A zsonglőrködés matematikája

SZAKDOLGOZAT

KISICS ISTVÁN

Matematika BSc Matematika tanári szakirány

Témavezető: Dr. Szabó Csaba, egyetemi docens

ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2009.

Előhang

Sokat foglalkoztam fiatalokkal, gyerekekkel. Vannak dolgok, amik megkönnyítették a kommunikációmat velük. Mindig olyan érdekességeket kerestem, amik kicsik, és bármikor elő lehet venni őket. A Rubik kocka logikai kirakása után, új hobbit kutatva megismerkedtem egy-két zsonglőrrel. A vidám előadásuk nagyon megfogott, és azzal a céllal vezérelve, hogy fel tudom kelteni és le tudom kötni sok ember figyelmét, elsajátítottam egy-két zsonglőr trükköt.

Az elmúlt nyarak többségén önkéntes segítséget vállaltam gyerektáborokban, év közben pedig heti rendszerességgel foglalkoztam általános iskolásokkal. A foglalkozásokon előszeretettel használtam labdákat, s ha szabad perc volt, mindig eljátszottam egy-egy trükköt a szerény repertoáromból. Hamar kezdtem kifogyni a könnyű trükkökből, s mindeközben felkértek, hogy gyerekekkel, heti rendszerességgel, gyakoroljak labdákat dobálni, zsonglőrködni. Ehhez szükségem volt természetesen sok gyakorlásra, és új trükkök tanulására. Gyakoroltam sétálva, buszon, vonaton, villamoson, egyetemen, mindenhol. Volt szerencsém BKV ellenőröket labdázásra tanítani, és játszottam MÁV jegykezelők nagy örömére. Folyamatosan új trükköket tanultam egy zsonglőr kollégistatársamtól, aki felhívta a figyelmemet tanulás közben arra, hogy nem csak elmutogatni tudja a trükköket, hanem más szemléltetésre is vannak lehetőségek. Több matematikai modellt is ismert, de amatőr zsonglőröknek a leghasználhatóbbat, egy bizonyos *siteswap*nak nevezett rendszer alapjait mutatta meg nekem, s az egyszerű trükkök ily módon való leírásával elindított az autodidakta trükk-elsajátítás felé.

Egy-két fellépés után észrevettem, hogy képeznem kell magamat a nehezebb trükkök fele, s a három labdáról tovább kell lépnem nagyobb labdaszámra. A koreográfiával sohasem törődtem, de az egyéb fejlődésekben nagyon nagy segítséget jelentett az előbb említett kódolási rendszer (siteswap). A régi trükköket felírva rájöttem, hogy melyik dobás miatt nőhet meg a hibázási lehetőségem, s azon túl jobban figyeltem rá. Új trükköket videók alapján kezdtem az elején tanulni, de be kellett látnom, hogy nem tartható az, hogy egy öt másodperces trükköt képkockánként nézzek meg, mert ez megvalósítható, de nem igazán kerülünk közel a dobások valódi erejéhez, magasságához, igazából csak a látványhoz, és a kezek helyzetéhez.

Minden tanárképzésben részt vevő hallgató köteles a BSc-s Alapszak végén egy tanári témával kapcsolatos szakdolgozatot írni. Sokat gondolkodtam, hogy milyen témában kellene jobban elmélyednem. Jobbára számelméleti, algebrai, kevésbé számítástudományi témában gondolkodtam, ami szervesen kapcsolódik a tanári szakmához. Sokat beszélgettem szaktársaimmal, hogy milyen szakdolgozatot írjak, de egyik sem tudott igazából megfogni. Mielőtt döntenem kellett a szakdolgozati témámról, szokásomhoz híven labdákkal a levegőben sétáltam az egyetemi campuson. A dolgozat ötlete akkor fogalmazódott meg jobban bennem. Sétálás közben összefutottam Szabó Csaba tanár úrral, aki elmesélte az élményeit a zsonglőrködéssel kapcsolatban, és összehozta a matematikával. Egy-két hét után rákérdeztem, hogy mint szakdolgozat-konzulens vállalná-e velem ezt a szakdolgozatot. Így kezdtem el ebben a témában mélyebbre ásni. Ezúton is szeretném megköszönni a segítségét és a bizalmát.

Az alább levő dolgozat célja egy amatőr zsonglőr fejlődésének a matematikai szemléltetése, illetve a később használható trükk-átalakítások precíz megalapozása, megfogalmazása, és egy apró kitekintés a továbbfejlődés lehetősége felé.

Tartalom

1. Bevezetés

A zsonglőrködést figyelve a matematikusok azon kezdtek el gondolkodni, hogy – bizonyos feltételek esetén – hány zsonglőr trükk van. Ismerik-e ezeket mind a profi zsonglőrök? Hamar kiderült, hogy nem! Több könnyen kivitelezhető zsonglőr trükkök várt a megtalálására. Itt matematikailag sikerült felfedezni valami újat.

A dolgozat elején felvázoljuk a zsonglőrködéshez szükséges minimális elméleti tudást: mi a kaszkád, mi a szökőkút… A tanulás lehetséges útjai, majd kis zsonglőr történet után mélyebb elemzésbe kezdünk.

A siteswapnak hívjuk zsonglőr trükkök dobásmagasság-sorozatát, és adunk pár lehetőséget ennek vizuális tanulmányozására.

Amikor a kezek felváltva mozognak, akkor aszinkron zsonglőrködésről beszélünk, és az idő ilyen ütemekre való osztásával, és a dobásmagasságok segítségével definiáljuk az egyszerű zsonglőr sorozatokat. A zsonglőr sorozatok világosabb ismeretéért függvényként is definiáljuk, aminek a segítségével az egyszerű zsonglőr trükkök labdaszámát is megállapíthatjuk.

A játszhatósággal kapcsolatban több tételt is megfogalmazunk, és ezek segítségével algoritmust is adunk játszhatóság ellenőrzésére. Új trükkök létrehozását szabályokkal irányítjuk, melyek kellékszám-változtatás esetén könnyíthetik a trükk elsajátítását. Belátjuk, hogy kellékszámtartó transzformációk segítségével a kaszkádokból és szökőkutakból minden zsonglőr trükk előállítható. A gyakorlati zsonglőrködés szempontjából lényeges, trükkök folyamatos játszásával újabb trükköket készíthetünk. A trükköket, mivel nem lehet mindegyiket egymás után lejátszani, összefűzzük.

Mindezek után ízelítőt adunk a multiplex, illetve a szinkron zsonglőrködésből: példákkal, egyszerűbb állításokkal, és játszhatóságukkal. Befejezésül rövid kitekintőt adunk, hogyan lehet több zsonglőrt megjeleníteni a játéktérben.

A dolgozat fonalát, olvasás közben, nem szerettük volna többször megszakítani, ezért a hivatkozások a dolgozat végén, egy helyen találhatók meg. A dolgozat elkészítéséhez ezeket és csak ezeket használtuk.

2. Általános

2.1. Zsonglőr gyakorlat

Aki még sohasem zsonglőrködött, annak meglepő lehet, hogy a zsonglőrködés definiálható, s a definíciója nem is egyértelmű. Több kérdésre is választ kell adni előtte:

Hány tárgyra van szükségünk?

Milyen tárgyak ezek?

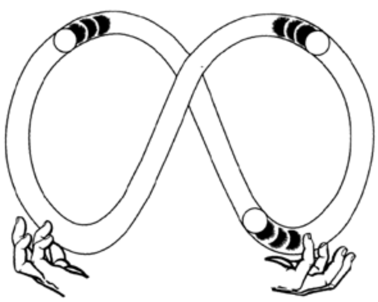
Mit teszünk ezekkel a tárgyakkal (kontaktzsonglőrködés)?

A sok definíció közül mi ezt választottuk:

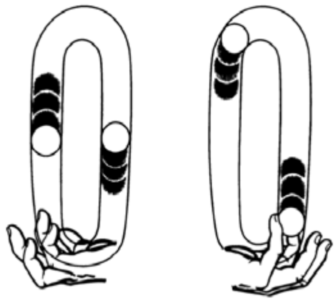
Definíció: A *zsonglőrködés* olyan tárgy-manipuláció, mely során a zsonglőr a kezei segítségével tartja a levegőben a zsonglőrkellékeket, és ezt le is lehet írni.

A tárgyak minőségével nem foglalkozunk, a könnyebbség kedvéért feltesszük, hogy *labda*.

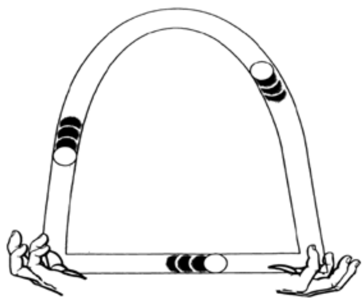
Először tekintsünk át néhány alap-trükköt. Ha három labda ∞-t ír le a levegőben, akkor azt *kaszkád*nak nevezzük; ha páros számú labdával játszunk, akkor felével zsonglőrködünk az egyik, ill. a másik kezünkben, körökben, ezt *szökőkút*nak hívjuk. A szökőkutat kétféleképp lehet eljátszani: vagy *szinkron*ban, amikor egyszerre mozognak a kezek, vagy *aszinkron*ban, ekkor felváltva. Egy másik trükk, ami a zsonglőrködés felé nagy motivációt jelent, a *koszorú*, ekkor a jobb kézből feldobjuk a labdát magasan a bal kézbe, a bal kézben levő labdát pedig gyorsan, alacsonyan a jobb kézbe. Ez három, vagy több labdánál már nagyon nehéz, sokkal nehezebb, mint a kaszkád, vagy a szökőkút ugyanannyi labdával. Ezeket a trükköket az első három ábrán szemléltetjük.



1. ábra: kaszkád



2. ábra: szökőkút



3. ábra: koszorú

Ha az alapkoncepciót nézzük, akkor az egyszerű zsonglőrködésnél egy kézben egyidejűleg csak egy labda lehet. *Multiplex* zsonglőrködésnek nevezzük azt, ha több labda is lehet egy kézben egyszerre.

2.2. Zsonglőr történet, kezdő matematika

A zsonglőrködés nagy múltra tekint vissza: az egyik legkorábbi feljegyzés az ókori Egyiptomból való, egy sír faláról (4. ábra), keletkezése Kr. e. 1994 és 1781 közé tehető.

4. ábra: egyiptomi sírrajz

Kínai, ír, zsidó, görög írások bizonyítják a zsonglőrködés már Krisztus előtti jelenlétét. Ismert, hogy a római idők alatt már elterjedt volt, és az előadóművészeket latinul joculatores-eknek nevezték, a francia jongleurs-ből pedig megszületett a világszerte elterjedt zsonglőr megszólítás.

Az első ismert zsonglőrködéshez kapcsolódó tételek Claude Shannon nevéhez köthetők: Shannon tételeiként váltak ismertté. A tételek több zsonglőrködő fogalmat használnak, mint például a labda *repülési ideje* (F), a labda *kézben tartási ideje* (D), és az idő, amíg a *kézben nincs labda* (V).

Definíció: Az *uniform* zsonglőrködés olyan egyszerű zsonglőrködés, ahol D, F és V mind állandó a zsonglőrködés közben.

Ez a definíció már alkalmas valódi zsonglőr *trükk*ök meghatározására: tartalmazza a kaszkádokat és szökőkutakat is. Manapság már ezt az elméletet felváltották szemléletesebb fogalmakat használó, a zsonglőr trükköket más irányból megközelítő jelölésrendszerek és zsonglőr-elméletek.

A siteswap, amiről ez a dolgozat szól, segít rövid leírást adni egy matematikai konstrukcióval arra, hogy zsonglőrök képesek legyenek zsonglőr trükköket alkotóelemeikre bontani, egy-egy régi trükk nehézségét feltárni, új trükköket felfedezni, régi trükkökből új trükköket alkotni.

3. Siteswap

Zsonglőr trükköket sokféleképpen le lehet írni, de valahol mindig meg kell húzni a vonalat a kifejezőerő és a tömörség között. Szöveges, videós leírásokkal ellentétben a ***siteswap*** egy nagyon tömör jelölésrendszer.

Első pillantásra egy furcsa, számokból, betűkből és különféle zárójelekből álló kódnak tűnik (mert ilyen pl.: <2|3p><2p|3><[3p/2]|3p><3|3>), de kiderül, hogy egész egyszerű megérteni. Kis gyakorlás után bárki számára használható, és a leírás alapján a trükkök megtanulhatók. Formátuma elég kötött ahhoz, hogy számítógépes zsonglőr-szimulátorok is fel tudják dolgozni (mint pl. a Juggling Lab, Jongl,). A tömörség hátránya viszont, hogy a jelölésrendszer nem mond semmit a dobásról és az elkapásról (kezek helyzete, elkapás módja), se a kellékről (hányat pördül a buzogány a levegőben). Csak arról szól, hogy mikor, melyik kézzel kell a kelléket eldobni, melyik kézbe esik le, és hány ütem múlva dobjuk fel újra. A többi már a zsonglőrön áll: a dobás lehet sima kaszkáddobás, hát mögötti, földről pattintott, bizonyos kellékeknél akár a fej fölött megpörgetett helikopter rotor is. ☺ A lényeg csak az, hogy a dobás végén a kellék a megfelelő pillanatban, a megfelelő kézbe kerüljön. Ebből a szempontból nézve a siteswap elég minimalista, a teljesen különbözőnek látszó háromlabdás kaszkád és mills-mess trükkök leírása például ugyanaz. Ez persze semmit sem von le abból a tényből, hogy jó mulatság (el tudjuk-e zsonglőrködni a telefonszámunkat), segít a bonyolultabb trükkök részekre bontásában, és remek kiindulási alap lehet ötletek megvalósításához.

A legegyszerűbb ***vanilla siteswap***ból (egyszerű zsonglőr trükkökből) kiindulva lépésenként vezetjük be a multiplex, a több zsonglőrös, passzolgatós trükkök leírásához szükséges eszközöket. A megértéshez szükség van némi zsonglőr tapasztalatra (mi a kaszkád, a koszorú vagy a szökőkút) és csipetnyi matematikai érzékre.

3.1. Zsonglőrködés szólóban, aszinkron dobásokkal

A jelölésben fel kell tennünk, hogy az idő fel van osztva egy sor különálló ütemre. Ezek az ütemek szabályosan helyezkednek el egymáshoz képest. A jelölés bármilyen kellékre jó, de mi mindig labdákra fogunk hivatkozni. Feltesszük, hogy a labdákat egy kéz kapja el, és egyből tovább is dobja (azaz a dobás és az elkapás ugyanarra az ütemre esik). Így megfogalmazhatjuk a következő definíciót:

Definíció: Az idő szabályos felosztásának egységeit *ütem*eknek nevezzük

A legegyszerűbb esetben a zsonglőr egyedül játszik, és felváltva dob a bal és jobb kezével: B-J-B-J. Ez történik például a kaszkádnál, de sok más trükknél is. Egy sorozatot úgy írunk le, hogy mindegyik dobáshoz hozzárendelünk egy nem-negatív egész számot. Ez az egész szám: „az ütemek száma, mielőtt a labdát megint feldobnánk". A dobás magasságának nevezzük ezt az egész számot, és H-val jelöljük. Amíg a zsonglőr *mintá*kat nem definiáljuk, addig feltesszük, hogy a zsonglőr örökké játszik. Ez eredményezi a következő definíciókat.

Definíció: Az ütemekhez hozzárendelt nem negatív, egész számokat *dobásmagasság*oknak hívjuk. Nagyságukat az határozza meg, hogy hány ütem múlva lesz a feldobott labda újból a kezünkben.

Definíció: *Egyszerű zsonglőr sorozat*on dobásmagasságok egy sorozatát értjük: $(\ldots,H_{-1},H_0,H_1,H_2,\ldots)$.

Ezek az egész számok a háromlabdás kaszkád esetében minden dobásnál 3-asok lesznek. (Ha nem tudjuk elképzelni, próbáljuk ki! Fogjunk két labdát és egy jól összegyúrt zoknit a kezünkbe. Kezdjük a kaszkádot a zokni feldobásával (első dobás), és számoljuk meg, hányadikra dobjuk fel újra. *Remélhetőleg négyet kapunk, ha nem, akkor vagy a kaszkáddal volt a baj, vagy nem jól számoltunk, úgyhogy próbáljuk újra.* Mivel 4 - 1 = 3, a zoknit három ütem múlva dobtuk fel másodszor). A kaszkád szép szimmetrikus minta, ezért ugyanígy 3 lesz a különbség, ha a zoknit először a második, vagy a harmadik ütemben dobjuk fel. Nézzünk most egy másik trükköt, a szökőkutat. Itt négy labdával zsonglőrködünk, és a fenti zoknis módszer minden dobásra 4-et ad. A B-J-B-J ritmusból következik, hogy az elkapó (azaz a kelléket legközelebb feldobó) kéz páros számokra változatlan (mindig ugyanabból dobjuk fel a zoknit), páratlanokra pedig felváltva a bal és a jobb kéz. Ebből következik a kaszkádok ∞ alakja és a szökőkutak két karika alakja.

Így az ütemek segítségével minden magassághoz hozzárendelhetünk egy dobást a következőképpen. A 0 egy *nem-dobás*, azt jelenti, hogy az adott ütemben nincs kellék a kézben. Az 1 gyors vízszintes dobás; ezt a kelléket dobjuk el a következő ütemben is, de a másik kézből. (A gyakorlatban például a koszorúnál fordul elő.) A 2 azt jelenti, hogy a kelléket *ugyanabból* a kézből fogjuk eldobni a következő ütem *után*. Tulajdonképpen egy nagyon alacsony dobásként is felfogható lenne, de ezzel a kezünkkel addig már nem csinálunk semmit, mert a B-J-B-J ritmus miatt nem eshet a kézbe ezalatt semmi más. Így azt mondhatjuk, hogy 2-esnél a kelléket nem dobjuk fel, csak a kezünkben tartjuk. Ezeknél nagyobb páratlan n-ekre a dobás olyan, mint az n labdás kaszkád egy dobása (átmegy a másik kezünkbe). Párosakra pedig olyan, mint az n labdás szökőkút dobásai (nem megy át). Megállapodás szerint a 9-nél nagyobb dobásokat az ábécé kisbetűivel jelöljük a=(10), b=(11), c=(12) stb.

Egy zsonglőr sorozat végtelen hosszú lesz, de mi, ha zsonglőr trükkre gondolunk, akkor periodikusnak, újra megismételhetőnek akarjuk. Az (..., 5, 3, 1, 5, 3, 1,...) zsonglőr sorozatból például ezt az információt ki tudjuk fejezni azzal, hogy éppen a legrövidebb ismétlődőt írjuk le. A konvenció az, hogy egy periódus magasságai közül mindegyiket leírjuk a mintában, anélkül, hogy vesszőkkel, vagy zárójelekkel vesződnénk: $H_0H_1H_2...H_{d-1}$. Például (..., 5, 3, 1, 5, 3, 1,...) := 531.

Ezek alapján megfogalmazhatjuk a következő három definíciót:

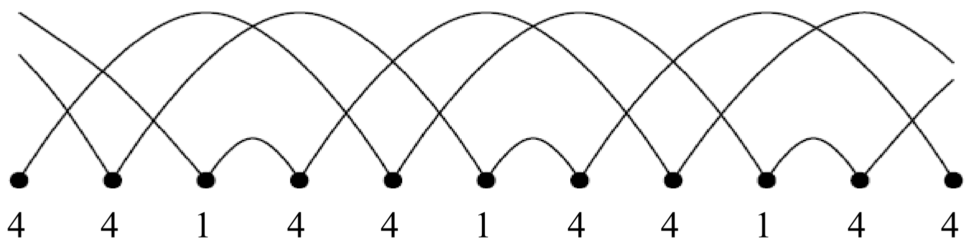
Definíció: *Egyszerű zsonglőr trükkön* véges hosszú egyszerű zsonglőr sorozatot értünk. Ez a vanilla siteswap.

Definíció: Egy egyszerű zsonglőr sorozat periódusai azok az egyszerű zsonglőr trükkök, melyeket végtelen sokszor megismételve a sorozatot kapjuk. A periódusok közül a legrövidebb a sorozathoz tartozó *egyszerű zsonglőr minta (vanilla zsonglőr minta)*.

Definíció: Az egyszerű zsonglőr trükk *hossza* a benne szereplő ütemek száma.

Az egyszerű zsonglőr minta mindig olyan, hogy a végén megállás nélkül folytathatjuk az elejéről. Egy ilyen minta leírja az információ egészét, amire szükségünk van, hogy játsszuk, ill. ismételjük. A periódusok ismétlése miatt fel tudjuk tenni, hogy egy minta bármilyen ciklikus permutációi még mindig ugyanazt a sorozatot adják, például a 441 ilyen módon ugyanaz 144-ként és 414-ként; mindazonáltal a minták közti különbségnek fontos jelentésük van néhány alkalmazásban, például majd a kellékszámtartó transzformációknál.

Ábrázolni tudjuk ezeket a sorozatokat diagramon, egy szemléletes módszerrel: Például az 5. ábrán a 441 zsonglőr trükk képe:



5. ábra: a 441 zsonglőr minta képe

3.1.1. Néhány háromlabdás zsonglőr minta

- 3 – kaszkád
- 51 – koszorú, egy 5-ös majd 1-es dobás
- 441 – kicsit dobozszerű trükk
- 55500 – villanás, avagy flash
- 50505 – snake, vagy kígyó
- 60 – három labda egy kézben, a másik kéz üres

3.1.2. Függvénydefiníció

A fent definiált vanilla siteswap egy gyakorlati jelölés. A továbbiakban bevezetünk egy olyan definíciót, amely hasznosabb az elméleti tételek megoldásához, és végtelen sorozatokra is könnyen alkalmazható.

Definíció: Egy zsonglőr sorozat *zsonglőr függvénye* f, egy egész számokon értelmezett egész értékű függvény, mely bijektív, azaz egész számok egy permutációját adja, és $f(t) \geq t$ minden t egész számra úgy, hogy a t ütemben feldobott labda $f(t)$ időpontban érkezik vissza.

Tehát az f függvény értéke x helyen y, ha az x-edik ütemben dobunk fel labdát, és a következő alkalommal az y-odik ütemben dobjuk fel ugyanazt, egyébként a függvény értéke x, azaz nem dobunk fel labdát. A háromlabdás kaszkád függvénye az $f(x) = x + 3$; a négylabdás szökőkút függvénye az $f(x) = x + 4$, a háromlabdás koszorúé pedig az, ami párosakra $x + 5$ –öt, páratlanokra pedig $x + 1$-et ad.

Jegyezzük fel, hogy ezek a függvények milyen partíciókra osztják az egész számokat, példaként tekintsük a háromlabdás kaszkád és koszorú függvényeit. A kaszkád a $\{\{...,-6,-3, 0, 3, 6,...\}, \{...,-5,-2, 1, 4, 7,...\}, \{...,-4,-1, 2, 5, 8,...\}\}$ partíciókat adja. A koszorú a $\{\{...,-6,-1, 0, 5, 6, 11,...\}, \{...,-5,-4, 1, 2, 7, 8,...\}, \{...,-3,-2, 3, 4, 9, 10,...\}\}$ partíciókat határozza meg.

Vegyük észre, hogy a $df(t) := f(t) - t$ függvény pontosan a dobásmagasságokat adja.

Definíció: Egy f zsonglőr függvény *periodikus*, és d a periódusa (azaz zsonglőr trükk függvénye), ha $i \equiv j \bmod d$ esetén $df(i) = df(j)$ minden i, j egész számra.

Ez a definíció összhangban van a siteswap jelöléssel, hisz egy periódus alatt leírt dobásmagasságokkal ($df(t)$) pont egy zsonglőr trükköt kapunk. A függvény bijektív, ezért legfeljebb egy labda eshet le egy ütemben, emiatt van korlátozva egyszerű zsonglőr sorozatokra.

Definíció: Legyen f zsonglőr függvény. A labdák száma megegyezik azzal a számmal, ahány partícióra osztja a függvény az egész számokat.

Ezek alapján megfogalmazható az első, függvényeket alkalmazó és akár végtelen sorozatokat is jellemző tétel.

Tétel: Legyen f zsonglőr függvény, és tegyük fel, hogy a df(t) magasságfüggvény nem negatív és korlátos. Ekkor a zsonglőr sorozat kellékeinek a száma:

$$\textit{kellékszám}(\,\boldsymbol{f}\,) = lim_{|I|\to\infty} \frac{\sum_{x\in I} df(x)}{|I|}$$, továbbá

a határérték minden I = {a, a+1,..., b}-re vonatkozik, ahol I részhalmaza az egész számoknak.

Bizonyítás: A tétel bizonyítása hasonló a következő fejezetben következő átlagszabály bizonyításához.

Az átlagszabály kimondásával mind a függvénydefiníciót, mind a végtelen zsonglőr sorozatokat mellőzve áttérünk az egyszerű zsonglőr trükkök kellékszámának megállapítására, majd játszhatóságára, transzformációira.

3.1.3. Átlagszabály

Ennél a pontnál a matematikusok azon kezdtek el gondolkodni, hogy – bizonyos feltételek esetén – hány zsonglőr trükk van. Ismerik-e ezeket mind a profi zsonglőrök? Hamar kiderült, hogy nem! Olyan egyszerű zsonglőr sorozatokat sem ismertek, mint pl. a *441* vagy az *12345*. Matematikailag fedeztek fel valami újat.

Felmerült a kérdés, hogy minden számsorozat zsonglőr trükk-e. A válasz egy részét a következő tétel adja meg:

Tétel: Átlagszabály. Tetszőleges zsonglőr trükkben a dobásmagasságok átlaga éppen a labdák száma, tehát egész szám.

Bizonyítás: Tekintsünk, az egyszerűség kedvéért, egy tetszőleges egyszerű zsonglőr mintát: $H_0H_1H_2...H_{d-1}$. A d hosszúságú mintában a labdák repülési idejét (ütemeit) nézzük két aspektusból, ha a labdákat külön nézzük, akkor $H_0+H_1+H_2+...+H_{d-1}$ magasságokat repülnek. A p labda mindegyike pontosan d ütemig van a levegőben, s ha együtt nézzük őket, akkor az előző összeg megegyezik a pd szorzattal. Átszorzással a labdák száma pontosan a dobásmagasságok átlaga lesz.

Definíció: A számsorozatok közül a valódi zsonglőr sorozatokra a továbbiakban azt fogjuk mondani, hogy *játszható*k.

Az egyetlen számból álló minták játszhatók. Tulajdonképpen az „n labdás” kaszkád-, illetve szökőkút trükkökről van itt szó, meg persze a 0-ról, ami nem-zsonglőrködést jelent, az 1-ről, ami egy kellék oda-vissza dobálása egyik kezünkből a másikba, és a 2-ről, ami egy-egy kellék tartása mindkét kezünkben. (Ki mondja, hogy zsonglőrködni nehéz?) Ha egy számsorozat csupa egyforma számból áll, azt mondjuk rá, hogy *homogén* sorozat, homogén trükk. Ezek is mind játszhatók, és megegyeznek a megfelelő minta megfelelő számú ismétlésével.

Tehát a játszható trükkökben szereplő számok átlaga egész, s ennek a jelentése is fontos, mert ennyi kellékre van szükség a trükk végrehajtásához. A 76 átlaga például 6,5, ami nem egész, tehát a 76 nem játszható. Viszont a 75-re 6-ot kapunk, tehát hat labda kell hozzá. Általában sajnos még az átlagszámítás sem elég, van ugyanis olyan számsorozat, aminek az átlaga egész, de mégsem játszható.

3.1.4. Vanilla játszhatóság

Állítás: Egy egyszerű zsonglőr trükk (vagy minta) játszható, azaz *vanilla siteswap*, ha nem esik két, vagy annál több dobás egy ütemre.

Tétel: Az előbbi állítás ekvivalens azzal, hogy ha $\{ i + H_{i \,(\mathrm{mod}\ d)} : i \text{ egész}\}$ halmaz az egész számok egy permutációját adja, akkor $H_0H_1H_2...H_{d-1}$ egyszerű zsonglőr trükk.

Bizonyítás: Legyen $H_0H_1H_2...H_{d-1}$ egy tetszőleges egyszerű zsonglőr minta. Az, hogy nem esik egynél több labda egy kézbe egyik ütemnél sem, az pont az jelenti, hogy a halmaznál, ha i az ütem és $H_{i \,(\mathrm{mod}\ d)}$-t adjuk hozzá, mint az ütemhez tartozó megfelelő dobásmagasság, akkor egyetlen egész szám sem áll elő kétszer, így az egész számokat önmagára képeztük. A vissza-irány ugyanez, mivel nem áll elő egyik egész szám sem kétszer, így mindig csak maximum egy labda kerül az adott ütem során a kézbe.

Egy használhatóbb formát nyújt a továbbiakban a következő tétel:

Tétel: Tekintsünk egy nem-negatív egész számokból álló tetszőleges $A_1A_2\dots A_d$ sorozatot. Ez a sorozat pontosan akkor játszható zsonglőr trükk, ha teljesül az alábbi feltétel:

Az $A_1+1, A_2+2,\dots, A_d+d$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo d.

Ha trükk nem áll elő egy rövidebb sorozat periodikus ismétléseiként, akkor a zsonglőr trükk zsonglőr minta.

Bizonyítás: Ez ekvivalens az előző tétel állításával, mert itt a maradékosztályok megfelelnek az egész számok egy-egy partíciójának, és a partíciók uniója pont az egész számok lesznek. Az ilyen legrövidebb sorozatok pedig természetesen zsonglőr mintát alkotnak. Ez alapján egy egyszerű ellenőrzést, algoritmust kapunk sorozatok játszhatóságát illetően.

3.1.5. Játszhatósági algoritmus

A dobások egy sorozatában, mindegyik ütemben egy labdát kell megfogni, hogy dobhassuk a következő ütemben. E tényen alapul az aszinkron trükkök játszhatósága. Úgy kell ellenőrizni egy számsorozatot, hogy siteswap-e, hogy a megfelelő számot írjuk az utána levő megfelelő számú ütemű alá úgy, hogy leszámoljuk a dobásmagasságot és az utolsó, számolt ütem alá írjuk. Ezt az algoritmust követve minden szám alatt pontosan egy számnak kell szerepelnie. Ez biztosítja, hogy egy labda van mindig a kezünkben (nem nulla és nem kettő vagy több), s ez is a megfelelő ütemben. Ha a számsorozatban van 0, akkor alá kerül a 0.

Tekintsünk egy példát, vajon vanilla siteswap-e az 51234 számsorozat

51234	**51234**	**51234**	**51234**	**51234**
5	**5 1**	**5 1 2**	**531 2**	**53142**

Mivel minden szám alá pontosan egy szám került, így az 51234 játszható. Mellesleg megjegyezendő, hogy ezzel az 51234 is érvényes siteswap.

Nézzünk még egy példát, amelyre érvényes az átlagszabály: 55235

55235	**55235**	**55235**	**55235**	**55235**
5	**55**	**55 2**	**55 2**	**55 2**
			3	**3 5**

Ebből az következik, hogy az 55235 nem játszható (mert a kettes és az ötös ütemben kettő labda van a kézben, a hármas és négyes ütemben pedig egy sem.)

A játszhatósági algoritmussal nemcsak zsonglőr trükkök játszhatósága, hanem végtelen zsonglőr sorozat játszhatósága is ellenőrizhető. Példaként figyeljük meg, hogy a 333-ból probléma nélkül átjátszhatunk a 441-re:

......333441441......

......333144144......

Az algoritmus helyességét, azaz a játszhatóság ellenőrzését, a maradékosztályokat használó tétel igazolja.

3.1.6. Kellékszámtartó transzformációk

Most bevezetünk szabályokat, amivel meglevő zsonglőr trükkökből új trükköket hozhatunk létre. Ezek a szükséges kellékek számát nem változtatják (mert az átlag állandó marad), viszont megvan az előnyük, hogy játszható trükkökből kiindulva játszhatókat hoznak létre.

Ismétlési szabály

Már említettük, hogy a trükkök végére érve a trükkök zsonglőrködése az elejéről folytatható. Ez az ismétlési szabály. Például a 3 siteswapból 33, 333 stb. nyerhető, vagy az 51-ből 5151, 515151, stb.

Ciklikus forgatási szabály

Egy sorozat utolsó eleme az első elem elé vihető. A szabály alkalmazásával az 55500-ból a 05550, 00555, 50055 és 55005 leírások származtathatók.

Figyeljük meg, hogy ez nem okoz lényeges változást a trükkön, hiszen csak a kezdőfázist váltogatja. Gyakorlatban a leírást úgyis ciklikusan ismételhetjük (az ismétlési szabály értelmében), ezért teljesen lényegtelen, hogy mi volt az első dobás.

Jelölés: $(H_0H_1H_2...H_{d-1})^c := H_{d-1}H_0H_1...H_2 = H^c{}_0H^c{}_1H^c{}_2...H^c{}_{d-1}$.

A trükk és transzformáltja pontosan ugyanakkor játszható, és természetesen ugyanannyi kellékre van szükség mindkét trükk esetében.

Ütemcsere

A sorozat játszhatósága azon múlik, hogy minden ütem elején kell, hogy legyen egy (és csak egy) éppen leeső labdánk, amit abban az ütemben fogunk feldobni. A 333 esetén az első ütemben eldobott labda a negyedik ütemben érkezik meg, a másodikban eldobott pedig az ötödikben. Ha a hármas dobás helyett az első ütemben négyest dobunk, a másodikban pedig kettest, akkor az először eldobott labda az ötödik ütemben fog leesni, a másodszor eldobott pedig a negyedikben esik le. Így a két labda beérkezésének üteme felcserélődik. Ezen kívül más nem történik, tehát továbbra is játszható trükköt kapunk: mindig lesz mit feldobni, és egyszerre nem esik le több labda. Ez egy egyszerű példa volt az ütemcserére.

A szabály a következő: egy siteswap leírásban két szomszédos szám úgy cserélhető fel, hogy az előrehozott számot eggyel megnöveljük, a hátravittet pedig eggyel csökkentjük. (0 alá természetesen nem szabad menni.) Így tehát a 333-ból a 423 majd a 441 is származtatható.

Ez általánosabban és precíz jelöléssel:

$(H_0H_1H_2...H_{d-1})^{j.k} := H^{j.k}{}_0H^{j.k}{}_1H^{j.k}{}_2...H^{j.k}{}_{d-1}$, ahol a

$$H^{j.k}{}_j := H_k + k - j$$

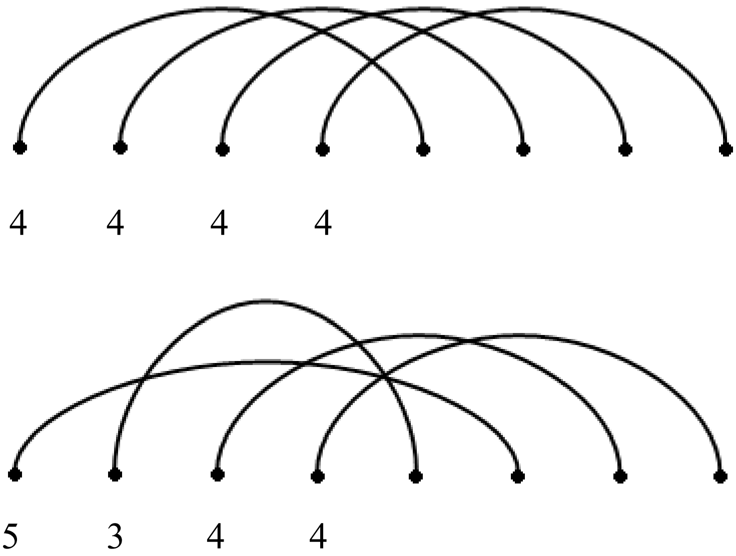
$$H^{j.k}{}_k := H_j + j - k$$

$$H^{j.k}{}_i := H_i$$

A fenti gondolatmenet alapján a trükk és transzformáltja pontosan ugyanakkor játszható és ugyanannyi kellékre van szükség mindkét trükk esetében.

Konkrétabban fogalmazva, ha két nem feltétlenül szomszédos számot akarunk megcserélni, a balra mozgó szám minden lépésnél eggyel nő, a jobbra mozgó pedig lépésenként eggyel csökken. Erre példa, hogy az **5**1**2**34-ben az 5-ös és a 2-es dobásmagasság megcserélésekor a 2-es kettővel mozdul balra, így 4-es lesz, az 5-ös pedig kettővel mozdul jobbra, tehát 3-as lesz. Így a végeredmény: $(\mathbf{5}1\mathbf{2}34)^{0,2} = \mathbf{4}1\mathbf{3}34$.

Képi illusztrációként a 6. ábrán pedig a $(4444)^{0,1} = 5344$ transzformáció diagramjai:



5. ábra: a $(4444)^{0,1}$=5344 transzformáció diagramjai

Meg kell említeni, hogy a siteswap leírás a nevét a harmadik szabályról kapta: a *siteswap* szó magyarul *ütemcserét* jelent. Az egyszerűség kedvéért a trükkökre általános jelölést vezetünk be: $H := H_0H_1H_2...H_{d-1}$. Ezen koncepció mellett a két kellékszámtartó és hossztartó szabály jelölése: $H^{i,j}$, illetve H^c.

A fenti szabályok alkalmazásával az adott számú kellékhez tartozó összes játszható siteswap leírás levezethető. A következő algoritmus szolgál ennek bizonyítására.

3.1.7. Homogenizáló algoritmus

Legyen adott egy $A_0A_1...A_{d-1}$ nem negatív egész számokból álló sorozat. Az alább részletezett algoritmus alapján átalakítjuk a számsorozatot. Az algoritmusban használt transzformációk tulajdonságai miatt a bemeneti sorozat pontosan akkor játszható, azaz zsonglőr trükk, ha a kimeneti sorozat is.

1. Ha ez egy állandó sorozat, azaz $A_0 = A_1 = ... = A_{d-1}$, akkor megáll az algoritmus és kiadja ezt a számsorozatot. Különben 2-esre lép.

2. Legyen $m := \max(A_i)$. A ciklikus forgatási szabályt kell alkalmazni, amíg $A^c_0 = m$ és $A^c_1 < m$.

2.1 ha A^c_0 és A^c_1 különbsége 1, akkor kiadja ezt a számsorozatot és leállítja az algoritmust, mert az $A_0 - 1 = A_1$ egyenlet a labdák ütközéséhez vezetne, tehát az innen kijövő sorozatok és így a kiinduló sorozataik sosem lesznek zsonglőr trükkök

2.2 A^c-t átnevezi A-ra és a legvégén 3-asra lép

3. Transzformálja A-t $A^{0,1}$-gyé. Ezek után $A^{0,1}$-t átnevezi A-ra és 1-esre lép. Ez a lépés csökkenti a sorozat maximális elemeinek a számát, vagy a maximális elem nagyságát. Valójában elveszünk a legmagasabb értékből 1-et a sorozatban, és hozzáadunk 1-et egy olyan értékhez, ami legalább 2-vel kisebb a legmagasabb értéknél. Tehát ennek az algoritmusnak véges számú lépésben kell véget érnie.

Állítás: Egy játszható, egyszerű zsonglőr trükk, azaz egy vanilla siteswap esetében a végeredmény az állandó számsorozat.

Példák az algoritmus illusztrálására:

441 ! 414 ! 234 ! 423 ! 333 **513 ! 243 ! 432**

A második példa azért nem játszható, mert több labda esne egy kézbe egy ütem alatt. Most már megfogalmazhatjuk a fejezet előtt felvázolt tételt:

Tétel: Minden zsonglőr trükk előállítható a megfelelő hosszúságú homogén sorozatból ciklikus forgatási szabállyal, és ütemcserével.

Bizonyítás: A homogenizáló algoritmus, mikor egy zsonglőr trükkre alkalmazzuk, az ugyanolyan hosszú homogén trükkel végződik. Az algoritmus lépésein visszafelé, a kívánt számsorozathoz, azaz a kívánt vanilla siteswaphoz érünk.

3.1.8. Trükkök fűzése

A zsonglőrködés nagyon fontos tulajdonsága, hogy trükkökből, minták lejátszásából áll. Játék közben mintákat ismételünk, és más mintákat játszunk egymás után. Két minta nem minden esetben lesz közvetlenül játszható egymás után. Végtelen sorozatokkal dolgozunk egyelőre. Tekintsük a következő példákat: a 3 minta sorozata után a 441 minta sorozatának lejátszásával új zsonglőrsorozatot kaphatunk: …333441441… ´(előtte és utána feltesszük, hogy már játszható). Felmerül a kérdés, hogy játszható marad-e. Nincs semmi meglepetés, hisz már láttuk, hogy az új zsonglőrsorozat játszható lesz.

……333441441……

……333144144……

Nézzünk egy újabb példát. Játsszuk a 3 minta sorozata után az 504 minta sorozatát. A játszhatósági algoritmus itt egy nem játszható sorozatot detektál:

……333504504……

……333 054054……

0

A játszhatóság megjavítására is a játszhatósági algoritmust, illetve az algoritmus után megmaradó képet fogjuk használni. A második minta első reprezentánsát fogjuk átalakítani, hogy az algoritmus által készített kép második sorában az üres helyeket betöltsük. A minták kellékszámának megegyezése miatt pontosan annyi többszörös ütemünk van, amennyi kiküszöbölésre váró üres ütem. A példánkban egy 3-as és egy 0-ás dobás esik egy ütemre. Két kézenfekvő lehetőségünk van: vagy a 3-as, vagy a 0-s dobást az üres ütembe dobjuk, jobban mondva ott kapjuk el. A következő képen a 0-ás dobásmagasságot változtattuk 2-esre, és így átjátszhatóvá tettük a két sorozatot:

……333524504……

……3332054054……

Meg kell jegyeznünk, hogy a fent részletezett átalakítás a kellékszámot – a függvénydefiníciónál kimondott, kellékszámra vonatkozó tétel szerint – nem változtatta meg.

Két trükk összefűzését az előző két sorozat mintáin keresztül fogjuk szemléltetni. A játszhatóságot ismét a játszhatósági algoritmussal látjuk be. A 333504 nem játszható (a fenti végtelen esetből következik). Hasonló technikához folyamodunk, mint a végtelen zsonglőr sorozatok esetében: a 333504504 számsorozatot alakítjuk át. Első átalakításunk ugyanaz: 333524504. Ezzel az átalakítással viszont az átlagszabályt és a játszhatósági algoritmus szabályait is megszegtük. Ennek korrigálására be kell iktatnunk még egy ütemet, és az átlagszabály 1-es dobásmagassággal adja ki legrövidebben a megfelelő kellékszámot. Ez alapján jogos a következő siteswap megalkotása:

3335245041
1543332054

Mindemellett természetesen meg kell említeni, hogy a lezáró, 1-es dobás előtt még tetszőleges számú 504 minta zsonglőrködhető el. Ez a változtatás nem egy recept, mindig a trükköktől függően konstruáljuk meg az átalakításokat. A trükk átalakításához, és lezárásához szükséges dobásokat diagram segítségével lehet a legszemléletesebben megsejteni.

3.1.9. Kellékszám-változtató transzformációk

Most bevezetünk olyan szabályokat, amivel meglevő zsonglőr mintákból és sorozatokból új sorozatokat hozhatunk létre. Ezek a szükséges kellékek számát megváltoztatják (úgy, ahogy az átlag változik), viszont megvan az előnyük, hogy játszható sorozatokból kiindulva játszhatókat hoznak létre. Ízelítőül mutatok egynéhány példát, de itt nem végzek teljes elemzést.

Egyedi hosszmanipuláció

Egy sorozat jászhatóságát nem változtatja az a transzformáció, amely a sorozat egy dobásmagasságának nagyságát a sorozat hosszával megnöveli, illetve lecsökkenti (úgy, hogy természetesen 0 alá ne menjen egyik dobásmagasság sem). Például: 55555→55505→50505.

Univerzális hosszmanipuláció

Egy sorozat jászhatóságát nem változtatja az a transzformáció, amely a sorozatban minden dobásmagasságot 1-gyel növel, vagy 1-gyel csökkent (úgy, hogy 0 alá ne menjen egy dobásmagasság sem). Például: 441→552, 42→53, 0→3.

A labdák száma mindkét esetben az átlagszabály értelmében változik. A két szabály ellenőrzését a játszhatósági algoritmussal könnyen lehet rekonstruálni. Most már a kellékszámtartó transzformációkkal együtt a 0 nem-zsonglőrködésből bárhova eljuthatunk. ☺

Korábban beharangoztuk, hogy a siteswap segít a bonyolultabb trükkök részekre bontásában. Ez szoros összhangban van azzal, hogy minél nagyobb dobások szerepelnek egy siteswap leírásban, annál nehezebb a trükk. Gondoljuk csak meg: az 5 nem más, mint az ötkellékes kaszkád, amit sokaknak hónapokig tart elsajátítani. Ugyanakkor a flash (55500) pontosan ilyen ötös dobásokból (meg némi szünetből) áll, de az átlagszabály alapján csak (5+5+5+0+0) / 5 = 15 / 5 = 3, azaz három labda kell hozzá. Tehát aki sokat gyakorolja a flasht, lényegében az ötkellékes kaszkádot készíti elő. A flasht az egyedi hosszmanipulációval lehet az 55555-ből kialakítani. Ha ez már megy, akkor az 50505, snake nevű trükkel lehet folytatni. Ezek után csak a két üres ütemet kell dobásokkal kitölteni, vagy egy labda hiányával az ötlabdás kaszkádot előkészíteni: 05555. A koszorú, az 51 nehézsége is abból adódik, hogy 5-ös dobások vannak benne. Nem is csoda, hogy sokaknak gondot okoz az elsajátítása.

3.2. Szóló zsonglőrködés, multiplex dobások

A siteswap fenti formáját (egy zsonglőr, aszinkron dobások, egyszerre csak egy dobás) *vanilla siteswap*nak nevezik. 1985-ben fedezte fel három zsonglőr, egymástól függetlenül: Bruce Tiemann (Caltech), Paul Klimek (Santa Cruz) és Mike Day (Cambridge, Anglia).

Kicsit gyengítünk az eddigi megszorításokon. Vizsgálódásunkat a multiplex zsonglőrködéssel folytatjuk. Nézzük, hogyan írható le az, hogy egy kézből egyszerre több kelléket is eldobunk. Ehhez csoportosítsuk a siteswap leírás dobásait úgy, hogy szögletes zárójelbe tesszük azokat az elemeket, amiket egyszerre hajtunk végre. Ötlabdás multiplexre példa a 24[54]. Itt kaszkád közben az egyik jobbkezes dobás helyett a labdát egy ütemig tartjuk, majd a másik kézből dobunk egy négyest. Most a jobb kézben két labda lesz (hiszen az előbb nem dobtunk belőle, és közben beérkezett egy másik). Ezekkel egyszerre dobunk egy ötöst és egy négyest. Ezután visszatérhetünk a kaszkádhoz, vagy csinálhatunk egy másik 24[54]-et, de most a bal kézből indítva. Hasonló ehhez a hétlabdás 26[76]. Ez eredményezi a következő definíciót.

Definíció: *Multiplex zsonglőr trükk*nek hívjuk azokat a siteswapokat, amelyekben egy kézből egyszerre több labdát is feldobunk. A multiplex dobás egy ütemben történik, így azokat a dobásmagasságokat, amelyek ugyanabban az ütemben esnek meg, szögletes zárójelbe tesszük. *Hosszát* így ütemszámként definiálhatjuk.

3.2.1. Kombináció szabály

A kérdés, amire választ keresünk: hogyan találunk meg, hogyan találunk ki multiplex sorozatokat. Természetesen két (vagy több) vanilla siteswap kombinációjával! Vegyünk két ugyanolyan hosszú leírást, mondjuk a 045 és a 204 megteszi. Ha most ezeket fedésbe hozzuk, zárójelezzük, azaz ütemenként összekombináljuk, akkor a 0-ás helyekre beesik a másik sorozatból egy dobás, a harmadik ütemben pedig, ahol mindkettőben 0-tól különböző dobásmagasság van, multiplex dobást kapunk. Az eredmény a már korábban látott 24[54]. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a 24[54] felbomlik a 045-re és a 204-re. Szükséges, hogy ugyanannyi ütem szerepeljen a trükkökben, azaz hosszuk megegyezzen.

A multiplex siteswap akkor játszható könnyen, ha a multiplex dobást egy 2-es dobás előzi meg két ütemmel, hiszen ez azt jelenti, hogy a multiplex egyik labdája már a dobás előtt két ütemmel a kezünkben volt. Sokkal nehezebb, de kivitelezhető a dolog, ha mindegyik labda a multiplex dobás ütemében érkezik a kezünkbe.

Teljesen hasonlóan alkothatunk hármas (vagy nagyobb multiplicitású) multiplex trükköket is. Ehhez a kombinációszabályt három (vagy több), azonos hosszúságú vanilla siteswapra kell alkalmazni, a felesleges 0 dobásmagasságokat pedig elhagyni. Persze az már más kérdés, hogy itt olyan sorozatokat is könnyen meg tudunk alkotni úgy, hogy nem létezik olyan zsonglőr, aki képes legyen végrehajtani, Ilyen trükköket már a vanilla siteswapnál is észrevehettünk, hiszen például az m, n mintát senki sem tudja lejátszani.

A kombinációszabály eredményeként az átlagszabály ebben a jelölésben is érvényben marad. Eredményünket egy későbbi tételben foglaljuk majd össze.

Még itt szükséges megemlíteni, hogy vanilla siteswap is előállhat kombinációként. Például a flash (55500) az 50000, a 05000, a 00500 trükkök kombinációja. Ez egyébként az egyszerű zsonglőr trükkök kellékszám-változtató transzformációi közül az egyedi hosszmanipuláció egyik esete.

3.2.2. Példák

- [33] – két 3 eredménye
- [43]20 – a 420 és 300 eredménye
- [43]0323 – a 40303 és a 30020 eredménye
- [64]020 – három labda egy kézben, multiplexen; a 6020 és a 4000 eredménye
- [43][44][45] – az 444 és a 345 eredménye

3.2.3. Játszhatóság

Az egyszerű zsonglőr trükköknél használt játszhatósági algoritmust átdolgozzuk multiplex esetre. A szögletes zárójel szintén egy ütemet jelöl, így ha a játszhatósági algoritmust végezzük, akkor a szögletes zárójelek alatt megfelelő számú dobásnak kell érkeznie, és egy ütemet számolunk rájuk. Nevezhetjük ezt is játszhatósági algoritmusnak. A tisztánlátás kedvéért tekintsünk meg egy példát:

[43]23	[43]23	[43]23	[43]23
4	3 4	32 4	32 43

A probléma általánosabb vizsgálatához először módosítani kell a vanilla siteswapnál bevezetett játszhatóság fogalmat, hiszen ott kikötöttük, hogy minden ütemben csak egy kelléket dobunk fel illetve kapunk el, ami a multiplex esetben nyilván nem teljesül.

A kombinációszabály és a játszhatósági algoritmus fényében megfogalmazhatjuk a következő tételt a multiplex zsonglőr trükkökre vonatkozóan:

Tétel: Egy, a multiplex zsonglőr trükkök formájának megfelelő, szám- és zárójel sorozat akkor és csak akkor multiplex zsonglőr trükk, ha a fenti értelemben felbomlik ugyanolyan hosszú egyszerű zsonglőr trükkök kombinációjára.

Könnyű meggondolni, hogyha (→) egy multiplex zsonglőr sorozat *multiplicitás*a a legtöbb labdát használó multiplex dobás labdaszáma, akkor a multiplicitás alapján ennyi egyszerű zsonglőr trükkre tudjuk bontani, és ezek a trükkök ugyanolyan hosszúak lesznek. Az első sorozatok olyan ütemekből származnak, ahol a dobásmagasságok a hossz többszörösei a multiplex trükkben, a többi ütemben pedig 0. Az előbbi állítás megalapozása a vanilla siteswap egyedi hosszmanipulációin alapszik. Ha ezek lebontása után a megmaradt még mindig multiplex trükk, akkor a többi egyszerű trükk megalkotásában a játszhatósági algoritmus alapgondolatát használjuk. Diszjunkt dobásmagasság-sorokat keresünk a megmaradt, hossz-többszörös nélküli multiplex siteswapban, azzal a dobásmagassággal folytatva, amelyik alá a játszhatóság algoritmus egy lépésével jutunk, mindemellett mindig a legnagyobb multiplicitású ütemből indulunk, és minél hamarabb vissza is szeretnénk jutni ide. Véges sok trükköt gyártunk le ilyenkor, és tudjuk úgy kombinálni őket, hogy a végén az egyszerű trükkök száma minimális, tehát pontosan annyi, amennyi a legnagyobb multiplicitású ütemben volt. Ezen trükkök kombinációjaként az eredeti sorozathoz érünk.

(←) Ha egy sorozat felbomlik egyszerű zsonglőr trükkökre, akkor a kombinációszabály értelmében (mivel ugyanolyan hosszúak) az ütemeiket összezárójelezve, a megfelelő, 0-ás dobásmagasságokat elhagyva egy olyan multiplex zsonglőr trükkhöz jutunk, ami megegyezik az eredeti sorozattal.

Példák: tekintsük a [43]23 multiplex zsonglőr trükköt. Hossza: 3. Első lépésként kijön a 300 és 003, azaz ezek kombinációja: 303. Marad a 420, ami már egyszerű. Többféleképpen is lehet egy multiplex zsonglőr trükköt egyszerű zsonglőr trükkökre bontani: a [41][11][14] trükköt. Ez a 411, 114, illetve a 414, 111 trükkök kombinációjaként is megkaphatnánk.

Definíció: Tehát egy multiplex zsonglőr sorozat multiplex zsonglőr trükk, ha felbomlik ugyanolyan hosszú egyszerű zsonglőr trükkökre. Ekkor *játszható*nak nevezzük

3.3. Szóló zsonglőrködés, szinkron dobások

Az egyszerű aszinkron zsonglőrködés mellé a szinkron zsonglőrködést úgy írjuk le, hogy a B-J-B-J ritmust összefűzzük, és minden ütemnél megkülönböztetünk balkezes dobást és jobbkezest. Így kapunk (B,J)(B,J) ritmust, ami alkalmas lesz szinkron trükkök leírására, mert így beszélhetünk két kézből történő, egyidejű (szinkron) dobásokról is. Ez nagyon hasonlít a dobásmagasság-sorozatokhoz, de egyrészt zárójelekkel párosítjuk az egyszerre történő dobásokat, másrészt minden szinkron dobáshoz meg kell adnunk az elkapó kezet. Az elkapó kéz lehet a feldobó és a másik kéz is. Utóbbit a dobásmagasság után tett x-szel jelöljük. Hogy az így keletkezett zárójelezett ütemek ritmusa hasonlítson a vanilla siteswaphoz, minden ütem után beiktatunk egy szünetet. Azaz a (B,J)(0,0)(B,J)(0,0) ritmusra fogjuk a dobásmagasságokat megadni. Ezek az üres ütemek eredményezik, hogy a dobásmagasságok itt mindig párosak. A 2-es továbbra is azt jelenti, hogy a labda a kezünkben marad, a 2x-es a másik kézbe történő gyors, vízszintes dobás. Magasabb páros számok esetén az n-es dobás ugyanabba a kézbe esik, az nx-es a másikba. A 0 az üres kéz jele, a 0x pedig nem engedélyezett. Az egyszerűség kedvéért a szüneteket nem fogjuk jelezni, de megemlítjük, hogy azért kellenek ezek a szünetek, mert ezzel toljuk el a jobb kéz ütemét a balhoz. Mindezek segítségével fogalmazzuk meg a következő definíciókat.

Definíció: Az ütemekhez hozzárendelt nem negatív, páros, irányított számpárokat *szinkron dobásmagasság*oknak nevezzük, nagyságukat az határozza meg, hogy - az üres ütemeket is beleszámolva - hány ütem múlva lesz a feldobott labda újból a kezünkben. Az irányítás itt azt jelenti, hogy megadjuk, hogy melyik kézzel dobjuk, és melyik kézbe esik.

Definíció: *Szinkron zsonglőr sorozat*nak hívjuk a szinkron dobásmagasságok és az üres ütemek sorozatát. Ha ez játszható és véges, akkor *szinkron zsonglőr trükk*ről, ha pedig ezenfelül nem periodikus, akkor *szinkron zsonglőr mintá*ról beszélünk.

3.3.1. Példák

- (4,4) – négylabdás szinkron szökőkút.
- (4x,4x) – a szökőkút keresztbe dobott változata.
- (4x,2x) – háromlabdás koszorú, szinkron dobásokkal
- (4,2x)(2x,4) – doboz
- (6,6)(6x,2x) – egy ötlabdás trükk.
- (6x,6x)(2x,2x) – egy négylabdás trükk
- (4,4)(4,0) – négylabdás szökőkút, három labdával (egy labda hiányzik)

Megállapodás szerint a zárójelezett párok első tagja a bal kézre vonatkozik.

A szinkron zsonglőrködés is ötvözhető a multiplex zsonglőrködéssel, például a (4,2)(2x,[44x]) trükkben egy 4-es és egy 4x-es dobást multiplexen hajtunk végre jobb kézzel.

3.3.2. Szabályok

Szinkronizálási algoritmus. Egy páros hosszú, egyszerű zsonglőr trükkből készíthetünk szinkron leírást, a szinkronizálás lépései a következők.

1. A leírásban szereplő páratlan dobásmagasságok után írjunk egy x-et, ez adja azt, hogy az ellenkező kézbe fog esni a labda.
2. Ha egy páratlan dobásmagasság páros ütemben szerepel, adjunk hozzá egyet, ezzel a jobbkezes dobásokat egy ütemmel előre vittük; ellenkező esetben vonjunk ki belőle egyet, ezzel a páros ütemben leeső labdák egy ütemmel korábban, páratlan ütemben esnek le.
3. Ha az így kapott sorozatban előfordul a 0x-es, akkor az egyszerű zsonglőr trükk így nem alakítható át szinkron leírássá. A szinkronizálás akkor lehetséges, ha nincs 1-es dobásmagasság páratlan, azaz balkezes ütemben.
4. Zárójelekkel párosítsuk össze az egymást követő dobásmagasságokat. Így alakul ki az aszinkron balkezes ütemekre szinkron dobásmagasság, és a jobbkezes ütemekre a ki nem írt szünet.

Tulajdonképpen csak annyit csináltunk, hogy egy B-J-B-J ritmusú vanilla siteswapban a jobbkezes dobásokat egy ütemmel visszamozgattuk, és ennek megfelelően módosítottuk dobásmagasságokat. Így minden páros ütemben kialakult egy szünet, amit a jelölésünkkel összhangban nem írtunk ki, ezért is kell páros hosszú siteswap. Példaként vegyük az 51 koszorút. Az algoritmust alkalmazva a szinkron koszorú (4x,2x) leírását kapjuk, a 33 szinkronizálva szinte ugyanez: (2x,4x).

Kézcsere

Ha a dobó kezeket fel akarjuk cserélni egy ütemben, akkor a megfelelő dobások irányítását is fel kell cserélnünk. Ekkor a két labda érkezését gyakorlatilag megcseréltük és semmi más nem változott.

Például, ha a (**6,4x**)(6x,2)(4,2) első ütemében a 6-ost inkább a jobb kezünkkel dobnánk, a 4-est pedig a ballal, akkor ez minden további nélkül megtehető. Ekkor viszont 4x helyett 4-et kell dobni, 6 helyett pedig 6x-et, tehát az eredmény (**4,6x**)(6x,2)(4,2) lett. A szabály tulajdonképpen teljesen nyilvánvaló: eddig a 4x és a 6 is a bal kézbe érkezett, ezen a csere után sem szabad változtatni, hiszen a leírás többi része erre épít. Cseréljük még meg az utolsó ütem két elemét! Eddig a 4-est és a 2-est is ugyanabba a kézbe dobtuk, ezért a csere után mindkettőt az másik kézbe kell irányítanunk: (4,6x)(6x,2)(**2x,4x**).

Ütemcsere

Szinkron zsonglőr trükköknél az ütemcserét azonos kezekre mondjuk ki és igazoljuk, mert a többi eset kézcserével megoldható. A szinkron dobásokra vonatkozó ütemcserénél minden balra mozgatásnál kettővel növeljük a dobásmagasságot, minden jobbra mozgatással pedig kettővel csökkentjük. Nulla alá persze itt sem mehet, sőt a 0x is tilos. Mivel kézcsere nincsen, ezért a dobások irányítottsága a mozgatással nem változik.

Példaként cseréljük meg a (**4**,6x)(6x,2)(**2x**,4x)-ben az első ütemben szereplő 4-et és az utolsó ütemben levő 2x-et. 4 kettőt megy jobbra, így 0 lesz, a másik kettőt megy balra, tehát 6x lesz. Az eredmény:(**6x**,6x)(6x,2)(**0**,4x).

3.3.3. Játszhatóság

Hasonlóképp lehet ellenőrizni a szinkron trükkök játszhatóságát, mint az aszinkron esetben, csak arra a megállapodásra kell figyelni, hogy a ki nem írt ütemeket is számítanak, és természetesen az ellenkező kézbe irányított dobások a másik kézben landolnak. Nevezzük ezt is játszhatósági algoritmusnak. Íme, egy példa:

(6,4x)(6x,2)(4,2)	**(6,4x)(6x,2)(4, 2)**	**(6,4x)(6x,2)(4,2)**
6	**6 4x**	**6 6x 4x**
(6,4x)(6x,2)(4,2)	**(6,4x)(6x,2)(4,2)**	**(6,4x)(6x,2)(4,2)**
6 6x 4x 2	**6 4 6x 4x 2**	**6 2 4 6x 4x 2**

3.4. Több zsonglőr, passzolások

Egy érdekes kitekintőt ad a közös zsonglőrködés. Nézzünk több zsonglőrt, akik egyenként aszinkron módon zsonglőrködnek, de mozgásuk egymással szinkronizált (egyszerre dobnak ugyanazzal a kezükkel). Ez történik például, amikor két zsonglőr hat labdát passzolgat egymásnak. Azt, hogy négy zsonglőr három-három labdával kaszkádban zsonglőrködik, úgy fogjuk írni, hogy <3|3|3|3>. Az ütemeket < > jelek közé írjuk, az egyes zsonglőrök dobásait pedig „ | ” jelekkel (pipeline-nal) választjuk el. Ez az eddigi jelölésünknek nem ad semmit, csak több zsonglőrt jelenít meg a generált játéktérben.

Két zsonglőr esetén írjunk kis p betűt a dobás után, ha a másik zsonglőrnek akarunk passzolni. Ő ugyanazzal a kezével fogja elkapni a kelléket, amivel mi kaptuk volna el, ha nem passzoltuk volna át neki. Ha több zsonglőr is van, akkor beszámozzuk őket eggyel kezdve, és a megfelelő számot írjuk a p után. Megállapodás szerint az egyes számú zsonglőr a <||…|> jelölésben az első, a kettes a következő stb. Például a <3p|3p> és <3p2|3p1> siteswap ugyanazt a trükköt írják le: a 6 kellékes folyamatos passzolást.

Definíció: A fent említett szabályok által elkészíthető trükköket *többzsonglőrös zsonglőr trükk*öknek nevezzük.

Állítás: A kellékek számára vonatkozó átlagszabály itt is érvényes. A fenti két példára: 3 + 3 = 6, és mivel csak egyetlen ütem van: 6 / 1 = 6.

3.4.1. Példák

- <3|3> – Két zsonglőr egymással szinkronban kaszkádol. ☺
- <3p|3p><3|3> – Egy passzolás, egy kaszkád dobása.
- <4p|3><2|3p> – Az első zsonglőr az egyik kezével passzol, a másikban egy labdát tart. A másik zsonglőr felváltva dob egy kaszkádot, illetve passzol át egy labdát az elsőnek.
- <2|3p><2p|3><[3p/2]|3p><3|3> – Több zsonglőr, multiplex dobásokkal. 2p: az egyes zsonglőr a bal kezéből a kettes zsonglőr bal kezébe dob. A / jel a multiplex leírásnál azért kell, hogy megkülönböztessük a 3p2-től, ami a kettes zsonglőrnek való passzolást jelenti. (Ezt ebben az esetben 3p22-nek is írhattuk volna.)
- <(4x,4xp)|(4x,4xp)> – Szinkron dobások, két zsonglőrrel és nyolc labdával. Figyeljük meg, hogy a p az x után jön. A 4xp dobás a másik zsonglőr bal kezébe érkezik, ugyanis a jobb kézből dobott 4x a saját bal kezünkbe érkezett volna.
- <(2p3,4x)|(2xp3,4p1)|(2xp2,4xp2)> – Három zsonglőr, 9 labda, szinkron dobások.

4. Hivatkozások

[1] Wildcat Zsonglőr Oldalak: http://zsonglor.csokavar.hu/

[1a] Juggling Lab szimulátor: http://zsonglor.csokavar.hu/szimulator/

[1b] Juggling Lab honlap: http://jugglinglab.sourceforge.net/

[2] Anthony Mays: Combinatorial aspects of juggling, 2006.
Online: http://www.ms.unimelb.edu.au/publications/AnthonyMaysHonoursThesis.pdf

[3] Zsonglőr Internetes Szolgáltatás (JIS): http://www.juggling.org

[3a] Juggler's World, elérhető: http://www.juggling.org/jw/

[3b] Arthur Lewbel: Research in Juggling History, 1995.
Elérhető a http://www.juggling.org/papers/history-1/ honlapon

[4] The Internet Juggling Database: http://www.jugglingdb.com/

[4a] Siteswap Notation: http://www.jugglingdb.com/compendium/geek/notation/

[5] Burkard Polster: The Mathematics of Juggling, kiadó: Springer Verlag, New York, 2003.

[6] Dave Finnigan: The Complete Juggler, kiadó: Butterfingers, UK, 1992.

[7] S. L. Devadoss, J. Mugno: Juggling braids and links, 2006.
Elérhető: www.williams.edu/mathematics/devadoss/files/jugglebraids.pdf

[8] Aidan's Juggling page: http://www.geocities.com/aidanjburns/introduction.html.

[9] Matthew Macauley: Braids and Juggling Patterns, 2003. Elérhető:
http://www.math.hmc.edu/math197/archives/2003/mmacaule/mmacaule-2003-thesis.pdf

[10] J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham, C. Wright: Juggling Drops and Descents, 1994.
Elérhető: http://www.math.ucsd.edu/~sbutler/ron/94_01_juggling.pdf

NYILATKOZAT

Név: Kisics István

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BSc - Matematika tanári szakirány

ETR azonosító: KIILAAT.ELTE

Szakdolgozat címe:

A zsonglőrködés matematikája

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2009. május 2.

a hallgató aláírása