

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Csányi Petra
Matematika BSc

EGY SZIMMETRIKUS EGYENLETRENDSZER SZÍNES ÉLETE

SZAKDOLGOZAT

Témavezető:
Szabó Csaba
egyetemi tanár

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Gondolkodjunk kicsit!	4
3. Az első gondolatunk	9
4. Egyetemistaként	14
5. Trükközzünk!	17
6. Diskusszió	20
7. A világ más szemszögből	24

1. Bevezetés

A Középiskolai Matematikai Lapok 2003. novemberi számában leltünk rá erre a példára, amely felkeltette az érdeklődésünket:

B.3673. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a pozitív valós számok körében:*

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= 7 \\ y^2 + yz + z^2 &= 13 \\ x^2 + xz + z^2 &= 19\end{aligned}$$

Majd 2007-ben – egy kis módosítással – ismét visszatért ez a feladat:

B.3977. *Legyenek x, y, z pozitív valós számok, melyre:*

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= 2 \\ y^2 + yz + z^2 &= 3 \\ x^2 + xz + z^2 &= 5\end{aligned}$$

Határozzuk meg $xy + yz + xz$ értékét!

Célunk, hogy minél több oldalról megvizsgáljuk ezt a példát, és a megoldási módszereit részletesen kidolgozva ismertessük. Feladatunk tehát a következő:

Legyenek x, y, z pozitív valós számok, melyre:

$$\begin{aligned}(1) \quad & x^2 + xy + y^2 = a \\ (2) \quad & y^2 + yz + z^2 = b \\ (3) \quad & x^2 + xz + z^2 = c\end{aligned}$$

Határozzuk meg $xy + yz + xz$ értékét!

2. Gondolkodjunk kicsit!

Hogyan kezdene neki egy átlagos diák a feladat megoldásának? Tapasztalatom szerint első körben „nekiugranak” és úgy indulnak el, mint egy hagyományos egyenletrendszernél általában. Néhány alpműveletet elvégezve megpróbálnak egyszerűbb kifejezést kapni, majd kifejezni a változókat vagy valamely kombinációjukat, visszahelyettesíteni ezeket stb. Mielőtt azonban mi is „nekiugranánk” gondolkozzunk kicsit.

Megfigyelhetjük azt, hogy az egyenletrendszer „majdnem” szimmetrikus, hiszen x, y, z ismeretleneket felcserélve csak a jobb oldalon lévő konstansok változnak, a bal oldalon ugyanazok a kifejezések maradnak. Viszont a keresett $xy + yz + xz$ „teljesen” szimmetrikus. Ebből kiindulva próbáljuk meg kifejezni $xy + yz + xz$ -t a, b és c segítségével, úgy, hogy csak olyan műveleteket végzünk az egyenleteken, melyek nem rontják el a szimmetriát. Természetesen először a 3 egyenlet összeadásával próbálkozunk. Ekkor az ismeretlenek négyzetének 2-szerese marad még feleslegesen. Láthatjuk, hogy összeadás és kivonás nem elegendő $xy + yz + xz$ kifejezéséhez. Milyen szimmetrikus kifejezéseket tudnánk még létrehozni?

Próbálkozhatunk szorzással: ekkor vagy mindhármat szorozzuk, vagy páronként összeszorozzuk, majd összeadjuk őket. Eszünkbe juthat még a négyzetre emelés: vagy egyenként emeljük négyzetre és utána adjuk össze őket, vagy az összeget emeljük négyzetre. Így megtartjuk a bal oldal szimmetrikusságát. Bármelyikkel kezdjük is, észrevehetjük, hogy nem kapjuk meg közvetlenül $xy + yz + xz$ -t, hiszen az egyes tagok foka (szorzásnál és négyzetre emelésnél is) 4-re változik. Így az tűnik a legjobb ötletnek, ha nem $xy + yz + xz$ -t, hanem a négyzetét próbáljuk kifejezni.

$$(xy + yz + xz)^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$$

Tehát ha ezt, vagy ennek konstansszorosát sikerülne kifejeznünk, akkor már $xy + yz + xz$ értékét is tudnánk.

Kezdjük el az egyik kifejezéssel a felsoroltak közül és figyeljük meg, hogy milyen alakú tagok szerepelnek benne. Először próbálkozhatunk például a négyzetösszegekkel.

Emeljük négyzetre az egyenletrendszer mindhárom egyenletét:

$$(1)^2 : x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 3x^2y^2 = a^2$$

$$(2)^2 : y^4 + z^4 + 2y^3z + 2yz^3 + 3y^2z^2 = b^2$$

$$(3)^2 : x^4 + z^4 + 2x^3z + 2xz^3 + 3x^2z^2 = c^2$$

Ezeket összeadva azt kapjuk, hogy: $(1)^2 + (2)^2 + (3)^2$:

$$(4) \quad \begin{aligned} &2x^4 + 2y^4 + 2z^4 + 3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3x^2z^2 + 2x^3y + 2xy^3 + 2y^3z + 2yz^3 + 2x^3z + 2xz^3 = a^2 + b^2 + c^2 \\ &2(x^4 + y^4 + z^4) + 3(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) + 2(x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + x^3z + xz^3) = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Vizsgáljuk a (4) egyenlet bal oldalát. Ahogy vártuk, szimmetrikus kifejezést kaptunk, ami azt jelenti, hogy az azonos alakú tagok együtthatója megegyezik és azt is, hogy ezek a tagok x, y, z minden kombinációjában előfordulnak. Tehát változóit tetszőleges módon felcserélve ugyanazt kapjuk. Így az x^4 alakú tagból 3 db van: x^4, y^4, z^4 , ahol mindegyik együtthatója 4. Az x^2y^2 alakúból 3 db: x^2y^2, y^2z^2, x^2z^2 és együtthatójuk 3. Míg az x^3y alakúaknak $- x^3y, xy^3, y^3z, yz^3, x^3z, xz^3$ – pedig 2 az együtthatója. Ezt összefoglaljuk az alábbi táblázatban, amiben csak a különböző fajta monomok (tagok) együtthatóját tüntetjük fel, hiszen tudjuk, hogy ezek a tagok x, y, z minden kombinációjában előfordulnak. Így minden szimmetriaosztályt egy monommal képviselünk.

Alak	x^4	x^2y^2	x^3y
Darab	2	3	2

Ez a táblázat egy jó leírás a szimmetrikus polinomokról, hiszen rövid, átlátható és segítségével egyértelműen rekonstruálható. Emellett egyszerűbb műveletek, mint például az összeadás, konstanssal való szorzás könnyen elvégezhető rajta. Természetesen nem minden esetben helyettesítheti a polinom teljes kiírását, hiszen adódhatnak olyan műveletek – pl. két polinom összeszorozása – , amelyre a táblázat kevésbé alkalmas.

Összevetve $xy + yz + xz$ négyzetével, látszik, hogy nekünk az x^2y^2 alakú monomok kellenek az egyenletek négyzetösszegéből, a másik kettőt valahogy el kell majd tüntetnünk.

Most próbálkozzunk a páronként összeszorozással:

$$\begin{aligned} (1) \cdot (2) : & \quad x^2y^2 + x^2yz + x^2z^2 + xy^3 + xy^2z + xyz^2 + y^4 + y^3z + y^2z^2 = ab \\ (1) \cdot (3) : & \quad x^4 + x^3z + x^2z^2 + x^3y + x^2yz + xyz^2 + x^2y^2 + xy^2z + y^2z^2 = ac \\ (2) \cdot (3) : & \quad x^4 + y^4 + z^4 + 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + y^3z + x^3y + yz^3 + xy^3 + x^3z + xz^3 + 3(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = bc \end{aligned}$$

Majd adjuk össze 6ket: $(1) \cdot (2) + (1) \cdot (3) + (2) \cdot (3)$:

$$(5) \quad x^4 + y^4 + z^4 + 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + y^3z + x^3y + yz^3 + xy^3 + x^3z + xz^3 + 3(x^2yz + xy^2z + xyz^2) =$$

$$= ab + ac + bc$$

Ennek a bal oldalát is foglaljuk össze:

Alak	x^4	x^2y^2	x^3y	x^2yz
Darab	1	3	1	3

Most ezt hasonlítjuk össze $xy + yz + xz$ négyzetével és az egyenletek négyzetösszegével (előző táblázat). A páronként összeszorzás, majd összeadás után keletkeznek x^2y^2 és x^2yz alakú tagok, amelyek kellenek $xy + yz + xz$ négyzetéhez, a maradékok $-x^4, x^3y$ alakúak – pedig ugyanazok, mint a egyenletek négyzetösszegénél. Ezért, hogyha az együtthatók is megfelelőek, akkor (4) és (5) lineáris kombinációjából megkaphatjuk $xy + yz + xz$ négyzetét.

Összegezve a két táblázatot:

	x^4	x^2y^2	x^3y	x^2yz
$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 = (4)$	2	3	2	0
$(1) \cdot (2) + (1) \cdot (3) + (2) \cdot (3) = (5)$	1	3	1	3
$2 \cdot (5) - (4)$	0	3	0	6

Látszik, hogy az (5) egyenlet kétszereséből a (4)-et kivonva pont kiesnek a felesleges tagok. Ekkor a táblázat utolsó sorából kiolvasható, hogy a következőt kapjuk:

$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + 6(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = 2 \cdot (ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Tudjuk, hogy:

$$3(xy + yz + xz)^2 = 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + 6(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$$

Amiből következik, hogy:

$$3(xy + yz + xz)^2 = 2 \cdot (ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$xy + yz + xz = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Így $xy + yz + xz$ -t kifejeztük a, b és c segítségével.

Természetesen $xy + yz + xz$ nemcsak így kapható meg. Akkor is kifejezhető, ha nem pont a négyzetösszeggel és a páronként szorzással kezdjük. Például, ha az egyenleteket összeadjuk, majd ezt négyzetre emeljük és levonjuk a négyzetösszegek kétszeresét, baloldalon szintén a $xy + yz + xz$ kifejezést kapjuk. Ezt mutatja meg a következő táblázat:

	x^4	x^2y^2	x^3y	x^2yz
$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2$	2	3	2	0
$((1) + (2) + (3))^2$	4	9	4	6
$((1) + (2) + (3))^2 - 2((1)^2 + (2)^2 + (3)^2)$	0	3	0	6

Tehát:

$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + 6(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = (a + b + c)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$3(xy + yz + xz)^2 = (a + b + c)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$(6) \quad xy + yz + xz = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Ezzel a módszerrel egy egyszerű és gyors megoldáshoz jutottunk. Mielőtt azonban azt gondolnánk, hogy végeztünk a feladat megoldásával még el kell gondolkodnunk néhány dolgon. Például azon, hogy mikor létezik a $xy + yz + xz$. Miért merül fel ez a kérdés? Természetesen azért, mert az őt meghatározó kifejezésben – (6) jobb

oldalán – négyzetgyök szerepel. Erre, és a, b, c vizsgálatára még később visszatérünk. Fontos lenne még elgondolkoznunk azon, hogy ha létezik is a megoldás, még nem lehetünk biztosak abban, hogy x, y, z is létezik egyenként. Mit jelent az, hogy „létezik”? A feladat szövegéből kiderül, hogy esetünkben azt jelenti, hogy léteznek olyan pozitív, valós számok, melyekre teljesül az egyenletrendszer adott a, b, c -re. Összefoglalva tehát: az, hogy ezzel a módszerrel formálisan megkaptuk $xy + yz + xz$ értékét még nem biztosítja azt, hogy létezik olyan pozitív, valós x, y, z , melyre teljesül az egyenletrendszer. Ezt nekünk kell külön megvizsgálnunk, amihez ez a megoldási módszer nem elegendő.

3. Az első gondolatunk

Kell találni egy új megoldást, amely az ismeretlenek értékeinek a létezését is igazolja. A legkézenfekvőbb maguknak az ismeretleneknek a kiszámolása. Ebben a fejezetben az algebrai műveletekre úgy tekintünk, mintha azok mindig elvégezhetőek lennének, így például minden számnak feltételezzük, hogy van két négyzetgyöke. Ezt egyetemi szinten úgy oldhatjuk meg, hogy feltesszük, hogy a komplex számtest fölött dolgozunk, ilyenkor a gyökvonásoknál automatikusan az összes gyököt értjük az eredmény alatt. Ha középiskolai számolásként szeretnénk ugyanezeket elvégezni, akkor párosadik gyök vonásakor mindig ellenőriznünk kéne, hogy a megfelelő gyökvonás elvégezhető-e. Ez esetünkben két szempontból is félrevezető, illetve nehézkes. Paraméteres, többváltozós kifejezéseknél a pozitivitás ellenőrzése gyakran túlmutat a középiskolai anyagon. Míg, ha konkrét számok lennének az eredeti feladatban, akkor könnyedén láthatnánk, hogy a megfelelő szám pozitív-e vagy negatív. A másik hátulütője a dolognak, hogy például a harmadfokú egyenlet megoldása során is kell negatív számból négyzetgyököt vonni, miközben a végeredmény valós. Ezért célszerűbb, hogy a megoldások valós, illetve pozitív mivoltát már a paraméteres képlet birtokában elemezzük.

Térjünk vissza az első gondolatunkhoz, mely szerint „nekiugrunk” az egyenleteknek és megpróbálunk valamit kifejezni, visszahelyettesíteni stb. Első lépésként jó lenne az egyik ismeretlent kiejteni az egyenletrendszerből. Hogy érhetnénk ezt el? A szokásos középiskolai módszerrel sehogyan sem, hiszen bárhogy próbálkozunk egyetlen egyenletből nem tudjuk egyszerűen kifejezni semelyik ismeretlent sem. Például az első egyenletből kifejezzük x -et y függvényében. Ekkor a másodfokú megoldóképlet segítségével $x_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{4a - 3y^2}}{2}$ -et kapjuk. Ezt visszahelyettesíthetnénk (3)-ba és kifejezhetnénk z -t, de helyette ügyeskedjünk inkább.

Ha kivonással próbálkozunk az egyik ismeretlen négyzete kiesik. Először az első egyenletből a másodikat vonjuk ki:

$$x^2 - z^2 + yx - yz = a - b$$

Innen adódik az, hogy alakítsuk szorzattá:

$$(7) \quad \begin{aligned} (x + z)(x - z) + y(x - z) &= a - b \\ (x - z)(x + y + z) &= a - b \end{aligned}$$

Ekkor $x + y + z$ -t ki tudjuk fejezni a paraméterek és 2 ismeretlen segítségével. Ez egy szimmetrikus kifejezés, ezért sejthetjük, sőt mi biztosan tudjuk, hogy a másik két egyenletből is hasonlóan megkapható.

Vonjuk ki a második egyenletből a harmadikat, majd alakítsuk szorzattá:

$$y^2 - x^2 + z(y - x) = b - c$$

$$(8) \quad (y - x)(x + y + z) = b - c$$

Így $x + y + z$ -t kifejeztük egy másik ismeretlenpárral. A 3. ilyen egyenletet is megkapjuk, ha az elsőből a harmadikat vonjuk ki. Természetesen ez már nem ad újabb összefüggést az ismeretlenekre.

$$y^2 - z^2 + x(y - z) = a - c$$

$$(9) \quad (y - z)(x + y + z) = a - c$$

Elosztva egymással (7) és (8) egyenleteket a következőt kapjuk:

$$\frac{(7)}{(8)} : \quad \frac{x - z}{y - x} = \frac{a - b}{b - c}$$

Szorozzunk be a nevezőkkel, majd bontsuk fel a szorzatot:

$$\begin{aligned} (x - z)(b - c) &= (a - b)(y - x) \\ xb - xc - zb + zc &= ay - ax - by + bx \end{aligned}$$

Rendezzük x , y és z szerint a kapott egyenletet:

$$(10) \quad (a - c)x + (b - a)y + (c - b)z = 0$$

Ekkor kaptunk egy lineáris összefüggést az x , y , z ismeretlenekre. Ez már olyan egyenlet, amiből az egyik ismeretlen könnyen kifejezhető:

$$(11) \quad x = \frac{(a - b)y + (b - c)z}{a - c}$$

Ezt visszahelyettesítve az egyenletrendszer első vagy harmadik egyenletébe kiejtenénk x -et és kapnánk egy újabb egyenletrendszert két ismeretlenre. Természetesen ez is helyes lenne, de ha kicsit ügyeskedünk, akkor egy egyszerűbb egyenletrendszerhez jutunk.

A trükk pedig a következő: a 3 ismeretlenre kapott lineáris összefüggésből kifejezzük $x + y + z$ -t, majd visszahelyettesítjük a (7), a (8) és a (9) egyenlet közül valamelyikbe. Így ejtjük ki az egyik ismeretlent. (10)-ből már kifejeztük x -et: (11). Majd (11)-hez adjunk hozzá $y + z$ -t:

$$x + y + z = \frac{(2a - b - c)y + (a + b - 2c)z}{a - c}$$

Helyettesítsük be például a (9)-be. Majd szorozzunk be nevezővel.

$$\begin{aligned}(y - z)(x + y + z) &= a - c \\ (y - z)((2a - b - c)y + (a + b - 2c)z) &= (a - c)^2\end{aligned}$$

Felbontjuk a zárójelet, összevonjuk a lehetséges tagokat. Majd az (2) egyenlettel kapunk egy egyenletrendszert y és z ismeretlenekre:

$$\begin{cases} (2a - b - c)y^2 + (-a + 2b - c)yz - (a + b - 2c)z^2 = (a - c)^2 \\ y^2 + yz + z^2 = b \end{cases}$$

A második $(a - 2b + c)$ -szeresét hozzáadva az első egyenlethez kiesik az yz :

$$3(a - b)y^2 + 3(c - b)z^2 = (a - c)^2 + b(a - 2b + c)$$

Kifejezzük y^2 -et:

$$y^2 = \frac{(a - c)^2 + b(a - 2b + c)}{3(a - b)} + \frac{(b - c)}{(a - b)}z^2$$

Itt természetesen adódik az az ötlet, hogy gyököt vonva y -t visszahelyettesítjük $y^2 + yz + z^2 = b$ -be. Ezt elvégezve figyelniünk kell arra, hogy a gyöknek két értéke van és az esetleges további számolásoknál – ha szükséges – figyelembe

kell vennünk, hogy épp melyik gyökről van szó. Mi is így kezdtük, de az egyenlet átrendezése közben ezt a kifejezést négyzetre kellett emelni. A fölösleges diszkussziók elkerülése végett inkább (számítóan) előbb rendezzük és emeljük négyzetre az egyenleteket, majd utána helyettesítjük be y^2 értékét. Az $y^2 + yz + z^2 = b$ -t rendezzük át úgy, hogy yz maradjon a bal oldalon, majd emeljük négyzetre az egyenletet.

$$\begin{aligned} yz &= b - z^2 - y^2 \\ y^2 z^2 &= b^2 + z^4 + y^4 - 2bz^2 - 2by^2 + 2z^2 y^2 \end{aligned}$$

Rendezzük y szerint jobb oldalra az egyenletet:

$$0 = y^4 + z^2 y^2 - 2by^2 + z^4 + b^2 - 2bz^2$$

Ebbe helyettesítsük be y^2 -et:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{((a-c)^2 + b(a-2b+c))^2}{9(a-b)^2} + \frac{(b-c)^2}{(a-b)^2} z^4 + \frac{2(b-c)((a-c)^2 + b(a-2b+c))}{3(a-b)^2} z^2 + \frac{(a-c)^2 + b(a-2b+c)}{3(a-b)} z^2 + \\ &+ \frac{b-c}{a-b} z^4 - \frac{2b((a-c)^2 + b(a-2b+c))}{3(a-b)} - 2b \frac{b-c}{a-b} z^2 + b^2 + z^4 - 2bz^2 \end{aligned}$$

Szorozzuk be $9(a-b)^2$ -tel:

$$\begin{aligned} 0 &= ((a-c)^2 + b(a-2b+c))^2 + 9(b-c)^2 z^4 + 6(b-c)((a-c)^2 + b(a-2b+c)) z^2 + 3(a-b)((a-c)^2 + \\ &+ b(a-2b+c)) z^2 + 9(a-b)(b-c) z^4 - 6(a-b)b((a-c)^2 + b(a-2b+c)) - 18b(a-b)(b-c) z^2 + 9(a-b)^2 b^2 + \\ &+ 9(a-b)^2 z^4 - 18b(a-b)^2 z^2 \end{aligned}$$

Az egyenletet rendezzük $e \cdot z^4 + f \cdot z^2 + g = 0$ alakra. Ekkor z^4 együtthatója a következő lesz:

$$e = 9(b-c)^2 + 9(a-b)(b-c) + 9(a-b)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2 - ac - ab - bc)$$

A z^2 együtthatója pedig:

$$f = 6(b-c)((a-c)^2 + b(a-2b+c)) + 3(a-b)((a-c)^2 + b(a-2b+c)) - 18b(a-b)(b-c) - 18b(a-b)^2$$

Ekkor $(a - c)^2 + b(a - 2b + c)$ -t az első kettőből, $-18b(a - b)$ -t a két utolsóból kiemelve, majd összevonva kapjuk:

$$f = -12a^2c - 12a^2b + 15ac^2 - 3c^2b + 15ab^2 - 3cb^2 + 3a^3 - 6b^3 + 9acb - 6c^3$$

A konstans tag:

$$g = ((a - c)^2 + b(a - 2b + c))^2 - 6(a - b)b((a - c)^2 + b(a - 2b + c)) + 9(a - b)^2b^2$$

Hasonlóan kifejtve adódik:

$$g = a^4 + c^4 + b^4 + 2b^3c - 4b^3a - 4ac^3 + 2c^3b - 4a^3b - 4a^3c - 8ac^2b - 8acb^2 + 6a^2c^2 + 6a^2b^2 + 3c^2b^2 + 10a^2bc$$

Az egyenlet z^2 -ben másodfokú, tehát kiszámolható a másodfokú megoldóképlet segítségével. Ennek kiszámolása körülményes és hosszú, egy áttekinthetetlen betűhalmaz, melyet nehézkes lenne zárt alakra hozni. Ezért a kézi számolás helyett segítségül hívjuk a Maple programcsomagot, mellyel kiszámoltatjuk az $e \cdot z^4 + f \cdot z^2 + g = 0$ egyenletet az előbb megkapott e , f és g együtthatókkal. A z -re 4 megoldást adódik. Ezeket megpróbáltuk a Maple beépített eljárásaival egyszerűsíteni, de az így kapott, sokkal rövidebb kifejezések is meglehetősen hosszúnak bizonyulnak a további számolásokhoz. Példaként megmutatjuk z_1 -re kapott törtet:

$$z_1 = -\frac{1}{6} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{-(-ac - ab - bc + c^2 + a^2 + b^2)(-2c^3 - cb^2 - c^2b - 4a^2c - 4a^2b + a^3 + 5ac^2 + 5ab^2 - 2b^3)}}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc} \\ \frac{+3acb + \sqrt{3}\sqrt{-(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)(bc - ac - ab + a^2)^2}}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}$$

Nem csoda, hogy nem tudta leegyszerűsíteni, hisz a Maple vagy más matematikai programcsomag is csak megadott algoritmusok alapján alakítja át a polinomot, nem tudhatja, hogy számunkra mi a „szép” kifejezés. Egy versenyfeladat hivatalos megoldásánál az szerepelne, hogy vegyük észre, hogy ez ennyi, meg ennyi, de ennek a dolgozatnak a célja pont az ilyenek elkerülése, ezért keressünk valami közvetlenebb, emberi módot, amellyel kezelhetőbb megoldást kapunk.

4. Egyetemistaként

Sok középiskolás mondaná azt, hogy ez egy háromismeretlenes három egyenletből álló egyenletrendszer, tehát mindig van megoldása. Ez természetesen igaz nem elfajuló lineáris egyenletrendszerekre, és abban az esetben például a Gauss-elimináció vagy sok más ismert eljárás is alkalmas lenne a megoldás keresésére. A mi egyenletrendszerünk viszont nem lineáris, ezen eljárások nem alkalmazhatóak rá. Valójában az igazi gondot – ahogy azt az előző megoldásban is láthattuk – a paraméterek jelentik. Egy ideig még egészen könnyen „cipelhetőek”, de bizonyos esetekben kezelhetetlenné válhatnak.

Milyen más technikát ismerünk még többismeretlenes egyenletek megoldására? A magasabbfokú paraméteres egyenletrendszerekre biztos módszert ad a rezultáns. A rezultáns az eredeti egyenletek gyökeiből keletkezett kifejezés, mely akkor és csak akkor nulla, ha az eredeti egyenleteknek van közös gyöke (vagy ha a főegyütthatók mind nullák). A megoldandó egyenletrendszerünkön mutatjuk be ezt a módszert, előtte azonban tekintsük át általánosan. Két ismeretlen, két egyenlet esetén a két egyenletet az egyik ismeretlen polinomjaként írjuk fel (pl. $f(x)$, $g(x)$) és a polinomok együtthatóiból képzett determináns segítségével előállítjuk a rezultánst. Ekkor a rezultáns ($R(f, g)$) már csak a másik ismeretlentől függ ($h(y) := R(f, g)$), hiszen $f(x)$, $g(x)$ együtthatói y polinomjai. Ezzel előállítottunk egy egyismeretlenes polinomot a kétismeretlenes egyenletrendszerből, ami pontosan akkor nulla, ha $f(x)$, $g(x)$ polinomoknak (tehát az eredeti egyenleteknek) van közös gyöke, vagy ha $f(x)$, $g(x)$ főegyütthatója is nulla. A közös gyökök $h(y)$ gyökei. Ha többismeretlenes az egyenletrendszer, akkor ezt az eljárást egymás után többször alkalmazzuk amíg egyismeretlenest nem kapunk.

Térjünk vissza tehát az eredeti egyenletrendszerünkhöz. Vegyük az első és a harmadik egyenletet:

$$(1) \quad x^2 + xy + y^2 = a$$

$$(3) \quad x^2 + xz + z^2 = c$$

Ezekből készítsük el $\mathbb{R}(y, z)[x]$ polinomokat:

$$f(x) = x^2 + xy + y^2 - a$$

$$g(x) = x^2 + xz + z^2 - c$$

(1) és (3) egyenletnek gyöke x , akkor és csak akkor, ha a polinomokból képzett rezultáns 0. A rezultánst a polinomok együtthatóiból képzett determinánsból kapjuk meg. A determinánst a következőképpen állítjuk elő: legyenek $f(x)$

együtthatói $a_0, a_1, a_2, g(x)$ -é pedig b_0, b_1, b_2 , ahol a_2 és b_2 jelöli a főegyütthatót. A determináns soraiban az együtthatók szerepelnek sorban, sorainak száma pedig a polinomok fokainak az összege lesz. Az első polinom együtthatói annyi sorban szerepelnek, amennyi a foka a második polinomnak és fordítva. A polinomok együtthatóit minden sorban egy oszloppal arrébb „csúsztatva”, lépcsőzetesen írjuk le, a maradék helyekre pedig nullák kerülnek:

$$\begin{vmatrix} y^2 - a & y & 1 & 0 \\ 0 & y^2 - a & y & 1 \\ z^2 - c & z & 1 & 0 \\ 0 & z^2 - c & z & 1 \end{vmatrix} = y^4 - zy^3 + (c - 2a)y^2 + (cz + az - z^3)y + a^2 - 2ac + c^2 + az^2 - 2cz^2 + z^4 \text{ a rezultáns.}$$

Tehát (1)-nek és (3)-nak, akkor közös gyöke x , ha találunk olyan y -t és z -t, melyre a rezultáns nulla lesz. ($f(x), g(x)$ főegyütthatója 1.) A rezultánst a (2)-es egyenlettel összevetve a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} y^2 + yz + z^2 = b \\ y^4 - zy^3 + (c - 2a)y^2 + (cz + az - z^3)y + a^2 - 2ac + c^2 + az^2 - 2cz^2 + z^4 = 0 \end{cases}$$

Az új egyenletrendszerünket ismét a rezultáns módszerével oldjuk meg. Most tekintsünk ezekre az egyenletekre, mint y polinomjaira.

$$\begin{aligned} h(y) &= y^4 - zy^3 + (c - 2a)y^2 + (cz + az - z^3)y + a^2 - 2ac + c^2 + az^2 - 2cz^2 + z^4 \\ k(y) &= y^2 + yz + z^2 - b \end{aligned}$$

$R(h, k)$ rezultáns legyen a következő:

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} c_0 &= a^2 - 2ac + c^2 + az^2 - 2cz^2 + z^4 & d_0 &= z^2 - b \\ c_1 &= cz + az - z^3 & d_1 &= z \\ \text{Ahol: } c_2 &= c - 2a & d_2 &= 1 \\ c_3 &= -z \\ c_4 &= 1 \end{aligned}$$

A Maple program segítségével kiszámjuk a determinánst:

$$\begin{aligned} & -12a^2cz^2 - 12a^2z^2b + 10a^2bc + 15ac^2z^2 - 8ac^2b - 8acb^2 - 3c^2z^2b - 9az^4c - 9az^4b + 15az^2b^2 - 9cz^4b - \\ & - 3cz^2b^2 + a^4 + c^4 + b^4 - 4a^3c + 6a^2c^2 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ac^3 - 6c^3z^2 + 2c^3b + 3c^2b^2 + 3a^3z^2 + 9c^2z^4 + \\ & + 9z^4a^2 + 9z^4b^2 - 6z^2b^3 + 2b^3c - 4b^3a + 9ac z^2b \end{aligned}$$

A $h(x), k(x)$ együtthatója 1, tehát az eredeti egyenletünknek pontosan akkor van megoldása, ha ez a polinom nulla. Az egyenletet $e \cdot z^4 + f \cdot z^2 + g = 0$ alakra rendezve:

$$\begin{aligned} e &= -9ac - 9ab - 9bc + 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 \\ f &= -12a^2c - 12a^2b + 15ac^2 - 3c^2b + 15ab^2 - 3cb^2 + 3a^3 - 6b^3 + 9acb - 6c^3 \\ g &= a^4 + c^4 + b^4 + 2b^3c - 4b^3a - 4ac^3 + 2c^3b - 4a^3b - 4a^3c - 8ac^2b - 8acb^2 + 6a^2c^2 + 6a^2b^2 + 3c^2b^2 + 10a^2bc \end{aligned}$$

Ezt kellene megoldanunk, de látható, hogy ez pont az az egyenlet, amit ez előző megoldásban kaptunk. Így nem jutottunk „előrébb”, nem kaptunk egyszerűbb alakot z -re, viszont egy biztos eljárással ellenőriztük a helyettesítő megoldás helyességét.

5. Trükközzünk!

A szimmetrikus tulajdonságot kihasználva egy újabb trükkel szeretnénk megmutatni egy olyan módszert, amely már számunkra is kezelhető kifejezést ad a változókra. A megoldás során olyan úton haladunk, mely figyelembe veszi azt, hogy milyen algebrai összefüggések vannak a különböző változók és kifejezések között.

A számolások során többször szerepelt a $x + y + z$ kifejezés, mely szimmetrikus x -ben, y -ban és z -ben. Ezenkívül még azt is láthatjuk, hogy $z - x$ -et és $z - y$ -t hozzáadva pont $3z$ -t kapunk. Ez utóbbi két kifejezéshez hasonlóak szintén előjöttek a második megoldásban a számolás során (például (8): $(y - x)(x + y + z) = b - c$).

Hogyan tudnánk kifejezni $x + y + z$ -t a, b, c segítségével? Természetesen szimmetrikus kifejezéseket keressünk. Először adjuk össze a három egyenletet:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + yz + xz = a + b + c$$

Majd észrevehetjük, hogy mindkét oldalhoz $3(xy + yz + xz)$ -t hozzáadva az egyenlet bal oldalán éppen $x + y + z$ négyzetének kétszerese áll:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz + 4xz &= a + b + c + 3(xy + yz + xz) \\ (x + y + z)^2 &= \frac{a + b + c + 3(xy + yz + xz)}{2} \end{aligned}$$

Tehát:

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a + b + c + 3(xy + yz + xz)}{2}}$$

Ekkor a, b, c -n kívül még $xy + yz + xz$ is szerepel a kifejezésben, de ezt az első megoldásban már meghatároztuk a, b, c függvényében.

$$(12) \quad x + y + z = \sqrt{\frac{a + b + c + 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)} \right)}{2}}$$

Ezek után még $z - x$ -et és $z - y$ -t szeretnénk kifejezni. Ekkor hasonlóan járunk el, mint a hosszú megoldás első lépéseinél. Kivonjuk a második egyenletből az első, majd szorzattá alakítjuk.

$$\begin{aligned} z^2 - x^2 + y(z - x) &= b - a \\ (z - x)(x + y + z) &= b - a \end{aligned}$$

Csak most $z - x$ -et fejezzük ki:

$$z - x = \frac{b - a}{x + y + z}$$

Ugyanígy járunk el a (1), (3) egyenlettel is. Kivonjuk a harmadikból az első, szorzattá alakítjuk és kifejezzük $z - y$ -t:

$$\begin{aligned} z^2 - y^2 + x(z - y) &= c - a \\ (z - y)(x + y + z) &= c - a \\ z - y &= \frac{c - a}{x + y + z} \end{aligned}$$

A következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\begin{aligned} x + y + z &= \sqrt{\frac{a + b + c + \sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2}} \\ z - x &= \frac{b - a}{x + y + z} \\ z - y &= \frac{c - a}{x + y + z} \end{aligned}$$

Tagjait összeadva és 3-mal elosztva kifejezzük z -t:

$$z = \frac{-2a + b + c + \frac{a + b + c + \sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2}}{3\sqrt{\frac{a + b + c + \sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2}}}$$

Egyszerűsítsük a kifejezést. Először hozzuk közös nevezőre a számlálót.

$$z = \frac{\frac{-3a + 3b + 3c + \sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2}}{3\sqrt{\frac{a + b + c + \sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2}}}$$

Majd 3-mal egyszerűsítve:

$$z = \frac{-a + b + c + \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2\sqrt{\frac{a + b + c + \sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2}}}$$

Így rövidebb, kezelhetőbb kifejezést kaptunk z -re.

6. Diszkusszió

Térjünk át a megoldás és az ismeretlenek létezésének vizsgálatához. A megoldás menetéből és a képletből látszik, hogy a komplex számtest fölött létezik megoldása az egyenletrendszernek. Attól függően, hogy a négyzetgyökvonásnál a két lehetséges érték közül melyiket választjuk, x , y és z értékére általában 4-4 fajta érték adódik. A középiskolás megközelítés sokkal inkább a valósakat keresi, ezen belül is a feladat konkrétan a pozitív, valós megoldásokat kérdezi. Ebből kiindulva foglalkozzunk mi is valós számtest feletti megoldásokkal.

Kezdjük a z -re kapott kifejezés vizsgálatával. Egészen hasonló lesz y -ra és x -re is a megoldás, hiszen a z -re kapott kifejezés nagyrészt szimmetrikus. Következtetéseink megfelelő betűzések mellett alkalmazhatóak lesznek a másik két ismeretlenre is. Ebben a kifejezésben a számlálóban lévő gyök és a nevezőben lévő belső gyök megegyezik, így ezek vizsgálatát egyszerre végezhetjük. Próbáljuk meg szorzattá alakítani, majd megvizsgálni azt, hogy mikor lesz nemnegatív a gyökjel alatti $2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)$ kifejezés.

$$2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$$

Alakítsuk át erre a kézenfekvő alakra:

$$4ab - (a + b - c)^2 \geq 0$$

Alkalmazzuk rá a $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ azonosságot, ahol $A^2 = 4ab$ és $B^2 = (a + b - c)^2$. Ekkor a gyökvonás miatt $4ab$ pozitív kell, hogy legyen. Vizsgáljuk meg mit tudunk a, b, c -ről. Ha átalakítjuk az eredeti egyenleteinket rögtön látható, hogy a, b és c nemnegatív. Vegyük például az első egyenletet: $x^2 + xy + y^2 = a$

1. Alakítsuk teljes négyzetté: $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 = a \geq 0 \quad \forall x, y - ra$
2. Alkalmazzuk a nevezetes azonosságokat: $x^2 + xy + y^2 = \frac{x^3 - y^3}{x - y} = a \geq 0 \quad \forall x, y - ra$
3. Kvadratikusan alakban: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pozitív definit.

Tehát $4ab \geq 0 \forall$ valós x, y, z esetén, így vehetjük a négyzetgyökét. Alkalmazva a fent említett nevezetes azonosságot azt kapjuk, hogy:

$$(2\sqrt{ab} + a + b - c)(2\sqrt{ab} - (a + b - c)) \geq 0$$

Ekkor észrevehető, hogy a két zárójelben pont $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ és $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ négyzete, illetve (-1) -szerese áll:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c)(c - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Még egyszer alkalmazzuk rá az $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ azonosságot:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{c} - \sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 0$$

Tegyük fel azt, hogy c a legnagyobb. (Szimmetrikus a kifejezés, így bármelyiket választhatnánk.) Ekkor a szorzat előjele csak $(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})$ -től függ, hiszen a szorzat többi tagja pozitív. Tehát $2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)$ nemnegatív, ha $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \geq 0$. Ezt azt jeleníti, hogy $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ -re teljesül a háromszög-egyenlőtlenség hátralévő része is: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{c}$, hiszen a szorzat 3. és 4. tagjából tudjuk, hogy $\sqrt{a} + \sqrt{c} \geq \sqrt{b}$ és $\sqrt{c} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a}$ teljesül.

Most nézzük meg, hogy a nevezőben lévő gyökre mikor teljesül a következő:

$$\frac{a + b + c + \sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2} \geq 0$$

Tudjuk, hogy a, b, c nemnegatív és azt, hogyha teljesül a háromszög-egyenlőtlenség $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ -re, akkor a gyök alatti kifejezés is nemnegatív, tehát létezik a gyök a valós számtest felett. A gyöknek 2 értéke lehet, ezért ha valós megoldásokat keresünk, akkor mindkettőt meg kell vizsgálnunk. Ha a gyök pozitív, akkor a vizsgált egyenlőtlenség teljesül. Ellenkező esetben $\sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}$ negatív, ezért hozzáadjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalához.

$$a + b + c \geq \sqrt{3}\sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Ekkor már négyzetre emelhetjük, hiszen az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív kifejezés szerepel.

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 6ab + 6bc + 6ac - 3a^2 - 3b^2 - 3c^2$$

Rendezzük a bal oldalra a tagokat:

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ac \geq 0$$

Észrevehetjük, hogy 2-vel leegyszerűsítve éppen 3 kifejezés négyzetét kapjuk:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Ez az egyenlőtlenség pedig mindig igaz lesz, így z nevezőjében szereplő nagy gyök alatt nemnegatív kifejezés áll, tehát a gyökkvonás minden esetben elvégezhető. Ki kell térni még arra is, hogy a nevező akkor lesz nulla, ha $a = b = c = 0$. Ezt tehát ki kell zárunk.

Megállapíthatjuk tehát, hogy z pontosan akkor létezik a valós számtest felett, ha teljesül $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ -re a háromszög-egyenlőtlenség. Most nézzük meg azt, hogy z mikor lesz pozitív. A nevezőben lévő gyök pozitív és negatív értéket is felvehet, ám ezek nem adnak különböző feltételt, hiszen x -t, y -t és z -t ellentett előjellel véve kapjuk meg egyikből a másikat. Így nem kell külön esetként vizsgálni őket. Tekintsük azt az esetet, mikor a gyök pozitív: z pontosan akkor pozitív, ha a számláló is az.

Vizsgáljuk meg z számlálóját, azaz nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lesz

$$-a + b + c + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)} \geq 0.$$

Akkor, hogyha $b + c > a$, akkor a bal oldalon két pozitív szám összege szerepel, azaz az egyenlőtlenség teljesül. Ha $b + c < a$, akkor

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)} \geq a - b - c$$

adódik, amelynek a feltétel miatt mindkét oldalán pozitív kifejezés áll. Ekkor a négyzetreemelés nem változtatja meg az egyenlőtlenség irányát:

$$\frac{1}{3} (2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)) \geq a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac$$

Átrendezve és egyszerűsítve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &\geq 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 8ab + 4bc - 8ac \\ 0 &\geq a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + bc - 2ac \end{aligned}$$

Egészítsük teljes négyzetté, majd alakítsuk szorzattá:

$$\begin{aligned} 0 &\geq (-a + b + c)^2 - bc \\ 0 &\geq (-a + b + c + \sqrt{bc})(-a + b + c - \sqrt{bc}) \end{aligned}$$

A $b + c < a$ feltétel miatt a szorzat második tagja biztosan negatív, így a szorzat előjele az első tagtól függ. Az egyenlőtlenség teljesül, tehát a számláló (így z is) pozitív, ha $-a + b + c + \sqrt{bc} \geq 0$.

Az y -t és az x -et vizsgálva ugyanezt feltételt kapnánk, csak a , b és c más kombinációjában. Ezért tegyük fel, hogy c a legnagyobb, majd foglaljuk össze, mely esetekben lesz valós, illetve pozitív megoldásunk. Pontosan akkor van valós megoldás, ha $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ -re teljesül a háromszög egyenlőtlenség, és ahhoz, hogy a megoldás pozitív legyen $a + b < c$ esetén $a + b + \sqrt{ab} \geq c$ -nek is teljesülnie kell.

Ez a hosszú elemzés és a háromszög-egyenlőtlenség felbukkanása azt sugallja, hogy geometriai tartalmat is adhatnánk ennek a feladatnak. Az, hogy ez mennyire nem természetes az is mutatja, hogy az általunk megkérdezett matematikusok egyike sem gondolt geometriai interpretációra, hanem algebrailag oldotta meg, és még a megoldás után sem jutott eszükbe a geometriai értelmezés. Néhány észt professzor és doktorandusz jegyzete a mellékletben megtekinthető.

7. A világ más szemszögből

Első ránézésre a legtöbb ember azt mondaná, hogy ez egy (szép) algebrai példa. Most lépünk egy lépést hátrébb és vizsgáljuk meg újra az egyenletrendszerünket. Tényleg csak az lehet? Mi lenne, ha nem ragadnánk le az ismeretlenek kifejezésénél, sem a szimmetrikus polinomoknál? Mi az, amit még „beleláthatunk” az egyenletekbe?

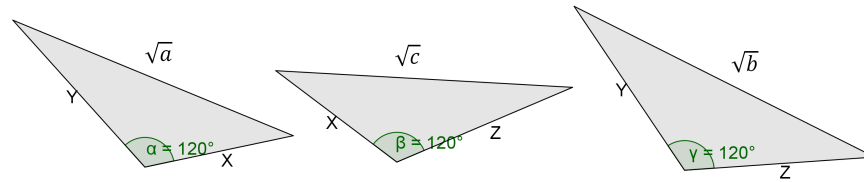
Eszünkbe juthat a koszinusztétel, hiszen a egyenletek bal oldalán pont az ismeretlenek négyzete és szorzata szerepel. Próbáljuk meg ennek segítségével megoldani a feladatunkat. Ekkor kicsit átalakítva az egyenletrendszert kapjuk a következőt:

$$x^2 + xy + y^2 = \sqrt{a}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ$$

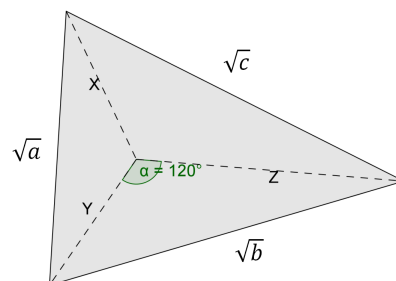
$$y^2 + yz + z^2 = \sqrt{b}^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos 120^\circ$$

$$z^2 + zx + x^2 = \sqrt{c}^2 = z^2 + x^2 - 2zx \cos 120^\circ$$

Ezek szerint $x, y, \sqrt{a}$, $y, z, \sqrt{b}$ és $z, x, \sqrt{c}$ egy-egy háromszöget alkot:



Ezeket összeillesztve egy $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ és $\sqrt{c}$ oldalú háromszöget kapunk, ahol x, y és z a megfelelő szakaszok hosszai.



A feladat $xy + yz + xz$ -t keresi, ezért felmerül a kérdés, hogy honnan kapjuk meg ennek a kifejezésnek az értékét? Jó gondolat lehet, ha a háromszögek területeit próbáljuk meg felírni. A kis háromszögek területei:

$$T_1 = \frac{xy \sin 120^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} xy$$

$$T_2 = \frac{yz \sin 120^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} yz$$

$$T_3 = \frac{zx \sin 120^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} zx$$

Ekkor a nagy háromszög területe előáll a kis háromszögek területeinek összegeként, ami a konstans szorzótól eltekintve pont a keresett megoldás. Persze a nagy háromszög területét felírhatjuk az oldalaiból is a Hérón-képlet segítségével, így kapunk rá egy olyan összefüggést is, ami csak a paraméterektől függ.

$$T_\Delta = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$$

$$T_\Delta = \sqrt{s(s - \sqrt{a})(s - \sqrt{b})(s - \sqrt{c})}, \text{ ahol } s = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2}$$

Ebből következik a megoldás:

$$xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{s(s - \sqrt{a})(s - \sqrt{b})(s - \sqrt{c})}$$

Fejtsük ki a kapott képletet. Először helyettesítsük be s -t:

$$xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} \left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{c} - \sqrt{b}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{2} \right)}$$

Ekkor a 2-eseket kiemelve a gyök alól pont kiejtik a 4-est. Majd alakmazzuk a gyök alatti szorzat 1. és 3., illetve 2. és 4. tagjára a $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ azonosságot.

$$xy + yz + zx = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c)(c - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2)}$$

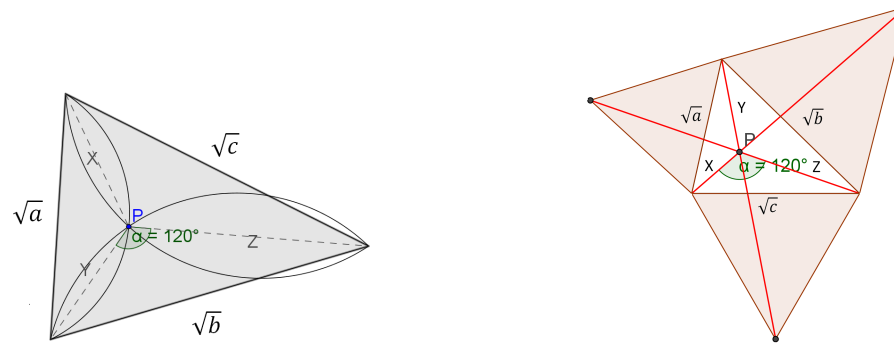
A gyök alatt emeljük négyzetre a két kifejezést, majd ismét alkalmazzuk az azonosságot:

$$xy + yz + zx = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(a + b + 2\sqrt{ab} - c)(c - a - b + 2\sqrt{ab})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4ab - (c - a - b)^2}$$

Ha ezt egy kicsit átalakítjuk, akkor látható lesz, hogy ez pont az első megoldásban kapott formális kifejezés.

$$xy + yz + zx = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4ab - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

Vizsgáljuk meg egy kicsit alaposabban ezt a geometriai interpretációt. Az egyenletekre felírt koszinusztételből megkaptuk, hogy x, y , y, z és z, x is 120° szöget zárnak be egymással. Ezeket összeillesztve a $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ oldalú háromszögben kapunk egy P pontot, melyből a háromszög mindhárom oldala azonos szögben látszik. Ez a pont megszerkeszthető az oldalak 120° -os látókörének metszéspontjaként. A másik megoldás, ha egy-egy szabályos háromszöget emelünk a háromszög oldalaira, és az újonnan kapott csúcsokat összekötjük az eredeti háromszög szemközti csúcsaival. Ezen szakaszok metszéspontját az eredeti háromszög csúcsaival összekötő szakaszok lesznek x , y és z . Ezzel a két módszerrel megszerkeszthető P és egyben megkapjuk x , y , z szakaszt is, ahogy a 1. ábrán is látható.

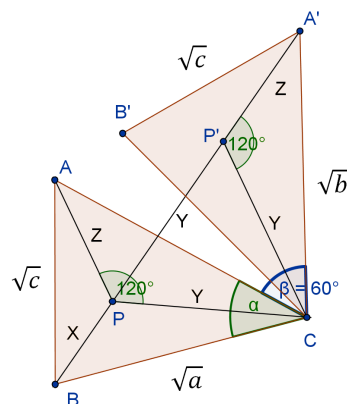


1. ábra.

Felmerül a kérdés, hogy milyen feltételek mellett létezik olyan P pont, melyből a háromszög minden oldala 120° -os szögben látszik? Természetesen akkor van ilyen P , ha a háromszögnek nincs 120° -nál nagyobb szöge. Ekkor P a háromszög izogonális, más néven Fermat-pontja. Ez az a pont a háromszög síkjában, melyet a háromszög csúcsaival összekötve a keletkező összekötő szakaszok összhossza, tehát $x + y + z$ minimális. Ez az összeg az algebrai számolások során is többször előjött. Hasonlóan az $xy + yz + xz$ megoldáshoz, ki tudnánk-e fejezni $x + y + z$ -t is geometriailag a, b, c -vel?

ABC háromszöget forgassuk el C csúcs körül (az óramutató járásával egyező irányban) 60° -kal. Ekkor $P'A' = PA$ és $PP' = PC$, hiszen $PP'C$ háromszög szabályos. Tehát $x + y + z = BP + PP' + P'A'$ és az összeg minimális, ha ez három szakasz egy egyenesre esik. Másképpen megfogalmazva $x + y + z$ minimális, ha $BP + PP' + P'A'$ a BA' -vel egyenlő. A mi feladatunkból kijön, hogy P -ből minden oldal 120° -os szögben látszik, tehát izogonális, így teljesül rá, hogy $x + y + z = BA'$.

BCA' háromszögre felírva a koszinusztételt megkapjuk $x + y + z$ -t. Kell még hozzá BCA' szög. Jelöljük az eredeti háromszögünkben a C csúcsnál levő szöget, tehát BCA szöget α -val. Így $BCA' = \alpha + 60^\circ$. α -t ki tudjuk



fejezni az ABC háromszögre felírt koszinusztételből:

$$c = a + b - 2\sqrt{ab} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}} \right)$$

Írjuk fel BCA' háromszögre a koszinusztételt:

$$(x + y + z)^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \cos \left(\arccos \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}} \right) + 60^\circ \right)$$

Az addíciós tételekből tudjuk, hogy:

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y), \text{ tehát}$$

$$\cos \left(\arccos \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}} \right) + 60^\circ \right) = \cos \left(\arccos \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}} \right) \right) \cdot \cos(60^\circ) - \sin \left(\arccos \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}} \right) \right) \cdot \sin(60^\circ)$$

Azt is tudjuk, hogy: $\cos(\arccos(x)) = x$, $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ és $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kell még $\sin(\arccos(x))$. Ezt egy rövid levezetéssel megkaphatjuk a Pitagoraszai azonosságokból:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Legyen $x = \arccos(y)$. Ekkor:

$$\cos^2(\arccos(y)) + \sin^2(\arccos(y)) = 1$$

Rendezzük át úgy, hogy a $\sin(\arccos(y))$ maradjon az egyik oldalon:

$$\sin^2(\arccos(y)) = 1 - \cos^2(\arccos(y)), \text{ ahol } \cos^2(\arccos(y)) = y^2$$

Egyszerűsítve és gyököt vonva megkapjuk a keresett szinuszt:

$$\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1 - y^2}$$

y helyébe helyettesítsük be az eredeti háromszögre felírt koszinusztételből kapott α szöget.

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}\right)^2}$$

Ezt egyszerűsítsük le úgy, hogy a gyökjel alatti kifejezést közös nevezőre hozzuk, majd a gyökvonást külön végezzük el a számlálón és a nevezőn.

$$\sqrt{1 - \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4ab - (c - a - b)^2}{4ab}} = \frac{\sqrt{4ab - (c - a - b)^2}}{2\sqrt{ab}}$$

Térjünk vissza az addíciós tételhez és helyettesítsük az egyes tagokat a nekik megfelelő értékkel:

$$\begin{aligned} \cos\left(\arccos\left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}\right) + 60^\circ\right) &= \cos\left(\arccos\left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}\right)\right) \cdot \cos(60^\circ) - \sin\left(\arccos\left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}\right)\right) \cdot \sin(60^\circ) \\ \cos\left(\arccos\left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}\right) + 60^\circ\right) &= \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4ab - (c - a - b)^2}}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve a BCA' háromszögre felírt koszinusztételbe megkapjuk $x + y + z$ négyzetét:

$$(x + y + z)^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \cos \left(\arccos \left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}} \right) + 60^\circ \right)$$

$$(x + y + z)^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \left(\left(\frac{c - a - b}{-2\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4ab - (c - a - b)^2}}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet és vonjuk össze a lehetséges tagokat:

$$(x + y + z)^2 = a + b + \frac{c - a - b}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{4ab - (c - a - b)^2}}{2}$$

$$(x + y + z)^2 = \frac{a + b + c + \sqrt{3}\sqrt{4ab - (c - a - b)^2}}{2}$$

Nézzük meg algebrailag mit kaptunk $x + y + z$ -re. A 4. fejezet elején összeadtuk a 3 egyenletet és mindkét oldalhoz $3(xy + yz + xz)$ -t hozzáadva megkaptuk $x + y + z$ négyzetét.

$$(12) : \quad x + y + z = \sqrt{\frac{a + b + c + 3(xy + yz + xz)}{2}}$$

Az 1. fejezetben $xy + yz + xz$ -t kifejeztük a, b és c segítségével. Ezt (12)-be helyettesítve adódik $x + y + z$, ami -kis átalakítás után- rögtön látható, hogy megegyezik a geometriailag kapott kifejezéssel.

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a + b + c + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2)}}{2}} = \sqrt{\frac{a + b + c + \sqrt{3}\sqrt{4ab - (c - a - b)^2}}{2}}$$

Tehát feladatunknál ez a kifejezés minimális.

Érdekes vizsgálni a geometriai és algebrai megoldások közti összefüggéseket. Az algebrai levezetés során megkaptuk, hogy a feladatunknak akkor van valós megoldása, ha teljesül a háromszög-egyenlőtlenség $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ -re.

Ez természetesen igaz a geometriai értelmezésre is, hiszen akkor „illeszthetők össze” az egyenletekből kapott kis háromszögek egy nagy háromszöggé.

Arra, hogy x , y , z mikor pozitív a következőt mondtuk: tegyük fel, hogy c a legnagyobb; pontosan akkor van pozitív megoldás, ha $a + b < c$, akkor $a + b + \sqrt{ab} \geq c$ is teljesül. Vegyük észre, hogy az eredeti egyenletünkhöz nagyon hasonló ez a feltétel ($x = \sqrt{b}$, $y = \sqrt{c}$ és $z = \sqrt{a}$ helyettesítéssel), így adódik az, hogy itt is alkalmazzuk a koszinusztételt. Ekkor azt kapjuk, hogy ha a két oldal négyzetösszege kisebb a harmadik oldal négyzeténél, akkor a két (kisebb) oldal ne zárjon be 120° -nál nagyobb szöget. Ez pedig pont az a feltétel, amit az izogonális pont létezésénél is kikötöttünk. Így a feladatunkat látványosan szemléltethettük háromszögekkel, illetve egyszerűsíthettük a megoldást a geometriai értelmezéssel.

$$\begin{aligned}
 x^2 + xy + y^2 &= 2 \\
 y^2 + yz + z^2 &= 3 \\
 z^2 + xz + x^2 &= 5 \\
 x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz &= x^2 + z^2 + xz + x^2 + y^2 + xy + y^2 + yz + z^2 + xz \\
 2y^2 + 4 &= 2xz \\
 x^2 + y^2 + y^2 &= x^2 + z^2 + xz - y^2 - yz + y^2 \quad (x+y)^2 \\
 2y^2 + 4 &= 2xz - y^2 \quad (y+z)^2 \\
 2y^2 + 4 &= 2xz - y^2 \quad (z+x)^2 = 10 + A \\
 x^2 + xz + z^2 - y^2 - z^2 - yz &= x^2 + y^2 + yz \\
 2xz &= A + 2y^2 \quad 2xz + A = 10 \\
 A &= 2(xz - y^2) \quad xz = \frac{A + 10}{2} \\
 1 &= \frac{A}{2} + yz - xz + z^2 - x^2 = \frac{1}{2}(z-x)(z+x)(z+x) = \frac{1}{2}(z-x)(x+z)^2 \\
 5x^2 - 5xz + 5yz - 5xy &= x^2 + z^2 + xz \\
 4x^2 - 6xz + 6yz - 4xy &= A = 2xz - 2y^2 \\
 2y^2 + 4z^2 - 6xz &= 2xz - 4xy + 6yz \\
 xzy + z &= \frac{1}{z-x} \quad \frac{1}{(z-x)^2} = (B+A)^2 \\
 (z-x)^2 &= 5-3xz \\
 (z+x)^2 &= 5+xz \\
 \left\{ \begin{array}{l} v = z-x \\ w = xz \\ u = y^2 \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} v^2 = 5-3u \\ 2u = 4+2w \\ v^2 + 2u + w + 2A = \frac{1}{v^2} \\ A = 2 \end{array} \right. \\
 6u = 3A + 6w & \quad 10 - u^2 + 3w = \frac{1}{v^2} \\
 10 - 2u & \quad \left(\frac{1}{v} + u\right)^2 = 12 + 3w \\
 & \quad v + \frac{3}{v} = 6 \\
 & \quad w = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + xy + y^2 &= 2 \\
 x^2 + xz + z^2 &= 3 \\
 y^2 + yz + z^2 &= 5 \\
 x &= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(y^2 - 4)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{8-3y^2}}{2} \\
 (2x+y)^2 &= 8-3y^2 \\
 (2x+y)^2 &= 8-3y^2 \\
 2x+y &= \sqrt{8-3y^2} \\
 (2y+z)^2 &= 20-3z^2 \\
 z &= \frac{-y \pm \sqrt{20-3y^2}}{2} \\
 x^2 + xz + z^2 &= \left(\frac{-y \pm \sqrt{8-3y^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-y \pm \sqrt{20-3y^2}}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{(-y \pm \sqrt{8-3y^2})(-y \pm \sqrt{20-3y^2})}{2} = 3 \\
 y^2 \pm 2y\sqrt{8-3y^2} + y^2 &+ y^2 \pm 2y\sqrt{20-3y^2} + 8-3y^2 + 20-3y^2 \\
 + y^2 \pm y(\sqrt{8-3y^2} + \sqrt{20-3y^2}) &\pm \sqrt{(8-3y^2)(20-3y^2)} = 12 \\
 A(x+y)(y+z)(z+x) &= xz + xz + y^2 + y^2 \\
 A + y^2 &= (x+y)(y+z) \\
 A + x^2 &= (y+x)(x+z) \\
 A + z^2 &= (z+x)(x+y) \\
 (x+y)(y+z) &= A + y^2 \\
 = (x+y)^2 + 2(x+y)(y+z) &= A + y^2 \\
 = 2A + 7 + 2A + 2y^2 &= A + y^2 \\
 = 4A + 7 + 2y^2 &= A + y^2 \\
 4A + 7 + 2y^2 &= A + y^2 \\
 4A + 7 &= -y^2 \\
 4A + 7 &= -y^2 \\
 4A + 7 &= -y^2 \\
 4A + 7 &= -y^2
 \end{aligned}$$

$$y^2 + x^2 + 2xy + y^2$$

49

28

η^x



~~$X^4 + 2x^2 + 1$~~

$$x^4y^2 + x^7yz + x^4z^2$$

$$x^3 y^2 z + y^3 x z^2 + x^3 z^3$$

$$x^2 y^2 z^2 + x^2 y z^3$$

5771215

