diáknak a kérdése. Megvizsgáljuk, hogy a törteknek melyek azok a tanítási elemei, részei, amelyek szóba jönnek a tanításnál és ezek, hogy kapcsolódnak az algebrai definícióhoz.

Az egyik legtermészetellenesebb dolognak a törtek összeadása tűnik, hiszen ott különböző műveleteket kell végrehajtani. Először közös nevezőre kell hozni, utána összeadni, majd egyszerűsíteni. Nagy kérdés, hogy miért nem választunk valamilyen egyszerűbb összeadási módot. Az összeadást számos módon lehetne természetszerűen definiálni. Gondoljunk csak bele abba, hogy vannak tréfás, és vannak valódi példák arra, hogy hogyan adunk össze számokat és törteket. Ilyen például, mikor megkérdezzük, hogy egy kupac homok és még egy kupac homok az hány kupac homoknak felel meg, amelynek megoldása egy kupac homok lesz. Egy másik valódi példa a sportból jön. Képzeljük el, hogy egy kosárlabdázó húszat dob rá a kosárba, és abból tizenhárom talál be. A dobott százaléka $\frac{13}{20}$ -nak felel meg ebben az esetben. A második félidőben húszat dob rá, és tizenkettőt talál

be a kosárba, melynek a dobott százalékértéke $\frac{12}{20}$ -ad lesz. Az egész mérkőzésen negyvenet dobott rá, és huszonötöt talált be, ami $\frac{25}{40}$ -nek felel meg. Ebből az következik, hogy a dobószázalékot úgy adom össze, hogy a számlálót és a nevezőt külön-külön összeadjuk.

Ezek szerint, hogy a törteket miért kell úgy összeadni, az a természetből nem adódik önmagában, hiszen már a dobószázalék összeadása az nem ugyan az, mint a szokásos összeadás. Mi az, ami természetes módon adódik a természetből? A természetesen adódik az, ha azonos nevezőjű törteket adunk össze, akkor a számlálót összeadjuk. Valójában ezzel is kezdjük a törtek tanítását, hiszen a törteket részekre osztással tanuljuk és így ugyanolyan típusú részeket összeadva természetesen logikusan adódik az, hogy a számlálót adjuk össze azonos nevezőnél. Következőkben először áttekintjük a racionális számok algebrai definícióját. Ezt csak röviden vázoljuk, mert ez része a tananyagnak és nem szeretnénk a tananyagot megismételni. Utána pedig ezeknek a definícióknak alapján megvizsgáljuk, hogy a különböző tanítási elemek miért igazak a matematikán belül. És a különböző tanítási elemeket a törtekkel való különböző szabályokat mikor tanuljuk azok miért igazak akár a hányadostest definíciójából, akár a testaxiómákból. Ezek az elemek: egyszerűsítés és bővítés, azonos alapú törtek összeadása és kivonása, különböző nevezőjű törtek összeadása és kivonása, törtek összeadása egész számmal, szorzás egész számmal, tört szorzás törttel, tört osztása egész számmal, tört osztása törttel, vegyes alakú törtek, szöveges feladatok.

A racionális számok bevezetéséhez szükségünk van az egész számokon való műveletek ismeretére. Az egész számok halmazán összeadás, szorzás, ellentett vagy kivonás műveleteket ismerünk. Ha úgy tekintünk az egész számokra, mint formális gyűrű, akkor az ellentett helyettesíti a kivonást, mert az ellentett hozzáadása jelenti a kivonást. Abban az esetben, ha úgy tekintünk az egész számokra, mint ahogyan középiskolában tanuljuk, akkor nem az ellentettet vezetjük be először, hanem a kivonást.

A racionális számokat a törtek segítségével vezetjük be még ötödik, hatodik osztályban. Először az egységtörttel ismerkednek meg a diákok, majd a törtekkel

való műveletekkel. Egyetemi szintű bevezetése a törteknek a hányadostest segítségével valósul meg. A kérdés, hogy amit felsőben tanulnak a tanulók, azok mennyire illenek a hányadostest fogalmához, illetve melyek azok a tulajdonságok, amelyek a hányadostest definíciójából erednek.

A következőkben megmutatjuk, hogy az iskolában tanított törtekkel való műveletek hogyan teljesülnek formálisan és algebrailag, valamint a racionális számok testében.

A racionális számok bevezetését és a hányadostest definícióját szó szerint másoljuk ki a Bevezetés az algebrába (Kiss, 2007.) című könyvből. Kiss Emil a következőképpen írja le a hányadostestet:

„A racionális számokat úgy kapjuk az egészekből, hogy törteket képzünk. Szeretnénk olyan törtekkel is számolni, ahol a számláló és a nevező polinom (vagy egy általános gyűrű eleme). Erre már szükségünk is lett volna a 3.4.11. Tétel bizonyításhoz, amikor a számelmélet alaptételét akartuk belátni $\mathbb{Z}[x]$ helyett tetszőleges, alaptételes gyűrű fölötti polinomgyűrűben. A 3.4.11. Tétel bizonyítása azáltal válik teljessé, ha a törtek bevezetését precízen elvégezzük (lásd a megjegyzéseket a tétel előtt).

A törtek azért hasznosak, mert osztani is lehet közöttük, tehát egy R gyűrűből egy T testet kapunk. Mindegyik tört az R két elemének hányadosa, ez indokolja a következő elnevezést.

5.7.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a T test az R gyűrűnek hányadosteste, ha R részgyűrűje T -nek és T minden eleme előáll R két elemének hányadosaként.”.

„..., legyen $P = \{(a, b) : a, b \in R, b \neq 0\}$.

Az (a, b) leírásakor az $\frac{a}{b}$ törtre fogunk gondolni.

Van egy másik probléma is. A racionális számok esetén tudjuk, hogy a $\frac{2}{4}$ és a $\frac{4}{8}$ tört ugyanazt a számot adja. Ezért a P halmazban is azonosítani kellene azokat a törteket, amelyekről úgy gondoljuk, hogy az „értékük” egyforma. Mikor lesz a/b

és c/d két ilyen tört? Ha már megvan a T test, akkor a kettő egyenlőségét keresztbe szorozva $ad = bc$ adódik. Legyen tehát $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. Azokat a párokat, amelyekre ez teljesül, azonosítanunk kell.”

„A műveletek bevezetéséhez a törtek szokásos összegét és szorzatát kell fölírunk. Motivációnk az, hogy ha már készen lenne a T test, akkor közös nevezőre hozással

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ és nyilván } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ennek alapján legyen $(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$ és $(a,b)(c,d) = (ac, bd)$.

Ez két művelet, amit a P halmazon értelmeztünk.”

Most pedig térjünk rá néhány olyan szabályra, amelyek felmerülnek a törtek tanítása során.

Törtek egyszerűsítése

Az egyszerűsítés szabálya leírja, hogy a tört számlálóját és a nevezőjét, hogyha ugyanazzal a számmal osztjuk, akkor a tört értéke nem változik.

Az egyszerűsítéshez hasznos tudni a számelmélet alaptételét. Ezt azonban hatodikban nem mondjunk ki, a tétel használatát viszont gyakoroljuk. A számelmélet alaptételét példákon keresztül mutatjuk meg, és megmutatjuk azt, hogy a számok felbomlanak prímszámok szorzatára, és azt is, hogy a legnagyobb közös osztó vagy legkisebb közös többszörös keresésénél a közös tényezőket kell megkeresni. Ez egy procedurális, gyakorlati tanítás, mert az elméletét nem mondjuk el hanem csak azt mutatjuk meg, hogyan kell használni. Ezt a kialakult gyakorlatot tudjuk majd alkalmazni a törtek egyszerűsítésénél és bővítésénél. Egy példa a tízzel való egyszerűsítésre.

$$\frac{50}{100} = \frac{5 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{5}{10}$$

Mielőtt megnéznénk, hogyan használjuk ezt a törtek bővítésénél, azelőtt keressük meg az egyszerűbb alakot. Egyszerűsítésnél gyakran nem a legegyszerűbb alakot keressük, hanem észreveszünk egy számot és azzal egyszerűsítünk, majd találunk még egy számot és azzal is egyszerűsítünk, és így tovább.

Algebrai úton leírva:

$$\frac{a \cdot b}{c \cdot b} = \frac{a}{c}$$

A hányadostestben:

$$(ac, bc) = (a, b)$$

Tudjuk, hogy két tört akkor ekvivalens, ha keresztszorzatuk egyenlők $(ac) \cdot b = (bc) \cdot a$. Ez egyenlő az szorzás kommutativitás és asszociativitás miatt. Tehát a számlálót és a nevezőt lehet osztani ugyanazzal a számmal és akkor egy vele ekvivalens törtet kapunk. A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$$\frac{a \cdot b}{c \cdot b} \text{ számhoz az } a \cdot b \cdot (c \cdot b)^{-1} \text{ valós számot rendeljük. } \frac{a}{c} \text{ számhoz pedig } a \cdot c^{-1}$$

számot rendeltem. Azt kell leellenőrizni, hogy igaz-e, hogy az $a \cdot b \cdot (c \cdot b)^{-1} = a \cdot c^{-1}$

. Mivel $c \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot c^{-1}$ (hisz a $c \cdot b$ inverze $c^{-1} \cdot b^{-1}$ ezért az $a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} = a \cdot 1 \cdot c^{-1} = a \cdot c^{-1}$).

Mostantól fogva az asszociativitást nem írjuk ki mindig, és csak akkor tesszük ki a zárójeleket, hogyha az fontos a bizonyítás szempontjából.

Törtek bővítése

Törték bővítését többször előjön a matematikában. Mikor két különböző nevezőjű törtet össze szeretnénk hasonlítani, vagy amikor összeadjuk, kivonjuk a különböző nevezőjű törtet akkor bővítésre van szükség.

A bővítés azt jelenti, hogy a törtértéke nem változik, de a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a számmal szorozzuk, vagyis igaz hogy az $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Algebrai úton leírva:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

A hányadostestben:

$$(a, b) = (ac, bc)$$

Ugyan azt a levezetést kell használni, mint az egyszerűsítésnél. Keresztszorzatuk egyenlő ($a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c$ -vel). A definíció szerint ennek a két törtnek ugyan az az értéke. Míg az egyszerűsítés és a bővítés a diákok körében komoly problémát okoz addig az algebrai definíciónak közvetlen része, tehát ezt nem is kell bizonyítani, mert része a definíciónak. A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$\frac{a}{c}$ számhoz az $a \cdot c^{-1}$ számot rendelem. $\frac{a \cdot b}{c \cdot b}$ számhoz pedig az $a \cdot b \cdot (c \cdot b)^{-1}$ való számot rendeljük. Azt kell leellenőrizni, hogy igaz-e, hogy az $a \cdot b \cdot (c \cdot b)^{-1} = a \cdot c^{-1}$. Mivel $c \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot c^{-1}$ (hisz $c \cdot b$ inverze $c^{-1} \cdot b^{-1}$ ezért az $a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} = a \cdot 1 \cdot c^{-1} = a \cdot c^{-1}$).

Bővítés testben:

Azt kell leellenőrizni, hogy $ab^{-1} = (ac) \cdot (bc)^{-1}$.

Azt tudjuk, hogy ez megegyezik az $(ac) \cdot (c^{-1}b^{-1})$ az inverz képzés szabályai miatt.

$$(ac) \cdot (c^{-1}b^{-1}) = a \cdot (c(c^{-1}b^{-1})) = a \cdot (cc^{-1}) \cdot b = a \cdot 1 \cdot b = ab^{-1}$$

Azonos alapú törtek összeadása

Egyenlő nevezőjű törteket úgy adunk össze, hogy a számlálójukat összeadjuk, és nevezőjüket változatlanul leírjuk. Egy példa az azonos nevezőjű törtek összeadásra:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Algebrai úton leírva:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

A hányadostestben:

$$(a, b) + (c, b) = (ab + bc, bb)$$

$$(a, b) + (c, b) = (ab + cb, b^2) = (a + c, b)$$

A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$$ab^{-1} + cb^{-1} = (a + c) \cdot b^{-1}$$

A testben az $\frac{a}{b}$ reprezentáció az ab^{-1} felel meg. A testben szerepel az $ab^{-1} + cb^{-1}$

és akkor azt kapjuk a testben a disztributivitás miatt, hogy $(a + c) \cdot b^{-1}$.

Azonos alapú törtek kivonása

Azonos alapú törtek kivonásánál a kisebbítendő számlálójából kivonjuk a kivonandó számlálóját, ennek a különbségét írjuk az eredmény számlálójába, a nevezőt változatlanul leírjuk.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

Algebrai úton leírva:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

A hányadostestben:

$(a, b) - (c, b)$ megegyezik az ellentett hozzáadásával $-(c, b) = (-c, b)$

$(a, b) + (-c, b)$, akkor megegyezik az $(ab - bc, bb)$ -vel.

$$(ab - bc, b^2) \sim (a - c, b)$$

A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$$ab^{-1} - cb^{-1} = (a - c) \cdot b^{-1}$$

A testben az $\frac{a}{b}$ reprezentáció az ab^{-1} felel meg. A testben szerepel az $ab^{-1} - cb^{-1}$

és akkor azt kapjuk a testben a disztributivitás miatt, hogy $(a - c) \cdot b^{-1}$.

Különböző nevezőjű törtek összeadása

Törtek összeadásánál először úgy bővítjük a törteket, hogy közös nevezőjük legyen. A közös nevező legtöbbször a legkisebb közös nevező, ami nem más, mint a legkisebb közös többszörös. Először megmutatjuk, hogy helyes az a módszer, hogy úgy bővítjük a törteket, hogy a közös nevező az az eredeti törtekben szereplő nevezők szorzata legyen, majd utána megmutatjuk, hogy a legkisebb közös többszörös, mint nevező, az is megfelelő.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

Algebrai úton leírva:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Hányadostestben:

Def

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

Hányadostestben pontosan ez az összeadás definíciója. Vizsgáljuk meg azt a kérdés, hogy valóban választható-e a nevezőbe a legkisebb közös többszörös.

Tudjuk, hogy bd a legkisebb közös többszörös. A legkisebb közös többszörös szorozva a legnagyobb közös osztóval $(a, b) \cdot [a, b] = ab$. Ezt a b és a d nevezőkre

alkalmazzuk és $bd = [b, d] \cdot (b, d)$ azaz $[b, d] = \frac{bd}{(b, d)}$, mert a bd a legnagyobb közös

osztó. A legkisebb közös többszöröst előállítjuk úgy, mint két szám szorzata osztva a legnagyobb közös osztóval. $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ a bd -t és a d -t és a b -t

leosztom a legnagyobb közös osztóval $\left(a \cdot \frac{d}{(b, d)} + \frac{b}{(b, d)} \cdot c, \frac{bd}{(b, d)} \right)$. Tudjuk, hogy

az $a \cdot \frac{d}{(b, d)}$ egész, $\frac{b}{(b, d)} \cdot c$ egész és a $\frac{bd}{(b, d)}$ szintén egész, tehát törtet adunk

még mindig össze és így a második legkisebb tényező a legkisebb közös többszörös. Formális definícióból úgy kapjuk meg, hogy használjuk az előbb már tisztázott egyszerűsítést, egyszerűsítettük a törtet a bd legnagyobb közös osztójával. A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$$ab^{-1} + cd^{-1} = a \cdot \frac{d}{(b, d)} + c \cdot \frac{b}{(b, d)}$$

Különböző nevezőjű törtek kivonása

Különböző nevezőjű törtek kivonásánál a törtet egyszerűsítéssel vagy bővítéssel közös nevezőre hozzuk, majd a kisebbítendő tört számlálójából kivonjuk a kivonandó tört számlálóját és a különbségük a számlálóba kerül, míg a nevezőt változatlanul leírjuk.

$$\frac{2}{6} - \frac{3}{4} = \frac{4}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{5}{12}$$

Algebrai úton leírva:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad - cb}{bd}$$

Hányadostestben:

$$(a, b) - (c, d) = (ad - bc, bd)$$

Hányadostestben pontosan ez az összeadás definíciója. Az a kérdés, hogy valóban választható-e a nevezőbe a legkisebb közös többszörös. Tudjuk, hogy a bd a legkisebb közös többszörös, tehát a b és a d számnak a bd a legkisebb pozitív egész szám, amelynek az adott számok mindegyike osztója. A legkisebb közös többszörös szorozva a legnagyobb közös osztóval $(a, b) \cdot [a, b] = ab$. Ezt a b és a d nevezőkre alkalmazzuk és $bd = [b, d] \cdot (b, d)$, azaz $[b, d] = \frac{bd}{(b, d)}$, ahol bd a

legnagyobb közös osztó. A legkisebb közös többszöröst előállítjuk úgy, mint két szám szorzata osztva a legnagyobb közös osztóval. $(a, b) - (c, d) = (ad - bc, bd)$ a bd -t

és a d -t és a b -t leosztom a legnagyobb közös osztóval $\left(a \cdot \frac{d}{(b, d)} - \frac{b}{(b, d)} \cdot c, \frac{bd}{(b, d)} \right)$

. Tudjuk, hogy az $a \cdot \frac{d}{(b, d)}$ egész, $\frac{b}{(b, d)} \cdot c$ egész és a $\frac{bd}{(b, d)}$ szintén egész, tehát

törteket adunk még mindig össze és így a második legkisebb tényező a legkisebb közös többszörös. Formális definícióból úgy kapjuk meg, hogy használjuk az előbb már tisztázott egyszerűsítést, egyszerűsítettük a törtet a bd legnagyobb közös osztójával. A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$$ab^{-1} - cd^{-1} = a \cdot \frac{d}{(b, d)} - c \cdot \frac{b}{(b, d)}$$

Összeadás definíciót alkalmazva:

$$(a, be) + (c, de) = (ad + bc, bde) = (ade + bec, bd^2) = (ade + bec, bde^2)$$

Ez azért igaz, mert a definíció szerint keresztbe szorzunk és $(ad + bc) \cdot bde^2 = bde \cdot (ade + bec)$.

Bizonyítani a már tanult egyszerűsítéssel is lehet, mert az egyszerűsítés azt jelenti, hogy a pár mindkét tagját leosztjuk ugyanazzal az egész számmal.

Megállapítható, hogy a formális összeadás definíciójában a nevező mindig a szorzat, de ahogy mi tanítjuk, a legkisebb közös többszöröst kell keresni, az egy egyszerűbb alakot ad és az is helyes és megfelel az algebrai definíciónak.

Szorzás egész számmal

Mikor egy törtet egész számmal szorzunk, akkor a számlálót szorozzuk be az egész számmal. A szorzatot a számlálóba írjuk, míg a nevezőt változatlanul leírjuk.

$$\frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{5 \cdot 5}{3} = \frac{25}{3}$$

Algebrai úton leírva:

$$\frac{b}{c} \cdot a = \frac{ab}{c}$$

Hányadostestben:

$(a, b) \cdot (r, 1) = (ar, b)$ megfelel a definíciónak, a törtes laknak, ami következik a hányadostest definíciójából.

Formálisan testben:

Az asszociativitás miatt az is igaz, hogy $(a \cdot b) \cdot c^{-1} = a \cdot (b \cdot c^{-1})$, ami a testbeli levezetése ennek a szabálynak.

Tört szorzása törttel

A törtet mikor megszorozunk egy másik törttel, akkor a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk be.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Algebrai úton leírva:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Hányadostestben:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

Ez a szorzás definíciója.

Formálisan testben:

$$(ab^{-1}) \cdot (cd^{-1}) = a(b^{-1}(cd^{-1})) = a((b^{-1}c)d^{-1}) = a((cb^{-1})d^{-1}) = (ac, b^{-1}d^{-1}) = (ac, (bd)^{-1})$$

Igazoltuk tehát a testaxiómák segítségével, hogy a testben is úgy szorozódnak a törtek, hogy számlálót számlálóval, nevezőt nevezővel szorzom.

Pillangó szabály:

A pillangó szabályt a törtek szorzásánál oktatjuk, és arra szolgál, hogy a szorzás elvégzése előtt keresztbe lehet egyszerűsíteni, azaz a különböző tényezők számlálóját és nevezőjét lehet ugyanazzal osztani.

$$\frac{15}{7} \cdot \frac{14}{10} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Algebrai úton:

$$\frac{ae}{b} \cdot \frac{c}{de} = \frac{ac}{bd}$$

Hányadostestben:

?

$$(ae, b) \cdot (c, de) = (aec, bde)$$

A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$$(ae, b) \cdot (c, de) = (aeb^{-1}) \cdot (c \cdot (de)^{-1}) = (ac, b^{-1}d^{-1}) = (ac, (bd)^{-1})$$

Keresztbeszorzás után kapjuk, hogy a pillangó szabály is teljesül a hányadostestben a definíciója miatt.

Tört osztása egész számmal

Törtet mikor egész számmal osztunk, akkor vesszük az egész számnak a reciprokát, majd megszorozzuk vele a törtet a szorzás szabálya alapján.

$$\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Algebrai úton leírva:

Az osztás az inverzzel való szorzással felel meg.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot c^{-1}$$

Hányadostestben:

A $(c, 1)$ pár a c -nek felel meg, így a c^{-1} -nek az $(1, c)$ pár felel meg.

$(a, b) \cdot (1, c) = (a, bc)$. A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

A nevezőt kell szorozni c -vel, amit szintén megkaptuk a hányadostest definíciójából. Testben ez úgy néz ki, hogy $(ab^{-1}) \cdot c^{-1} = a \cdot (b^{-1}c^{-1}) = a \cdot ((bc)^{-1})$, tehát valóban a nevezőt kell megszorozni.

Tört osztása törttel

Az osztó reciprokjával kell megszorozni a törtet abban az esetben, ha törtet osztok törttel, majd a műveletnek megfelelően hajtom végre a szorzást.

$$\frac{10}{7} : \frac{5}{14} = \frac{10}{7} \cdot \frac{14}{5} = \frac{140}{35} = 4$$

Algebrai úton leírva:

Miután meghatároztuk, hogy az osztás az az inverzzel való szorzást jelenti, tehát az inverzt kell behelyettesíteni a szorzás formulába, onnantól kezdve a definícióból következik a következő állítás is:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Hányadostestben:

$$(a, b) : (c, d) = (ad, bc)$$

$$(a, b) \cdot (d, c) = (ad, bc)$$

A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$$ab^{-1} \cdot (cd^{-1})^{-1} = a \cdot b^{-1} \cdot d \cdot c^{-1} = a \cdot d \cdot b^{-1} \cdot c^{-1}.$$

Itt is kijött az (ad, bc) pár.

Vegyes alakú törtek

Vegyes alakú törtek átalakításánál az egész számot megszorozzuk a nevezőben szereplő számmal, majd az eredményhez hozzáadjuk a számlálóban szereplő számot. Az összeg értéke a számlálóban fog elhelyezkedni, míg a nevezőt változatlanul leírjuk.

$$1\frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

Algebrai úton leírva:

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$$

Hányadostestben:

$$(a,1) + (b,c) = (ac + b, c)$$

Rögtön következik az összeadás definíciójából. A keresztszorzatokat ellenőrizve látszik, hogy tényleg egyenlők egymással.

Formálisan testben:

$$a + bc^{-1} = acc^{-1} + bc^{-1} = (ac + b)c^{-1}$$

IRODALOMJEGYZÉK

- Which Mistake Most Surprises You?* (2015. 04 09). Letöltés dátuma: 2021. 08 05, forrás: Math Mistakes: <http://mathmistakes.org/category/elementary-school/fractions/>
- Aksoy, N. C., & Yazlik, D. O. (2017). Student Errors in Fractions and Possible Causes of These Errors. *Redfame Publishing*, 1-15.
- C. Neményi, E. (2002a). Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. *Új pedagógia szemle*, 52.(12.), 89-98.
- C. Neményi, E. (2008). *Relációk, függvények, sorozatok; A törtszám; A negatív szám*. Budapest: ELTE TÓFK.
- Filler, A. (2012). *Didaktik der Algebra und Zahlentheorie*. Humboldt-Universität, Berlin, Germany.
- Karika, T., & Csíkos, C. (2018/1). A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozathatárán. *online tudományos folyóirat Korszerű komplex matematika tanítás*, 86-98.
- Kerslake, D. (1986.). *Fractions: Children's strategies and errors*. Windsor, Berkshire: The NFER – NELSON Publishing Company Ltd.
- Kiss, E. (2007.). *Bevezetés az algebrába* (második. kiad.). Budapest: Typotex Kiadó.
- Padberg, F. (2002). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum.
- Wartha, S. (2003). Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsum-brüche. *f.n.*, 1-4.
- Wittmann, G. (é.n.). Von Fehleranalysen zur Fehlerkultur. *f.n.*, 1-4.
- Zhang, X., Clements, M., & Ellerton, N. (2014). Conceptual mis(understandings) of fractions: From areamodels to multiple embodiments. *Mathematics Education research Journal*, 72., 233-261.