

Csoportelméleti feladatok feldolgozása

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Dukán András Ferenc

Matematika BSc - tanári szakirány

Témavezető: Dr. Szabó Csaba, egyetemi docens

ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

1. Előszó	4
2. Bevezetés	6
3. A csoport definíciója, generátorrendszere	7
3.1. IV. fejezet 1. feladat (<i>Csoportot alkotnak-e ...</i>)	7
3.2. IV. fejezet 2. feladat (<i>Az alábbi halmazok közül ...</i>)	11
3.3. IV. fejezet 3. feladat (<i>Az alábbi halmazok közül ...</i>)	12
3.4. IV. fejezet 4. feladat (<i>Igazoljuk, hogy egy csoport Cayley-táblázatának minden sorában ...</i>)	13
3.5. IV. fejezet 5. feladat (<i>Igazoljuk, hogy egy G csoport ... elemeire teljesülnek a következők.</i>)	14
3.6. IV. fejezet 6. feladat (<i>Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban ...</i>)	15
3.7. IV. fejezet 7. feladat (<i>A szabályos n-szög szimmetriacsoportját ...</i>)	17
3.8. IV. fejezet 9. feladat (<i>Bizonyítsuk be, hogy a $(P(H); \triangle)$ csoportban ...</i>)	18
3.9. IV. fejezet 11. feladat (<i>Tegyük fel, hogy S félcsoportban ...</i>) . . .	20
4. Véges csoportok, Sylow-tételek	21
4.1. IV. fejezet 180. feladat (<i>Igazoljuk, hogy ha $\{1\} \neq N \triangleleft G$... akkor $N \cap Z(G) \neq 1$.</i>)	21
4.2. IV. fejezet 181. feladat (<i>Igazoljuk, hogy a p^2 rendű csoportok ...</i>)	21
4.3. IV. fejezet 182. feladat (<i>Mutassuk meg, hogy minden p^3 rendű ...</i>)	22
4.4. IV. fejezet 183. feladat (<i>Legyen G véges csoport ...</i>)	23
4.5. IV. fejezet 185. feladat (<i>Határozzuk meg S_4-ben ...</i>)	23
4.6. IV. fejezet 186. feladat (<i>Igazoljuk, hogy ... p-Sylow részcsoportjainak metszete normálosztó.</i>)	24
4.7. IV. fejezet 187. feladat (<i>Mutassuk meg ... tartalmaznak normális Sylow részcsoportot.</i>)	25

<i>TARTALOMJEGYZÉK</i>	3
4.8. IV. fejezet 188. feladat (<i>Mutassuk meg ... van normális Sylow részcsoporth.</i>)	26
4.9. IV. fejezet 191. feladat (<i>Legyen G véges csoport ...</i>)	27
5. Felhasznált irodalom	28

1. Előszó

Amikor témát kellett választanom, három szempontot vettem figyelembe. Lehetőleg ismerjem az oktatót, a téma legyen számomra érdekes és érthető, illetve lehetőleg valamilyen szinten kapcsolódjon a tanári szakirányhoz.

Az általam ismert oktatók kiírt szakdolgozati témái közt keresgélve akadtam rá erre a témára. Rögtön felkeltette az érdeklődésemet két dolog miatt is. Az algebrát mindig is szerettem, illetve úgy gondoltam, hogy feladatokkal való foglalkozás, a problémamegoldás, az érthető megoldások elkészítése az egyik legfontosabb dolog egy leendő tanárnak.

Miután a témát kiválasztottam és a Tanár Úr is vállalta a témavezetést már csak egy dolgom maradt, hogy a témakiírásban szereplő könyv fejezetei közül válasszak egyet, amelyikkel foglalkozni szeretnék, hiszen sem a szakdolgozat terjedelme, sem az elkészítés ideje, de talán még évek munkája is kevés lenne egy embernek, hogy az ismeretanyagot feldolgozza.

A különböző algebrai struktúrák közül szándékoztam választani, hiszen ezekkel mindig szerettem foglalkozni. Csoportelmélettel is találkoztam már egyetemi tanulmányaim során. Végül erre esett a választásom.

Ez a fejezet azonban még mindig túl nagy volt önmagában, ezért két alfejezetet választottam belőle. Az egyik a bevezető fejezet (A csoport definíciója, generátor-rendszere; ciklikus csoport) volt, Tanár Úr tanácsára, ami később valóban jó választásnak bizonyult, hiszen korábbi tudásomat meglehetősen fel kellett frissíteni, el kellett mélyíteni és ehhez valóban hathatós segítséget jelentett. A második rész kiválasztása több fejtörést okozott. A Sylow-tételek azért keltették fel érdeklődésemet, mert tanári szakirányosként nem találkoztam velük tanulmányaim során. Kérdésekre, hogy mik is ezek, a Tanár Úr röviden összefoglalta a lényegüket, illetve ajánlotta őket, mint megérthető, logikus, az eddigiekre építkező új ismeretet. Így esett végül választásom a Véges csoportok, Sylow-tételek című alfejezetre.

Témám feldolgozása és eddigi tanulmányaim felelevenítése, elmélyítése során valóban sikerült megértenem és alkalmaznom Sylow tételeit. A végén meg tudtam oldani a feladatgyűjtemény által nehezebbnek jelzett feladatokat is.

Előszavam befejezéséül ezúton is szeretnék köszönetet mondani Dr. Szabó Csabának minden segítségért, amit tőle kaptam a szakdolgozatom megírása során.

2. Bevezetés

A Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor és Szendrei Ágnes által összeállított algebrai feladatgyűjtemény, a mai napig az egyetlen teljességre törekvő feladatgyűjtemény a matematikával foglalkozó egyetemisták számára. Első megjelenése óta számos alkalommal újra kiadták, gyakorlatilag változatlan feladatokkal.

Jelentősége mostanra annyira megnövekedett, hogy felmerült az amerikai kiadás lehetősége. Ehhez azonban a szerzők szerint először a magyar nyelvű megoldások részletes kidolgozása szükséges. A tengerentúli feladatgyűjtemények esetében ugyanis elképzelhetetlen, hogy egy feladatgyűjteményben ne legyenek megoldások, illetve a megoldások menetének vázlatos ismertetése helyett "szájbárogósabb" magyarázatot várnak el a hallgatók.

Szakedolgozatommal ebbe a nagyszabású munkába, a gyűjtemény összes feladatának pontos, érthető megoldásának kidolgozásába csatlakozom be.

3. A csoport definíciója, generátorrendszere; ciklikus csoport

3.1. Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve:

Egy halmaz akkor csoport az adott műveletre nézve, ha teljesül rá a következő három axióma:

1. axióma (asszociativitás): Bármely $a, b, c \in G$ -re $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. axióma (egységelem létezése): Létezik $e \in G$, amelyre $a \in G$ esetén:
 $e \cdot a = a \cdot e = a$.
3. axióma (inverz létezése): minden $a \in G$ -hez található inverz. $(a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e)$

A 2. és 3. axióma esetén szükséges és elégséges feltétel a csoporttulajdonság eldöntésére, ha létezik baloldali egységelem, illetve inverz. (Bizonyítást lásd: 3.9. feladat.)

(a) $(\mathbb{Z}_2; \cdot)$.

Az egységelem ebben a csoportban 1. (Bizonyítás: $1 * 0 = 0$; $1 * 1 = 1$.)

A csoport másik elemének, 0-nak nincs baloldali inverze. (Bizonyítás: $1 * 0 = 0$; $0 * 0 = 0$.)

Tehát ez nem csoport.

(b) $(\mathbb{Z}_2; +)$.

Bizonyítjuk, hogy teljesül a három axióma:

1. axióma: Modulo p gyűrűk mindig asszociatívak összeadásra.
2. axióma: A 0-t hozzáadva bármelyik $\mathbb{Z}_2$ -beli elemhez az elemet kapjuk, tehát $e=0$ -ra teljesül a 2. axióma.
3. axióma: 1-nek 1 az inverze ($1 + 1 = 0$ $\mathbb{Z}_2$ -ben), más elem nincs.

Mivel mind a három axióma teljesül, ezért ez csoport. $\square$

$$(c) (\mathbb{Z}; \circ), \text{ ahol } k \circ m = \begin{cases} k+m, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ k-m & \text{különben} \end{cases}$$

Az 1. axióma akkor teljesül, ha bármilyen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ -re igaz, hogy

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

A művelet definíciójából adódóan négy esetet kell megvizsgálnunk.

1. eset: a és b is páros.

Az egész számok halmazán mindig teljesül: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2. eset: a páros, b páratlan.

Az egész számok halmazán mindig teljesül: $a + (b - c) = (a + b) - c$.

3. eset: a páratlan és b páros.

Az egész számok halmazán mindig teljesül: $a - (b + c) = (a - b) - c$.

4. eset: a és b is páratlan.

Az egész számok halmazán mindig teljesül: $a - (b - c) = (a - b) + c$.

Tehát az 1. axióma teljesül.

A 2. axióma teljesül, ha van baloldali egységelem.

Ebben a halmazban 0 egységelem a megadott műveletre, mert $0 \circ a = 0 + a = a$, ami mindig igaz az egész számok halmazán.

A 3. axióma, akkor teljesül, ha minden elemhez található inverz, azaz $a^{-1} \circ a = 0$ mindig teljesül.

Ha a páros, akkor az inverze is páros kell legyen, mert akkor lesz az összegük vagy a különbségük 0. Tehát $a^{-1} + a = 0$ -nak kell teljesülni.

Ilyen inverz mindig található: $a^{-1} = -a$

Ha a páratlan, akkor hasonló okok miatt negatív kell legyen az inverze. Tehát $a^{-1} - a = 0$ -nak kell teljesülni.

Ilyen inverz is mindig található: $a^{-1} = a$.

Mivel teljesül a három axióma, ez egy csoport. $\square$

$$(d) (Q \setminus \{0\}; \circ), \text{ ahol } x \circ y = x/y.$$

Az 1. axióma nem teljesül például a $(12/3)/4 \neq 12/(3/4)$ esetben.

Tehát ez nem csoport.

(e) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}; \circ)$, ahol $a \circ b = a + b + ab$.

Vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e a három axióma.

$$a \circ (b \circ c) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$$

$$(a \circ b) \circ c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$$

Mivel a kettő kifejezés megegyezik, asszociatív a halmaz a megadott műveletre.

A 2. axióma teljesüléhez $e \circ a = e + a + ea = a$ egyenlet megoldását kell megkeresnünk.

Mindkét oldalból kivonva a -t $e + ea = 0$ -ra módosul az egyenlőség. Ekkor kiemelhetünk e -t, ekkor $e(1 + a) = 0$ alakra hoztuk az egyenlőséget. Ez akkor teljesül, ha $a = -1$ vagy $e = 0$.

A halmaznak nem eleme -1 , így ezt az esetet kizárhatjuk. A 2. axióma teljesül $e = 0$ esetben.

Keressünk bal oldali inverzet, tetszőleges $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ elemre:

$$a^{-1} \circ a = 0$$

$$a^{-1} + a + a^{-1} \cdot a = 0$$

$$a^{-1} \cdot (1 + a) = -a$$

$$a^{-1} = \frac{-a}{1+a}$$

Ez mindig a halmaz eleme lesz, tehát a 3. axióma is teljesül.

Ez egy csoport. $\square$

(f) $(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}; \circ)$, ahol $(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)$.

Ellenőrizzük a három axióma teljesülését a halmazra.

$$((a, b) \circ (c, d)) \circ (e, f) = (ac, bc + d) \circ (e, f) = (ace, bce + de + f)$$

$$(a, b) \circ ((c, d) \circ (e, f)) = (a, b) \circ (ce, de + f) = (ace, bce + f)$$

A kettő egyezik, tehát asszociatív.

Az $(e_1, e_2) \circ (a, b) = (e_1 a, e_2 a + b)$. Ahhoz, hogy az (e_1, e_2) egységelem legyen, $e_1 a = a$ -nak és $e_2 a + b = b$ -nek kell teljesülnie.

Ez $e_1 = 1$ és $e_2 = 0$ esetben lesz igaz. Tehát $(1, 0)$ az egységelem.

Az $(a^{-1}, b^{-1}) \circ (a, b) = (a^{-1} a, b^{-1} a + b) = (1, 0)$. Ahhoz, hogy az (a^{-1}, b^{-1})

inverzelem legyen, $a^{-1} a = e_1 = 1$ -nek

és $b^{-1} a + b = e_2 = 0$ -nek kell teljesülnie.

Ez $a^{-1} = \frac{1}{a}$ és $b^{-1} = -\frac{b}{a}$ esetben lesz igaz. Vagyis bármely (a,b) elemnek van inverze: $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$

Mivel teljesül a három axióma, ez egy csoport. $\square$

(g) $(P(H); \cup)$, ahol H tetszőleges halmaz.

A 2. axióma szerinti egységelem az üres halmaz, hiszen ez az egyetlen eleme az alaphalmaznak, amelynek bármely halmazzal vett uniója az eredeti halmaz.

Az 3. axióma szerinti inverz elem így olyan halmaz kell legyen, amivel a halmaz uniója üres halmaz.

Ilyen elem nincs, mert két nemüres halmaz uniója nem lehet üreshalmaz.

Tehát ez nem csoport.

(h) $(P(H); \cap)$, ahol H tetszőleges halmaz.

A 2. axióma szerint az egységelem az alaphalmaz, hiszen ez az egyetlen, amelynek metszete bármelyik halmazzal az eredeti halmazt adja.

Az inverz elem így olyan halmaz kell legyen, amivel egy halmaz metszete az alaphalmaz.

Ilyen elem nincs, hiszen két halmaz metszete nem lehet nagyobb uniójuknál, viszont az alaphalmaz bármely két elemének uniója részhalmaza az alaphalmaznak.

Tehát ez nem csoport.

(i) $(P(H); \triangle)$, ahol H tetszőleges halmaz.

Az 1. axióma ellenőrzéséhez először értelmezzük mit jelent $A \triangle (B \triangle C)$, illetve $(A \triangle B) \triangle C$.

Az első kifejezésből $(B \triangle C)$ azon elemeit tartalmazza B és C halmazoknak, amelyek csak az egyikben vannak benne. Amikor ennek vesszük a szimmetrikus különbségét A -val, akkor $(B \triangle C)$ és A azon elemeit kapjuk, amelyek a két halmaz közül csak az egyikben vannak benne, vagyis vagy csak A -nak vagy csak B -nek vagy csak C -nek az elemei vagy a három metszetében találhatók (hiszen $B \cap C \notin B \triangle C$).

A második kifejezésben az előzőhöz A és B azon elemeinek, melyek csak az egyikben vannak benne vesszük a szimmetrikus differenciáját C -vel. Ekkor ugyanazokat az elemeket kapjuk, mint az első esetben, hiszen $A \cap B \notin A \triangle B$.

Tehát a $P(H)$ asszociatív szimmetrikus differenciára nézve.

Legyen az egység e : $e \triangle A = (e \cup A) \setminus (e \cap A) = A$.

Az üres halmaz kielégíti ezt a feltételt, hiszen az uniója bármilyen A -val A , metszete viszont $\emptyset$. A -ból elhagyva az üres halmazt A -t kapjuk. Tehát van egységelem ebben a halmazban $\triangle$ -ra nézve.

Keresünk inverz elemet: $A^{-1} \triangle A = (A^{-1} \cup A) \setminus (A^{-1} \cap A) = \emptyset$. Ha $A^{-1} = A$, akkor ez az egyenlőség teljesül. Tehát minden elem saját magának az inverze.

Mivel mind a három axióma igaz, ez egy csoport. $\square$

3.2. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos összeadásra nézve:

(a) $\{k \in \mathbb{Z} : 2|k\}$.

A művelet asszociatív lesz, hiszen az összes egész szám körében a számok összeadása asszociatív. Így azok az összeadások is, amelyekben két páros számot adunk össze.

Az egységelemnek a következő egyenlőséget kell kielégítenie: $e + k = k$. Ennek az egyenletnek gyöke az $e = 0$ és eleme a $\{k \in \mathbb{Z} : 2|k\}$ halmaznak, tehát egységelem.

Az egész számok körében $k^{-1} = -k$. Mivel, ha k osztható volt 2-vel, akkor az ellentettje is, $k^{-1} = -k$ az alaphalmaz eleme szintén, k inverze $-k$.

Mivel a csoportaxiómák teljesülnek, ez egy csoport. $\square$

(b) $\mathbb{N}$.

Az egységelem csak a 0 lehet, hiszen egyedül ez az elem teljesíti az $e + n = n$ feltételt, ahol $n \in \mathbb{N}$.

Keressünk inverzelemet tetszőleges n elemhez. Ennek az $n^{-1} + n = 0$ feltételt kell teljesítenie.

Az inverz így $-n$ lenne, ami azonban nem eleme az alaphalmaznak.
Tehát ez nem csoport.

(c) $k \in \mathbb{Z}$: k **10-es számrendszerbeli alakjában a 0 előfordul.**

Ennek a halmaznak vannak olyan elempárjai, amelyeket összeadva halmazon kívüli elemet kapunk.

Például $101 + 20 = 121$, ami nem eleme a halmaznak.

Ezért ez nem csoport.

3.3. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak csoportot a szokásos szorzásra nézve:

(a) $\mathbb{N}$.

Az egységelem $e=1$, mivel ez az a szorzó, ami változatlanul hagyja bármelyik (természetes) számot.

Ugyanakkor a 3. axióma értelmében kell, hogy legyen található inverz bármelyik csoportelemhez. A természetes számok a reciprokukkal szorozva adnak 1-et eredményül (ami a csoport egységeleme). Az 1-nél nagyobb természetes számoknak a reciproka nem egész, tehát nem eleme ennek a halmaznak.

A természetes számok nem alkotnak csoportot szorzásra nézve, mert nem teljesül az inverz létezésére vonatkozó csoportaxióma. (Más indoklás is található.)

(b) $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$.

Nem található egységelem ebben a halmazban szorzásra nézve, hiszen bármely két elemet összeszorozva a halmazon kívüli elemet (pozitív számot) kapunk.

Ez nem csoport.

(c) $\{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Mivel tetszőleges halmazbeli k_1, k_2, k_3 -ra igaz lesz, hogy

$(2^{k_1} 2^{k_2}) 2^{k_3} = 2^{(k_1+k_2)+k_3} = 2^{k_1+k_2+k_3} = 2^{k_1+(k_2+k_3)} = 2^{k_1} (2^{k_2} 2^{k_3})$, ezért ez a halmaz szorzásra asszociatív.

A $2^0 = 1$ egységelem ebben a halmazban, hiszen $2^0 2^k = 2^{0+k} = 2^k$.

Tetszőleges 2^k elem inverze, 2^{-k} , mert $2^{-k} 2^k = 2^{-k+k} = 2^0 = e$.

Mivel mind a három axióma teljesül, ez egy csoport. $\square$

3.4. Igazoljuk, hogy egy csoport Cayley-táblázatának minden sorában és minden oszlopában a csoport minden eleme pontosan egyszer fordul elő.

A Cayley-táblázat a csoport szorzótáblája.

Tegyük fel, hogy van egy olyan sor vagy oszlop (legyen ez a sora vagy oszlopa), ahol van legalább 2 elem, ami ugyanazt az eredményt adja a -val való szorzás esetén.

Legyen $\circ$ a művelet, amelyre a halmaz csoportot alkot! Az előző állítás formálisan: $a \circ b = a \circ c$.

Vegyük a következő egyenlőséget: $a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$. (Azért lesz igaz, mert $a \circ b = a \circ c$.)

Mivel a csoport az axiómákból következően asszociatív, az előbbi egyenlőséget felírhatjuk így is: $(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$.

Az inverzével szorozva a az egységelemet adja. Tehát az egyenletünk így módosul: $e \circ b = e \circ c$.

Az egységelem azonban a művelet után az eredeti számot adja: $b = c$.

Ez viszont ellentmondás, hiszen a Cayley-tábla sor-, illetve oszlop-fejléceiben minden csoportelem csak egyszer szerepel, így különbözőnek kell lenniük. $\square$

3.5. Igazoljuk, hogy egy G csoport tetszőleges $a, b, x, y, a_1, a_2, \dots, a_n$ elemeire teljesülnek a következők:

(a) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

A csoportaxiómákból az inverz létezése miatt következik, hogy $aa^{-1} = e$.

Szintén a csoportaxiómákból következik, hogy egy szorzatba e -t bárhova beszúrva a kifejezés értéke nem változik: $aea^{-1} = e$.

Helyettesítsük e -t bb^{-1} -vel, illetve $(ab)(ab)^{-1}$ -vel. Ezt megtehetjük, mivel egy csoportelem és inverzének szorzata mindig e , illetve a csoport bármely két elemének a szorzata is csoportelem. Így a következőt kapjuk: $a(bb^{-1})a^{-1} = (ab)(ab)^{-1}$.

Az asszociativitás miatt ez ekvivalens $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (ab)(ab)^{-1}$ -vel.

Az 1.4. feladatból következik, hogy ha $xy = xz$ egy csoportban, akkor $y = z$.

Ezért $b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$. $\square$

(b) $a^{-1} = b^{-1} \Rightarrow a = b$

Tudjuk, hogy csoportokban mindig létezik inverz és igaz rá, hogy $aa^{-1} = e$.

Ugyanezen ok miatt igaz lesz, hogy: $aa^{-1} = bb^{-1}$.

Mivel a feladat feltevése szerint $a^{-1} = b^{-1}$ és $xy = xz$ -ből következik, hogy $y = z$. (Bizonyítást lásd az 2.4. feladatban.)

Az eddigiekből következik a bizonyítandó állítás, azaz $a = b$. $\square$

(c) $axb = ayb \Rightarrow x = y$

Asszociativitás miatt igaz lesz, hogy $a(xb) = a(yb)$

Az (a) és (b) részben is felhasználtuk (és az 1.4. feladatban bizonyítottuk), hogy $de = df$ -ből következik, hogy $e = f$.

Ezen azonosság miatt a feladat $x = y$ feltevéséből következik, hogy $xb = yb$.

Ebből tovább következtethető az előzőhöz hasonló módon a bizonyítandó állítás, hogy $x = y$. $\square$

$$(d) (a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$$

Az inverz- és az egységelemtulajdonság, illetve az (a) feladatban bizonyított állítás miatt igaz lesz, hogy $(a_1 a_2 \dots a_n)(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_1 a_2 \dots a_n a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$.

Az asszociativitás miatt $(a_1 a_2 \dots a_n)(a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1})$ alakban is felírható az egyenlet jobb oldala.

Az előző három részfeladatban is felhasznált összefüggésünkből (amely állítása szerint $xy = xz$ -ből következik, hogy $y = z$) következik a bizonyítandó állítás, hiszen az első tényező $((a_1 a_2 \dots a_n))$ mind a két oldalon megegyezik. $\square$

3.6. Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban tetszőleges a, b, c, d, g, x, y elemekre? Az érvényeseket bizonyítsuk be, a többire adjunk ellenpéldát.

$$(a) abx = aby \Rightarrow x = y$$

Szorozzuk $abx = aby$ mind a két oldalát balról ab inverzével:

$$(ab)^{-1}abx = (ab)^{-1}aby$$

Így $x = y$, mert $(ab)^{-1}ab = e$. $\square$

$$(b) xcd = ycd \Rightarrow x = y$$

Az (a) feladathoz hasonló, $(ab)^{-1}$ helyett $(cd)^{-1}$ -nel szorzunk, ezúttal jobbról. $\square$

$$(c) xc = cy \Rightarrow x = y$$

Az állítás nem igaz. Ellenpélda:

Legyen a kvaterniócsoportban $x = -k$; $c = j$; $y = k$.

Ekkor $(-k)j = i = jk$.

(d) $cx d = dyc \Rightarrow x = y$

Az állítás nem igaz. Ellenpélda:

Legyen $e = (1; 1)$; $x = (1; 1)$; $d = (2; 2)$; $y = (1; 3)$ az 3.1. (f) feladatban megadott csoportból.

Ekkor $(1; 1) \circ (1; 1) \circ (2; 2) = (2; 6) = (2; 2) \circ (1; 3) \circ (1; 1)$.

(e) $abc = dbg \Rightarrow ac = dg$

Az állítás nem igaz. Ellenpélda:

Legyen kvaterniócsoportban $a = i$; $b = j$; $c = k$; $d = -j$; $g = -1$.

Ekkor $ijk = -1 = (-j)j(-1)$.

(f) $ax = 1 \Rightarrow x = a^{-1}$

Szorozzuk jobbról a -t x -szel, illetve az inverzével.

A feladat feltétele miatt $ax = 1$, az inverztulajdonság miatt $aa^{-1} = 1$.

A két szám, amivel a -t szoroztuk az 1.4. feladatban bebizonyítottak alapján egyenlő. $\square$

(g) $abx = 1 \Rightarrow x = a^{-1}b^{-1}$

Az állítás nem igaz. Ellenpélda:

Legyen kvaterniócsoportban $a = i$; $b = j$; $x = -k$.

Ekkor $ij(-k) = 1$, de $-k \neq (-i)(-j) = k$. (Kvaterniócsoportban: $i^{-1} = -i$; $j^{-1} = -j$.)

(h) $xab = c \Rightarrow x = cb^{-1}a^{-1}$

Szorozzuk jobbról az eredeti egyenletet $b^{-1}a^{-1}$ -nel. Ekkor az $xabb^{-1}a^{-1} = cb^{-1}a^{-1}$ egyenletet kapjuk.

Asszociativitás miatt először elvégezhetjük a baloldalon a bb^{-1} szorzást. Ennek e az eredménye, így ezután az $(ae)a^{-1}$ szorzást kell elvégeznünk.

Így $x = cb^{-1}a^{-1}$. $\square$

$$(i) \quad xab = a \Rightarrow x = b^{-1}$$

Az állítás nem igaz. Ellenpélda:

Legyen kvaterniócsoportban: $x = k$; $a = i$; $b = k$.

Tudjuk, hogy $kik = i$, de $k \neq k^{-1} = -k$.

3.7. A szabályos n -szög szimmetriacsoportját n -edfokú diédercsoportnak nevezzük és D_n -nel jelöljük.

(a) Igazoljuk, hogy $|D_n| = 2n$, és a D_n csoportot generálja a $2\pi/n$ szögű elforgatás és egy tengelyes tükrözés.

A csúcsok sorrendjén a szimmetriák nem változtatnak, csak a körüljárási irányon és az eredeti helyzettől való elmozdulásukon. Tehát egy csúcs helyzete és a körüljárási irány meghatározza a szabályos n -szöget. Ha n csúcsa van a sokszögnek, akkor egy csúcs n helyre kerülhet (beleértve a helyben maradást is), illetve minden helyzethez kétféle körüljárási irány tartozik (pozitív és negatív). Ez azt jelenti, hogy összesen $2n$ elemű egy n -szög szimmetriacsoportja. $\square$

Egy csúccsal való elmozduláshoz $2\pi/n$ szögű forgatás szükséges, hiszen ekkora középponti szög tartozik egy oldalhoz. A körüljárási irányt pedig egy tengelyes tükrözés megváltoztatja. Tehát ez a két művelet valóban generálja mind a $2n$ lehetőséget. $\square$

(b) Mutassuk meg, hogy ha a a $2\pi/n$ szögű elforgatást, t pedig egy tengelyes tükrözést jelent, akkor érvényesek a következők: $a^n = 1$, $t^2 = 1$ és $at = ta^{n-1}$

$$a^n = 1:$$

Elvégezzük n -szer a $2\pi/n$ forgatást. Tehát összesen 2π -t forgattunk. Ez síkon az identitás.

$$t^2 = 1:$$

A tükrözés távolságtartó, csak a körüljárási irányt változtatja meg. Ezért a síkban ugyanarra a tengelyre végzett 2 tükrözés szintén helybenhagyást ad eredményül. (A körüljárási irány megfordul, majd visszafordul.)

$at = ta^{n-1}$:

Először vizsgáljuk meg a bal oldalt. Azt jelenti at , hogy elforgatom egy csúccsal a síkidomot, majd ezt tükrözöm, az eredeti 1-es csúcson (az a csúcs, amin a t átmegy) átmenő szimmetriatengelyre. Ekkor az 1-es csúcs a másik oldalra kerül, közvetlenül az eredeti helye elé, a körbejárási irány pedig az eredetihez képest megfordul.

Most vegyük a jobb oldalt. Itt ta^{n-1} azt jelenti, hogy tükrözéssel megfordítom a körbejárási irányt, majd $(n-1)$ -et forgatok rajta, tehát egy csúccsal kerül az 1-es csúcs a kiindulási helye elé.

A két oldal megegyezik. $\square$

(c) Fejezzük ki a és t segítségével a többi szimmetriatengelyre vonatkozó tükrözést.

Az egyes csúcsokhoz tartozó szimmetriatengelyt jelölje s_k , ahol k a csúcs száma, 1-gyel kezdve a számozást a forgatás irányában folytatva. Legyen az 1-es az a csúcs, amelyen t átmegy. Egy tetszőleges csúcsra való tükrözés megcseréli a két oldalán a számokat, ezzel természetesen megváltoztatja a körbejárási irányt. Tehát az 1-es csúcs annyival fog k csúcs másik oldalára kerülni, amekkora tőle mért távolsága. Tehát az 1-es $k-1$ csúcsot mozdul el.

Mivel meg kell változtatni a körbejárási irányt, ezért először tükrözni kell. A keresett transzformáció: ta^{k-1} .

3.8. Bizonyítsuk be, hogy a $(P(H); \triangle)$ csoportban

(a) $A \triangle B \triangle C$ azon H -beli elemekből áll, melyek az A, B, C részhalmazok közül pontosan 1-ben vagy 3-ban vannak benne.

Vegyük A és B halmazok nem közös részének C -vel nem közös részét. A végeredmény tehát a háromszoros metszet elemeit, illetve A, B, C azon elemeit tartalmazó halmaz, amelyek A, B, C közül pontosan egy halmaznak elemei. (Hiszen a kétszeres metszetek közül az $A \cap B$ elemei nincsenek benne $A \triangle B$ -ben. Az $A \cap C$, illetve $B \cap C$ elemei pedig $A \triangle B \triangle C$ -ben.) $\square$

(b) Ugyanez az állítás igaz $A \triangle B \triangle C \triangle D$ -re.

Az (a) feladatból láthatjuk, hogy az $A \triangle B \triangle C$ -ben a 2-szeres metszetek nem lesznek benne. Így, ha D belemetsz egy ilyen részbe, akkor az része lesz $A \triangle B \triangle C \triangle D$ -nek. Viszont, ami $A \triangle B \triangle C$ eleme (azaz egyszeres, illetve háromszorosmetszet), de D metszi, az nem lesz benne $A \triangle B \triangle C \triangle D$ -ben.

Tehát 4 halmaz esetén is azok a halmazok lesznek benne a szimmetrikus különbségükben, amelyek pontosan 1-ben vagy 3-ban vannak benne. $\square$

(c) Általánosítsuk ezeket az eredményeket n részhalmazra.

Vegyük az összes halmaz unióját, aminek a szimmetrikus különbségét vesszük. Ennek tetszőleges elemét vizsgáljuk meg, hogy benne van-e az eredményhalmazban. Amikor a művelet végrehajtása során először érünk olyan halmazhoz (A_i), amely tartalmazza az elemet, akkor az addigi részeredményben szerepelni fog az elem. (Hiszen nincs benn $A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_{i-1}$ -ben, mert egyetlen korábbi halmaz se tartalmazta.) Ha újra tartalmazza egy következő halmaz, akkor nem lesz benne az új részeredmény-halmazban, hiszen az előző részeredmény-halmaz tartalmazta, így benne lesz a metszetben. Ez pedig így ismétlődik tovább, ha még többször előfordul. Minden páratlanadik előfordulás után bekerül az aktuális részeredmény-halmazba, minden párosodik előfordulás után pedig nem kerül bele. Amikor végigértünk a műveletsoron akkor attól függ, hogy az eredményhalmaz tartalmazza-e, hogy összesen hányszor fordult elő.

Tehát azok az elemek szerepelnek n részhalmaz metszetében, amelyeket páratlan számú halmaz tartalmaz.

3.9. Tegyük fel, hogy az S félcsoporthban a szorzás rendelkezik a következő tulajdonsággal: S -ben létezik egy e balegységelem úgy, hogy minden $s(\in S)$ elemhez találhat olyan $s' \in S$, hogy $s's = e$. Bizonyítsuk be, hogy S csoportot alkot erre a szorzásra nézve.

A feladat szövegéből tudjuk, hogy $s's = e$ és mivel e balegységelem $es = s$.

Írjuk ss' önmagával való szorzatát: $(ss')(ss')$. Mivel a félcsoporth asszociatív ezt átalakíthatjuk $s(s's)s$ -é. Tudjuk, hogy $s's = e$ és e balegységelem, tehát $(ss')(ss') = (ss')$. Vagyis mivel létezik e balegységelem $(ss')(ss') = e(ss')$.

Ebből következik, hogy $(ss') = e$.

Ekkor viszont $(ss')(ss') = e$, tehát e jobboldali egységelem is.

Bebizonyítottuk, hogy ha létezik baloldali egységelem és baloldali inverz egy félcsoporthban, akkor az csoport. $\square$

4. Véges csoportok, Sylow-tételek

4.1. Igazoljuk, hogy ha $\{1\} \neq N \triangleleft G$, ahol G véges p -csoport, akkor $N \cap Z(G) \neq 1$.

Tudjuk, hogy N elemszáma osztója P elemszámának, illetve azt is, hogy P elemszáma p -hatvány.

Ebből következik, hogy $|N| = p^k$.

Az N a P néhány konjugáltosztályának egyesítése. Abból, hogy P minden konjugáltosztályának is osztója p , ha nem egyelemű, az következik, hogy az egyelemű konjugáltosztályok számának is oszthatónak kell lenni p -vel. Tehát számuk legalább p .

Az egyelemű konjugáltosztályok alkotják $Z(P)$ -t. $\square$

4.2. Igazoljuk, hogy a p^2 rendű csoportok, ahol p prím, szükségképpen Abel-félék.

Legyen P egy p^2 rendű csoport, ahol p prím.

Ekkor $Z(P)$ nem lesz egyelemű. Bizonyítás:

Írjuk fel P osztályegyenletét: $|P| = |Z(P)| + |K_1| + \dots + |K_m|$ (Az osztályegyenlet a P konjugáltosztályainak uniója.) Az egyelemű osztályok P centrumát alkotják. ($Z(P)$) A $K_1, \dots, K_m$ a nem egyelemű konjugáltosztályok.

Minden K_i elemszáma osztója P rendjének (ami p^2), tehát tetszőleges K_i elemszáma p vagy p^2 .

Mivel K_i és P is osztható p -vel, az osztályegyenletből következik, hogy $Z(P)$ -nek is oszthatónak kell lennie p -vel, ezért nem lehet egyelemű.

Tehát $|Z(P)| = p$ vagy p^2

Ha $Z(P) = p$, akkor választhatunk egy $g \in Z(P)$ -t és egy $h \notin Z(P)$, $h \in P$ -t.

Tekintsük $H = \langle g, h \rangle = \{g^n h^m\}$ halmazt. E halmaz elemei felcserélhetőek, hiszen g P minden elemével felcserélhető, centrumtulajdonság miatt.

Tudjuk, hogy $Z(P) \subseteq H$, mert $\langle g \rangle = Z(P)$.

Azonban H -t egy másik, nem $Z(P)$ -beli elem is generálja, nagyobb kell, hogy

legyen, mint $Z(P)$, egyenlőség nem állhat fenn köztük.

Tehát $Z(P) \subset H$. Ebből viszont következik, hogy $|H| = p^2$. Ezért $H = P$.

Ekkor azonban P bármelyik elem felcserélhető a másikkal, hiszen g^n és h^m felcserélhető, tehát $|Z(P)| = p^2$.

Ez ellentmondás az eset kiindulási feltételével, amely szerint $|Z(P)| = p$.

Egy esetet nem vizsgáltunk még, amikor $|Z(P)| = p^2$. Ekkor $Z(P) = H$. Vagyis a centrum az egész csoport, tehát bármelyik elem felcserélhető bármelyik elemmel.

Ez azt jelent, hogy a csoport kommutatív, azaz Abel-féle. $\square$

4.3. Mutassuk meg, hogy minden p^3 rendű (p prím) nem Abel-féle csoportnak p -edrendű a centruma

Legyen P egy p^3 rendű csoport, ahol p prím.

Ekkor $Z(P)$ nem lesz egyelemű. (Bizonyítást lásd 3.2. feladat megoldásában.)

A centrum elemszáma ugyanakkor osztja a csoport elemszámát, esetünkben speciálisan p , p^2 vagy p^3 lehet.

Tudjuk, hogy $Z(P) \neq p^3$, mert ekkor $Z(P) = P$, vagyis P kommutatív, de ez ellentmondásban áll a feladat szövegével.

Ha $|Z(P)| = p^2$, akkor $|P/Z(P)| = p$.

Egy p rendű csoportban bármelyik nem egységelem generátor, tehát ciklikus.

Ha $P/Z(P)$ ciklikus, akkor P Abel-féle. Bizonyítás:

Legyen $gZ(P)$ a $P/Z(P)$ generátoreleme. Tehát a csoport összes elem felírható $g^n Z(P)$ alakban.

Ebből következik, hogy ez kommutatív csoport, mert $(g^n x)(g^m y) = (g^m y)(g^n x)$, ha $x, y \in Z(P)$, a centrumtulajdonság miatt.

Ez az előző esethez hasonlóan ellentmond a feladat szövegének.

Mivel minden más esetet kizártunk, a $Z(P)$ elemszáma csak p lehet. $\square$

4.4. Legyen G véges csoport. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha G -nek egyetlen p -Sylow részcsoporthja van, akkor az normálosztó G -ben.

Sylow tételei szerint bármely két p -Sylow részcsoporth konjugált G -ben.

Legyen P a feladatban megadott egyetlen p -Sylow részcsoporthja G -nek.

Tehát $P^g = P$, bármilyen $g \in G$ -re. (Mivel csak egy p -Sylow van, csak önmaga konjugáltja lehet.) Ezért P minden elemének konjugáltja P -beli elem.

Ebből következik, hogy P normálosztó. $\square$

(b) Fordítva, ha G -nek van olyan p -Sylow részcsoporthja, amely normálosztó, akkor G -nek ez az egyetlen p -Sylow részcsoporthja.

Mivel P normálosztó $P^g = P$, bármilyen $g \in G$ -re. (Normálosztó-tulajdonságból következik.)

Mivel P -nek önmaga a konjugáltja minden g -re, ezért csak ez az egy p -Sylow létezhet, hiszen bármely két p -Sylow részcsoporth konjugált G -ben. $\square$

4.5. Határozzuk meg S_4 -ben a 2-Sylow részcsoporthok, illetve a 3-Sylow részcsoporthok számát.

A részcsoporthok számáról Sylow tételei a következőket állítják:

1. Ha q egy G rendjét osztó p -hatvány (ahol p prím), akkor a q -rendű G -beli részcsoporthok száma kongruens 1-gyel, modulo p .

2. A p -Sylow részcsoporthok száma osztója $|G : P|$ -nek.

Speciálisan a 2-Sylowok száma kongruens eggyel, modulo 2. Ezenkívül osztója $|S_4 : syl_2(S_4)| = 3$ -nak. Ebből következik, hogy 1 vagy 3.

A 2-Sylowok eleminek rendje 1, 2, 4 vagy 8, mert nyolcnak, a csoport rendjének osztója.

Nyolcadrendű elem nincsen S_4 -ben.

Negyedrendű elemek a 4 hosszú ciklusok, ezekből 6 van. ($3!$, hiszen az első elemet vehetjük fixnek, többi hozzá viszonyított helyzete fontos csak, ciklikusság miatt.)

Másodrendű elemek a 2 hosszú ciklusok, illetve ezek diszjunkt uniója. 2 hosszú ciklusból 6 db van S_4 -ben. (Négy elem közül kell kettőt kiválasztani, ami $\binom{4}{2}$ féle módon lehetséges.) 2 hosszú ciklusok diszjunkt uniója háromféleképpen állhat elő: $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$.

Tehát összesen 15 elem van, ami eleme egy 2-Sylownak. Mivel egy 2-Sylow 8 elemű, legalább 2-nek lennie kell, hogy minden elemet tartalmazza.

Ebből következik, hogy 3 db 2-Sylow van S_4 -ben.

Az előzőhöz hasonlóan tudjuk, hogy a 3-Sylowok rendje kongruens eggyel, modulo 3 és osztója $|S_4 : syl_3(S_4)| = 8$ -nak. Ezeknek a feltételeknek az 1 és 4 felel meg.

A 3-Sylowok száma nem lehet 1, a 2-Sylowokkal megegyező okok miatt.

Tehát 4 db 3-Sylow van S_4 -ben.

4.6. Igazoljuk, hogy egy G csoport összes p -Sylow részcsoportjainak metszete (egy adott p -re) normálosztó.

Legyen $x \in \cap P_i$, ahol P_i -k a p -Sylowok. Egy részcsoport elemének konjugáltja mindig benne van a részcsoport konjugáltjában, ezért ha $g \in G$, akkor $x^g \in (\cap P_i)^g$.

Tudjuk, hogy $(\cap P_i)^g = \cap (P_i)^g$. Sylow-tételei kimondják, hogy bármely két p -Sylow részcsoport konjugált G -ben.

Tehát, ha minden p -Sylownak konjugáltjának vesszük a metszetét, akkor a p -Sylowok metszetét vesszük. Így a metszet bármely elemének konjugáltja benne van a metszetben.

Tehát metszet normálosztó. (Bizonyítást lásd a 4.4. (a) feladatban.) $\square$

4.7. Mutassuk meg, hogy az**(a) 200-adrendű csoportok tartalmazznak normális Sylow részcsoportot.**

A $200 = 2^3 \cdot 5^2$, tehát a 200-adrendű csoportokban 2 és 5-Sylowok vannak.

Vizsgáljuk meg, hány 5-Sylow részcsoportja van a 200-adrendű csoportoknak.

Használjuk a 2.5. feladatban használt tételt a részcsoportok számának meghatározására.

Ezek szerint $n \equiv 1 \pmod{5}$ (ahol n az 5-Sylowok száma) és $|G : \text{syl}_5(G)| = 8$ osztója, vagyis: 1, 2, 4 vagy 8. Ennek a két feltételnek együttesen egyedül az $n = 1$ felel meg.

Tehát a 200-adrendű csoportoknak 1 db 5-Sylow részcsoportja van.

A 4.4. (a) feladatból következik, hogy ekkor ez normálosztó lesz. $\square$

(b) 204-edrendű csoportok tartalmazznak normális Sylow részcsoportot.

A $204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$, tehát a 200-adrendű csoportokban 2, 3 és 17-Sylowok vannak.

Vizsgáljuk meg, hány 17-Sylow részcsoportja van a 204-edrendű csoportoknak.

Az (a) feladathoz hasonló módon azt kapjuk, hogy $n \equiv 1 \pmod{17}$ és $|G : \text{syl}_{17}(G)| = 12$ osztója, vagyis, 1, 2, 3, 4, 6 vagy 12. Ezeknek ismét csak az $n = 1$ felel meg.

Tehát a 204-edrendű csoportokban a 17-Sylow részcsoport normálosztó. $\square$

(c) 260-adrendű csoportok tartalmazznak normális Sylow részcsoportot.

A $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$, tehát a 200-adrendű csoportokban 2, 5 és 13-Sylowok vannak.

Vizsgáljuk meg, hány 13-Sylow részcsoportja van a 260-adrendű csoportoknak.

Az eddigiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy $n \equiv 1 \pmod{13}$ és $|G : \text{syl}_{13}(G)| = 20$ osztója, vagyis 1, 2, 4, 5, 10 vagy 20. Ezeknek újra csak az $n = 1$ felel meg.

Tehát a 204-edrendű csoportokban a 13-Sylow részcsoport normálosztó. $\square$

(d) 56-odrendű csoportok tartalmaznak normális Sylow részcsoporthot.

Az $56 = 2^3 \cdot 7$, tehát 56-odrendű csoportokban 2 és 7-Sylowok lehetnek.

Vizsgáljuk meg, hány 7-Sylow részcsoporthja van az 56-odrendű csoportoknak.

Az eddigiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy $n \equiv 1 \pmod{7}$ és $|G : \text{syl}_7(G)| = 8$ osztója, vagyis 1, 2, 4 vagy 8. Ezeknek a feltételeknek az $n = 1$ és 8 felel meg.

Ha a 7-Sylowok száma 1, akkor ez az egy 7-Sylow normálosztó.

Ha a 7-Sylowok száma 8, akkor 48 hetedrendű elem lesz az 56-odrendű csoportban. (Minden 7-Sylowban van egy egységelem, illetve hat 7-edrendű elem, csak az egységelem közös.)

A nem hetedrendű elemek száma G -ben: $56 - 48 = 8$. Ezek a 2-Sylowok elemei. Mivel azonban egy 2-Sylow 8 elemű az 56-osrendű csoportokban, csak egy lehet belőle.

Tehát ebben az esetben a 2-Sylow lesz a normálosztó. $\square$

4.8. Mutassuk meg, hogy a p^2q -adrendű csoportokban, ahol p, q különböző prímek, van normális Sylow részcsoporth.

Vizsgáljuk meg a p -Sylowok számát.

Ha $p > q$, akkor $|\text{syl}_p(G)| = 1$, mert kongruens 1-gyel modulo p és a számuk 1 vagy q . Ekkor ez a p -Sylow normálosztó lesz. (Bizonyítást lásd. 4.4. (a) feladat.)

Másik eset, hogy $p < q$. (Egyenlő nem lehet a feladat szövege szerint.)

Ekkor 1 vagy p^2 lesz a q -Sylow száma a csoportban. (Azért nem lehet p , mert $p \equiv 1 \pmod{q}$, ha p és q prímek, csak akkor lehetséges, ha $p = 3$ és $q = 2$, de eleve feltettük, hogy $p < q$.)

Ha egy q -Sylow van a csoportban, akkor az normálosztó. Minden q -Sylowban $q - 1$ a q -adrendű elemek száma. (A maradék egy elem az egységelem, amely az összes q -Sylow metszete.) Ha a q -Sylowok száma p^2 , akkor összesen $p^2(q - 1)$ q -adrendű elem van G -ben. Mivel a feladat szerint p^2q eleme van, ez azt jelenti, hogy p^2 nem q -adrendű elem van benne. Egy p -Sylow részcsoporthnak p^2 eleme van, tehát ha a q -Sylowok száma p^2 , akkor csak 1 db p -Sylow lehet a csoportban. Ilyenkor ez a p -Sylow a normálosztó. $\square$

4.9. Legyen G véges csoport, $K \triangleleft G$ és P a K -nak egy p -Sylow részcsoporthja. Igazoljuk, hogy

(a) $G = KN_G(P)$.

Mivel a konjugálás nem vezet ki a normálosztóból P^g egy p -Sylow lesz K -ban.

A normálosztóban a p -Sylowok egymás konjugáltjai, ezért minden $g \in G$ -hez található olyan $k \in K$, amire igaz lesz, hogy $P^g = P^k$.

Ha $gPg^{-1} = kPk^{-1}$ egyenlőséget balról k^{-1} -nel, jobbról g -vel szorozzuk, akkor azt kapjuk, hogy $k^{-1}gP = Pk^{-1}g$. A normalizátor definíciója szerint így pontosan $k^{-1}g \in N_G(P)$.

Ezt átalakítva $g \in kN_G(P)$. Tehát $G = KN_G(P)$. $\square$

(b) G egy p -Sylow részcsoporthja benne van $N_G(P)$ -ben.

Azonos p -re a G -beli p -Sylowok tartalmzani fogják a K -beli p -Sylowokat.

Legyen P egy p -Sylow K -ban és P_G az őt tartalmazó G -beli p -Sylow. Ekkor mivel P_K maximális p -csoport K -ban $P_G \cap K = P$. Miután K normálosztója G -nek, P is P_G normálosztója lesz.

Ezért P bármely elemére igaz lesz, hogy P_G elemeivel felcserélhető a normálosztó tulajdonság miatt.

Tehát $P_G \subseteq N_G(P)$. $\square$

5. Felhasznált irodalom

Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: *Absztrakt algebrai feladatok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

Kiss Emil: *Bevezetés az algebra*ba. Typotex, Budapest, 2007.

Kiss Emil: *Bevezetés az algebra*ba - A gyakorlatok és a feladatok megoldásai. Typotex, Budapest, 2007.

<http://hu.wikipedia.org/wiki/Csoportelmélet>