Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Kovács Veronika

Ez is Hungaricum

Szakdolgozat

Témavezető:
Szabó Csaba

Budapest, 2013.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A magyarországi matematika oktatás hagyományosan feladatorientált. Ezekben a feladatokban folyamatosan megjelennek az élvonalbeli kutatási témák is. Az egyik ilyen modern kutatási terület a gráfelmélet. Az első gráfokkal foglalkozó feladat 1947-ben bukkant fel a Kürschák József Matematikai Tanulóversenyen, azóta a gráfelmélet jelenléte a középiskolai versenyeken folyamatos. Ez tipikusan olyan témakör, amely a gyengébb diákoknak is segít a matematizálás élményében, ugyanakkor a legjobbakat önálló matematikai eredményekhez is vezetheti. A 2002-es középiskolai kerettanterv már 10 órát szán gráfok oktatására kombinatorikával együtt. Ennek ellenére az az általános tapasztalat, hogy a középiskolából kikerülő diákok nagy része nem ismeri a gráfokat.

A gráfelmélet a matematikatörténetnek is fontos fejezete. A XVIII. század elején Euler foglalkozott először gráfokkal (Königsbergi hidak). A gráfelmélet robbanásszerű fejlődése a XX. század elején indult meg. Amint a nemzetközi kutatásokban megjelentek a gráfok, Magyarország vezető matematikusai gondoskodtak arról, hogy hazánkban is széleskörben ismertté váljanak. Gráfokat először Lovász László tanított Szegeden, a ’70-es évek végén, ’80-as évek elején. Könyvét [15] az egész világon alapműként kezelik. Innentől a tudomány magyarországi elterjedése megállíthatatlan volt.Budapesten 1981-től oktatnak gráfelméletet, és 1984 óta a tanárszakos tananyagnak is része. Napjainkban az egyetemeken a matematikus és az alkalmazott matematikus szakirány több kurzusa is foglalkozik gráfokkal és alkalmazásaikkal (például: véges matematika, operációkutatás, játékelmélet, kombinatorikus algoritmusok stb.) A szegedi hagyományokat Hajnal Péter, Lovász László első tanítványa folytatja. Kurzusain a [9],[10],[11] könyveket használja. A BME Villamosmérnöki Karán a [1], [2], [3] jegyzetekről a ’90-es évek végén tértek át az azóta is használatos [13] könyvre, amelyet átvett az ELTE alkalmazott matematikus és a debreceni matematika oktatás is. Az ELTE elsőéveseinek nagyrésze a háromszerzős [14]-ból ismerkedik meg a gráfelmélet alapjaival.

A gráfelméletet mint önálló tudományágat elég későn ismerték el, az első gráfelméleti témájú könyvet [5] 1969-ben adták ki. Azóta 154 könyv jelent meg a témában angol nyelven. A bevezető jellegű könyvek közül kiemelnénk [4]-t és [18]-t, amelyeket Magyarországon is számos egyetemen használnak.

1.1. Kutatási módszerek, célkitűzés

Palotay Dorkával és Pozsonyi Enikővel folytatott kutatásunkban a gráfok középiskolai oktatási kérdéseivel foglalkozunk. Első lépésben áttanulmányoztuk a jelenlegi, valamint a készülő, 2013 őszétől bevezetésre kerülő kerettanterveket. Megvizsgáltunk 4, a napjainkban forgalomban lévő tankönyvcsaládot (Matematika 11., Dr. Vancsó Ödön, Ráció könyvek; Matematika 11 – 12. Czapáry-Gyapjas, Nemzeti Tankönyvkiadó; Sokszínű matematika 11., Mozaik Kiadó; Matematika 11., Hajnal-Számadó-Békéssy, Nemzeti Tankönyvkiadó). Megnéztük, hogy milyen szerepet kap (vagy kaphatna) a gráfelmélet. Majd a gráfelmélettel kapcsolatos feladataikat rendszereztük és elemeztük a PISA felmérésben szereplő kompetenciák szerint.

Ezek ismeretében először gráfelmélettel foglalkozó tudósok, kutatók, majd jelenleg is aktív középiskolai matematika tanárok véleményét kértük ki a gráfelmélet oktatásával kapcsolatban. Az eddigi kutatási eredményeink alapján célunk a korábbi felépítések megerősítése, vagy egy új felépítés kidolgozása volt.

Az interjúkon szerzett benyomások alapján kidolgoztuk a gráfok oktatásának kétféle lehetséges bevezetését, amely egyszerre veszi figyelembe a kerettanterv nyújtotta lehetőségeket, a matematika oktatás szempontrendszerét, a kompetenciákat (PISA) és a kutatók elképzeléseit.

A második fejezetben áttekintjük a kerettanterveket, és a matematika oktatással szemben támasztott magyarországi és európai elvárásokat. Kifejezetten a gráfelmélet oktatással kapcsolatban a magyarországi követelményeket vizsgáltuk, a téma nemzetközi tanulmányozása egy további érdekes lehetőség, ez azonban túlmutat a dolgozat keretein. A harmadik fejezetben foglaltuk össze a tudósokkal és tanárokkal készült interjúkat. Ezek a nemzetközileg is elismert tudósok egyúttal számos könyv, gráfelméleti monográfia, és egyetemi jegyzet szerzői, tapasztalt egyetemi oktatók. A dolgozat fő része a negyedik fejezet, amelyben feladatsorokat állítottunk össze egyrészt internetes kapcsolatok, másrészt Budapest tervezett metróhálózat-térképének segítségével.

Ez a dolgozat már terjedelménél fogva sem tartalmazhatja az interjúk és a feladatsorok teljes elemzését, kutatásainknak azt a részét fogalmaztuk meg, amely közvetlenül megmutatja a változtatások szükségességét és időszerűségét. A feladatsorokat aktív iskolai használatra szántuk, néhány tanár és tankönyvszerző már el is kérte ezek munkaváltozatait. Létrehoztunk egy honlapot középsikolai tanárok és diákok számára, ahol az összes általunk készített feladat részletes megoldása módszertani megjegyzéseinkkel kiegészítve megtalálható. Ezt állandóan frissítjük, és fejlesztjük.

2. Kerettanterv régen és most

"A matematika: kulturális örökség; gondolkodásmód; alkotó tevékenység; a gondolkodás örömének forrása; a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője; önálló tudomány; más tudományok segítője; a mindennapi élet része és a szakmák eszköze."

(Kerettanterv)

Kutatásunk során áttanulmányoztuk és összehasonlítottuk az eddig hatályban lévő, valamint a 2013 őszétől bevezetésre kerülő kerettanterveket.[22] Tapasztalatainkat az 1. táblázatban foglaltuk össze.

	Eddigi kerettanterv	***Új kerettanterv***
Hányadik osztályban jelennek meg először a gráfok?	11.	9-10.
Javasolt óraszám	10 óra + folyamatosan beépül a tanagyagba kombinatorikával együtt	$9-10$. évfolyam: 20 óra halmazelmélettel, logikával, kombinatorikával együtt; $11-12$. évfolyam: 11 óra kombinatorikával együtt
Melyik tematikus egységben szerepel?	Gondolkodási módszerek	Gondolkodási és megismerési módszerek
Tovább haladás feltételei/várt eredmények	A gráf szemléletes fogalma, egyszerű alkalmazásai	A gráfok eszközjellegű használata problémamegoldásban

1. táblázat. Kerettantervek összehasonlítása

A kerettantervek áttekintésekor már első olvasásra feltűnt, hogy míg a korábbiban csupán egy rövid összefoglaló táblázat, és egy két szavas utalás található, addig az újban sokkal nagyobb hangsúllyal szerepelnek a gráfok. A táblázatból is látható, hogy míg az eddigi kerettantervben csupán 11. osztályban jelentek meg, addig az újban már a $9-10$. kétévfolyamos ciklusban találkozhatunk velük. Az órakeret egyik esetben sincs szigorúan meghatározva, a javaslatok több anyagrészre vonatkoznak együttesen. Látható az is, hogy az új kerettanterv több lehetőséget kínál.

Az új tantervben már szerepel, hogy mely alapfogalmak elsajátítása a minimális követelmény. Ezek a csúcs, az él, a fokszám, a fokszámok összege és az élek száma közötti összefüggés. Itt már a gráfok alkalmazási lehetőségeit is kiemelik. Az összes anyagrész közül ez az egyik, amelynek a legtöbb kapcsolódási pontja van a többi tantárggyal. Hiszen gondoljunk csak bele, amikor kémia órán a molekulák térszerkezetét ábrázoljuk, tulajdonképpen gráfokat használunk. Az informatikában számtalanszor dolgozunk közvetve, vagy közvetlenül gráfokkal, például már maga a könyvtárszerkezet is egy fagráf. Bár nem gondolnánk, de még a történelem órán is találkozhatunk velük, amikor például családfát ábrázolunk. Ezek mellett az új kerettanterv már utal a gráfok mindennapi jelentőségére is, ehhez a közlekedést hozza példának.

Összességében a kerettantervben történő változások pozitívan érinthetik a gráfok oktatását. Hiszen az új tanterv már felhívja a figyelmet az alkalmazási lehetőségek fontosságára, és több óraszámot biztosít ezek elsajátítására. Félő azonban, hogy mivel az óraszám az egész tematikus egységre közösen vonatkozik, így eltolódhat a hangsúly más anyagrészek felé (pl.: kombinatorika).

Munkánk során összegyűjtöttük az elmúlt évek középszintű érettségieiben szereplő gráffal kapcsolatos feladatokat. Nagy meglepetésre több feladatsor egyáltalán nem tartalmazott ilyen típusú példát.

3. Kutatók és tanárok véleménye

A gráfoktatás helyzetének feltérképezésekor természetesen elengedhetetlen maguknak az oktatóknak a felkeresése. Fontosnak tartottuk a terület szakértőinek a megkérdezését. Ennek érdekében Magyarország legelismertebb gráfelmélettel foglalkozó professzoraival beszélgettünk. Megkérdeztük az ELTE-ről Frank Andrást, Lovász Lászlót, Sziklai Pétert és Szőnyi Tamást, valamint Szegedről Hajnal Pétert. Kíváncsiak voltunk arra, hogy ők milyen bevezetési lehetőségeket tartanak célravezetőnek a gráfok oktatásában.

Összegzésként készítettünk egy táblázatot (2. táblázat), amelyben a gráfelmélettel foglalkozó egyetemi oktatók véleményét foglaltuk össze.

	Frank András	***Hajnal Péter***	***Lovász László***	***Sziklai Péter***
Fontos	+	+	+	+
Fogalmak	−	−	−	
Modellezés	+	+	+	+
Valóságközeli feladatok	+	+	+	+
Alkalmazási lehetőségek		Kémia, órarend	GPS, internet	Közösségi oldalak
Legrövidebb út	?	−		+
Euler	+	+		
Továbbképzés			+	

2. táblázat. Egyetemi oktatók véleménye

A táblázatból jól látható, hogy valamennyien nagyon fontosnak tartják a gráfok oktatását, valamint a modellezési, és valóságközeli feladatok alkalmazását a témakörben. Az alapfogalmak sulykolását többségük nem tartja célravezetőnek.

Hajnal Péter szerint a gráfelmélet bevezetésekor nagy segítség, hogy az egyszerűbb feladatok lerajzolhatók, ezáltal a diákok könnyebben megértik őket, el tudják képzelni a problémát. Szerinte is fontos valóságközeli, érdekes feladatokat adni a diákoknak, azonban szem előtt kell tartani, hogy a valóság mindig bonyolultabb. Például jó ötletnek tartja órarend-tervezéssel kapcsolatos feladatok megoldását, figyelembe véve azt, hogy a valóságban sokkal több befolyásoló tényező van, mint amennyit egy ilyen feladat keretei megengednek.

Lovász László elmondta, hogy az alkalmazások időről időre változnak. A különféle kongresszusokon mindig téma az, hogy épp az adott időben mit tekintünk matematikai alkalmazásnak. Ezek az alkalmazások folyamatosan változnak, ezért az oktatásban is állandóan frissíteni kellene őket. Ezt ő a tanárok rendszeres továbbképzésének a keretében tudja elképzelni.

Sziklai Péter izgalmas és szemléletes feladatok bemutatásával keltené fel a diákok érdeklődését a gráfelmélet iránt. Érdekesnek tartja azokat a példákat, melyekben a cél a legrövidebb út megtalálása. Ennek látványos bemutatására két modellt is javasolt. Az első esetben egy csatornahálózatot tekintünk, melyet szeretnénk vízzel feltölteni. A második javasolt szemléltetési módszer egy fagolyós Dijkstra-modell.

Szőnyi Tamás rámutatott arra, hogy a gráfelmélet csupán 1984 óta szerepel a matematika tanári képzés kötelező tantárgyai között, így akik korábban szereztek diplomát, még nem tanulták, ezért idegenkednek tőle.

Természetesen nem csak az egyetemi oktatókat kérdeztük meg. Középiskolai matematika tanárok véleményét is kikértük a gráfok tanításáról. Arra voltunk kíváncsiak, hogy mennyi időt szánnak a gráfok tanítására, mik azok a fogalmak, feladatok, amik szerepelnek az órákon, és mennyire szeretik tanítani ezt az anyagrészt. Felkerestük többek között Klacsákné Tóth Ágotát, Nikházy Lászlónét, Gerőcs Lászlót, Marton Sándort és Szabó Szabolcsot. Rajtuk kívül több középiskolai tanár csak név nélkül vállalta, hogy mesél nekünk arról, hogy hogyan oktatja a gráfelméletet.

A válaszok meglehetősen sokrétűek voltak. Sokan csak az egyszerűbb feladatokig jutnak el, szerintük a gráfok egyáltalán nem fontosak ezen a szinten. Találkoztunk olyan véleménnyel is, mely szerint annyira egyszerű a gráfelmélet, hogy azt a diákok otthon, egyedül is fel tudják dolgozni. Beszélgettünk több olyan tanárral, akiknél egyáltalán nem szerepelnek a gráfok. De természetesen több olyan beszámolót is hallhattunk, akik kihasználják a kerettanterv nyújtotta lehetőségeket, és igyekeznek minél többet bemutatni a diákoknak a gráfok színes világából.

Összegzésként elmondhatjuk tehát, hogy a középiskolai tanárok véleménye igen változatos, de néhány pontban többségük egyetért. Ide sorolható az időhiány, valamint az, hogy érettségin alig szerepelnek gráffal kapcsolatos feladatok, így más tananyagot fontosabbnak tartanak. Mindannyian hangsúlyozták, hogy az alapok nem túl nehezek, és ha lenne rá több idő, akkor hasznos lehetne az oktatásuk.

4. Bevezetési lehetőségek

Az eddigi kutatási eredményeink figyelembevételével a középiskolai gráfelmélet oktatásának egy új felépítésére teszünk javaslatot. Célunk annak megmutatása, hogy létezik olyan felépítés, módszer, amely megfelel a matematikusok által támasztott igényeknek, a tantervi céloknak és egyben nem állítja megoldhatatlan nehézségek elé azokat a tanárokat sem, akik a témával nem foglalkoztak egyetemi tanulmányaik során.

Két merőben különböző téma segítségével dolgoztuk ki bevezető feladatsorainkat. Ezek kiválasztásakor fontosnak tartottuk, hogy minél közelebb álljanak a diákok mindennapjaihoz. Célunk felhívni a diákok figyelmét arra, hogy a gráf nem csak kötelező tananyag, hanem egy olyan eszköz is, amit indirekt módon szinte mindig alkalmazunk a hétköznapokban. Ennek megfelelően valósághoz közeli, gyakorlatias feladatok kidolgozására törekedtünk.

A két fő témakör, amik köré a feladataink épülnek a facebook és a közlekedés, melyekhez kapcsolódó példák nagyon jól szemléltethetők gráfokkal. Mindkettő segítségével bevezethetők a gráfelméleti alapfogalmak, amiket érdekes és változatos feladatokon keresztül ismerhetnek meg a diákok. Nagy előnyük az eddigi feladatokhoz képest, hogy közvetlenül mutatják meg a gráfok alkalmazási lehetőségeit.

A két témakör együttes feldolgozását javasoljuk a középiskolában. A gráfok bevezetését tetszés szerint bármelyikkel elkezdhetjük. Sok fogalom mindkét felépítésben szerepel. Ezek segítségével, amikor rátérünk a második témára, akkor a már megtanult fogalmakat ismételhetjük, a diákok tudását elmélyíthetjük, miközben a még hiányzó fogalmakat is megtanítjuk nekik.

Most tekintsük át az elkészített feladatsorokat. Az egyes feladatoknál megjelöltük, hogy mely fogalmak bevezetésére, gyakoroltatására szolgálnak. A feladatok közül párat részletesebben is kidolgoztunk, néhány helyen rámutattunk a továbbfejlesztési lehetőségekre is.

4.1. Facebook

Két ok miatt esett a választásunk a facebookra. Az egyik az, hogy népszerűsége egyre nagyobb. Hazánkban a felhasználók száma már közel négymillió fő, ezzel a 39. legtöbb facebook felhasználóval rendelkező ország vagyunk. Szinte minden középiskolás diák használja nap, mint nap. Ezen keresztül ismerkednek, tartják a kapcsolatot barátaikkal, szervezik a programjaikat. A másik ok, hogy funkciói rendkívül jól alkalmazhatók a gráfok bemutatására.

A facebookkal kapcsolatos feladatok feldolgozása előtt nagyon fontos tisztázni a használt kifejezéseket. Ebben a fejezetben ismerős, ismeretség alatt természetesen mindig azt értjük, hogy az illetők facebookon egymás ismerősei. A facebook két funkcióját használtuk a feladatokban. Az egyik a megosztás. Erről azt kell tudni, hogy ha egy személy megoszt valamit, akkor azt kizárólag az ismerősei láthatják, és a feladatokban feltesszük, hogy ők látják is a megosztott tartalmat. A másik a bökés funkció, mely segítségével bármely felhasználó virtuálisan megbökhet egy másikat. A 3. táblázatban összefoglaltuk a facebook funkciók kapcsolatát a gráfokkal.

Facebook funkciók	***Gráffal kapcsolatos alapfogalmak***
Személyek	csúcsok
Ismeretség	él
Ismerősök száma	fokszám
Megosztás	szomszédos csúcsok halmaza
Bökés, bejelölés	irányított él

3. táblázat. Facebook-gráf megfeleltetés

Ezen alapfunkciók segítségével jutunk el az összetettebb fogalmak bevezetéséhez.

A feladatokban egy képzeletbeli 9.a és 9.b osztály facebookos tevékenységeit vizsgáljuk. A diákok közül többen délutáni szakkörre és nyelvvizsga előkészítőre járnak:

- angol nyelvvizsga előkészítő: 9 fő
- német nyelvvizsga előkészítő: 12 fő
- rajzszakkör: 6 fő
- médiaszakkör: 8 fő

1. Feladat. *Rajzszakkörre Anna, Betti, Csaba, Dani, Eszter és Fanni jár. Rajzoljuk le az ismeretségi hálót, ha tudjuk, hogy:*

(a) *Anna és Csaba ismerősök facebookon. Csabának még Eszter és Dani ismerőse a csoportból. Betti rajzszakkörös ismerősei Fanni és Eszter. Több ismeretség nincs.*

(b) *Betti ismeri Annát és Fannit. Eszter ismerősei Csaba és Dani, akik még egymásnak is ismerősei.*

(c1) *Betti mindenkit ismer facebookon, Eszter csak a lányokat. Ezen kívül Csaba és Dani is ismeri egymást, valamint Anna és Fanni.*

(c2) Betti mindenkit ismer facebookon, Eszter csak a lányokat, Csaba csak a fiúkat. Ezen kívül Anna és Fanni ismeri még egymást.

(d1) A lányok mind ismerősei egymásnak a facebookon, hasonlóan a fiúk is bejelölték egymást, de fiú-lány ismeretség nincs.

(d2) Minden lánynak minden fiú ismerőse facebookon, de a lányok nem jelölték be egymást, és a fiúk között sincs ismeretség.

(e) Anna, Betti, Csaba, Dani, Eszter és Fanni ismerőseinek a száma rendre:

(e1) 5, 1, 4, 3, 3, 2

(e2) 5, 1, 4, 3, 3, 3

(e3) 0, 4, 1, 2, 2, 3

(e4) 4, 4, 3, 3, 2, 1

(e5) 5, 3, 3, 2, 2, 1

(e6) 5, 3, 3, 2, 1, 0

(e7) 5, 5, 3, 2, 2, 1

(e8) 5, 5, 4, 2, 2, 2

(e9) 6, 3, 2, 2, 2, 1

Megoldás. A személyeket pöttyökként ábrázoljuk, ezek lesznek a gráf csúcsai. Összekötjük őket, ha ismerik egymást, így megkapjuk a gráf éleit.

(c2) Ilyen ismeretségi háló nem létezhet, hiszen Betti mindenkit ismer, azaz Csabát is, így nem lehetséges, hogy Csabának csak fiú ismerősei vannak.

(e2) Ilyen ismeretségi háló nem létezhet, hiszen bármely gráfban a csúcsok fokszámának összege az élek számának kétszerese, azaz páros, itt viszont a fokszámok összege 19, vagyis páratlan.

(e4) A fokszámok összege páratlan, tehát a feladatnak nincs megoldása.

(e6) Ebben a fokszámsorozatban van egy maximális, valamint egy 0 fokú csúcs, ami nyilvánvalóan nem lehetséges, hiszen ha valaki mindenkit ismer, akkor nem lehet olyan, akinek nincs ismerőse.

(e7) „Letakargatós-módszer”: Olyan gráfok esetében alkalmazható, melyeknek van teljes fokú csúcsa. Ezt a csúcsot a hozzá tartozó élekkel együtt elhagyva egy olyan részgráfot kapunk, melyben a maradék csúcsok fokszáma 1-gyel csökkent. Így egy kisebb gráfot vizsgálhatunk az adott feltételek mellett. Amennyiben lehetséges ezt a lépést többször is megismételhetjük.

A „letakargatós-módszert” alkalmazva Annához tartozó pontot elhagyhatjuk. Így egy olyan 5 csúcsú gráfot kapunk, melyben az előző feladathoz hasonlóan van egy maximális, valamint egy 0 fokú csúcs.

(e8) A „letakargatós-módszert” alkalmazva Annához és Bettihez tartozó pontot elhagyva, mindössze egy darab 2 fokú csúcsúnk marad. Tehát a feladatnak nincs megoldása.

(e9) Mivel 6-an járnak rajzszakkörre, ezért nyilvánvaló, hogy nem lehet Annának 6 ismerőse a csoportból.

□

Megjegyzés:

Ez a feladat kiválóan alkalmas arra, hogy a gráfokkal kapcsolatos alapfogalmakkal megismertessük a diákokat. Az első néhány példában a feladat leírását követve a diákok könnyedén lerajzolhatják a gráfokat, mely során elsajátítják a gráf, a csúcs, az él és a fokszám fogalmát.

A feladat második felében többször használhatjuk a „letakargatós-módszert”.
„Letakargatós-módszer”: Olyan gráfok esetében alkalmazható, melyeknek van teljes fokú csúcsa. Ezt a csúcsot a hozzá tartozó élekkel együtt elhagyva egy olyan részgráfot kapunk, melyben a maradék csúcsok fokszáma 1-gyel csökkent. Így egy kisebb gráfot vizsgálhatunk az adott feltételek mellett. Amennyiben lehetséges ezt a lépést többször is megismételhetjük. A módszer előnye, hogy kisebb és kezelhetőbb gráfot kaphatunk.

(b) Ebben a feladatban megmutatjuk, hogy nem csak összefüggő gráfok léteznek, hanem olyanok is, melyek több komponensből állnak.

(d1) A feladat érdekessége, hogy itt a gráf két olyan komponensből áll, melyek önmagukban teljes gráfok.

(d2) Ennek a feladatnak a megoldása egy teljes páros gráf. Azaz egy olyan gráf, amely két pontosztályból áll, melyeken belül nem futnak élek, viszont bármely két különböző pontosztálybeli csúcsot összeköt egy él.

(e2) Ebben a feladatban a fokszámok összegére vonatkozó tételre vezetjük rá a diákokat. Ha a diákok az előző módszerrel próbálják megoldani a feladatot, észreveszik, hogy Fanninak hiányzik egy ismerőse, és ha megpróbálnánk még egy élt indítani F-ből, azt már nem tudnánk befejezni, hiszen másnak már nem hiányzik ismerőse. Így a feladatnak nyilván nincs megoldása, hiszen amikor az ismerősök számát összeadjuk, akkor minden ismeretséget kétszer számolunk, azaz az összeg csak páros lehet.

(e3) Ennek a feladatnak az az érdekessége, hogy az (e1) feladatban szereplő gráf komplementerét kapjuk. Azaz a két gráf együtt egy teljes gráfot alkot.

(e5) Ebben a feladatban érdemes megmutatni a „letakargatós-módszert". Annához tartozó csúcsot elhagyva egy olyan 5 csúcsú gráfot kapunk, melyben a fokszámok rendre: 2, 2, 1, 1, 0. Ezek mellett a feltételek mellett két különböző megoldást kaphatunk.

(e6) Itt megemlíthetjük, hogy a 0 fokú csúcsot izolált pontnak nevezzük.

2. Feladat. *Az új 9.b osztályban az évnyitó után a diákok elkezdték bejelölni egymást a facebookon. A hét végén Eszter büszkén mondta, hogy míg mindenkinek 14 ismerőse van az osztályból, addig neki már 15. Péter azt állította, hogy Eszter rosszul emlékszik.*

(a) Bizonyítsuk be, hogy Péternek van igaza.

Másnapra Eszter újra megszámolta, és ekkor már azt mondta, hogy mindenkinek 15 ismerőse van.

(b) Igaza lehet-e Eszternek, ha az osztálylétszám 31?

(c) Mekkora minimális osztálylétszámnál lehet igaza Eszternek?

(d) Igaza lehet-e Eszternek, ha az osztálylétszám 18?*

Megoldás. (a) A feladatban nincs megadva az osztálylétszám. Tegyük fel, hogy n gyerek van az osztályban. Ekkor Eszternek 15 ismerőse van, a többi $n-1$ gyereknek 14. Az ismeretségek száma ekkor $14(n-1)+15$, ami páratlan. Tudjuk azonban, hogy a fokszámok összege mindig páros, ezért Péternek van igaza.

(b) Az ismeretségek száma ilyenkor $15 * 31 = 465$, ami szintén páratlan, tehát nem lehet igaza Eszternek.

(c) Ha Eszternek igaza van, akkor az osztálylétszám páros. Ahhoz, hogy mindenkinek 15 ismerőse legyen, legalább 16 diák szükséges. Ha a 16 fős osztályban mindenki ismer mindenkit, akkor ez meg is valósul.

(d*) A válasz igen, ehhez mutatunk egy példát. Állítsuk körbe a gyerekeket, és mindenki ismerjen mindenkit, kivéve a két mellette állót. Ekkor mindenkinek pont 15 ismerőse lesz.

□

3. Feladat. *Mutassunk példát olyan ismeretségi hálóra, amikor az osztály létszám* 26*, és mindenkinek*

(a) 25

(b) 23

(c) 24

(d) 13

ismerőse van.

Megoldás. (a) Ez egy teljes gráf, mindenki ismer mindenkit.

(b) Képzeljük el, hogy a gráfban a „nem ismeretségeket" húzzuk be, vagyis azokat a személyeket kötjük össze, akik nem ismerik egymást. Ezután kicseréljük a nem éleket élekre, az éleket nem élekre. Ezt komplementernek nevezzük.

Állítsuk körbe a gyerekeket, és mindenki ismerjen mindenkit, kivéve a két mellette állót. Ekkor mindenkinek pont 23 ismerőse lesz.

(c) Állítsuk párba a gyerekeket, és mindenki ismerjen mindenkit, kivéve a párját. Ekkor mindenkinek pont 24 ismerőse lesz.

(d) Osszuk az osztályt két 13 fős csoportra. A csoportokon belül ne legyenek ismeretségek, de bármely két, különböző csoportba tartozó gyerek ismerje egymást. Egy másik lehetőség, hogy párosítsuk a két csoport tanulóit, és mindenki ismeri a saját csoportjának a tagjait és a párját.

□

4. Feladat. *A 29 fős 9.c osztály tanulói megbeszélték, hogy kinek hány osztálytársa ismerőse a facebookon. Bizonyítsuk be, hogy van két diák, akinek ugyanannyi ismerőse van az osztályból.*

Megoldás. Mindenkinek legalább 0 és legfeljebb 28 ismerőse van. Így 0-tól 28-ig minden szám előfordul. Akinek 28 ismerőse van, az mindenkit ismer. Így mindenkinek legalább egy ismerőse van, tehát 0 nem lehet, így van legalább egy szám, amelyik legalább kétszer fordul elő.

□

5. Feladat. *A* 8 *fős média szakkör tagjai között* 6 *ismeretség van facebookon. Bizonyítsuk be, hogy ha valaki megoszt egy kisfilmet, és mindenki, aki látja szintén megosztja azt, akkor is lesz olyan, aki nem látja a kisfilmet.*

Megoldás. Vizsgáljuk meg a kisfilm terjedését. Minden újabb diák egy újabb ismeretségen keresztül kaphatja meg, így 6 ismeretségen keresztül legfeljebb 6 emberhez juthat el a kisfilm, vagyis legfeljebb heten láthatják.

□

6. Feladat. *Mutassunk példát arra, hogy a* 8 *fős média szakkör tagjai között* 7 *ismeretség már elég lehet ahhoz, hogy bárkitől bárkihez el tudjon jutni egy kisfilm, esetleg a többiek közvetítésével. Mutassunk példát arra is, amikor* 7 *ismeretség van, de mégsem tud eljutni a kisfilm.*

Megoldás. Ennek a feladatnak több jó megoldása is van. □

7. Feladat. *A* 8 *fős média szakkör tagjai mindannyian megosztották a vizsgafilmjüket facebookon. Tudjuk, hogy van olyan videó, amit a szakkör minden tagja látott. Legalább hány ismeretség van a csoporton belül? Rajzolj le egy olyan esetet, amikor a lehető legkevesebb él van.*

Megoldás. Ha valakinek a filmjét mindenki látja, az csak úgy lehet, hogy neki mindenki az ismerőse. Erre egy példa a csillag, vagy a teljes gráf is. Legkevesebb éle egy ilyen gráfnak nyilvánvalóan akkor van, ha egy olyan ember van, aki mindenkit ismer, és a többiek nem ismerik egymást.

□

8. Feladat. *A 31 fős 9.b osztálynak sikerült annyira kiépítenie a facebook hálózatát, hogy ha valaki megoszt valamit, akkor az mindenkihez el tud jutni.*

(a) *Legalább hány ismeretség van?*

(b) *Bizonyítsd be, hogy ha pont ennyi ismeretség van, akkor van olyan tanuló, akinek csak egy ismerőse van.*

(c) *Elképzelhető-e ekkora élszámnál, hogy ha Petra megoszt valamit, akkor azt mindenki rögtön látja?*

Megoldás. (a) Ha valaki megoszt valamit, akkor annak 30 diákhoz kell eljutnia. Minden újabb diák egy újabb ismeretségen keresztül kaphatja meg a megosztott tartalmat, így legalább 30 ismeretségre van szükség ahhoz, hogy mind a 30 diákhoz eljusson az infromáció.

(b) Ha mindenkinek legalább 2 ismerőse lenne, akkor a fokszámok és élek száma közötti összefüggés miatt az ismeretségek száma legalább 31 lenne. Tehát biztosan van valaki, akinek csak egy ismerőse van az osztályból.

(c) Igen, ha Petra mindenkit ismer, és a többiek nem ismerik egymást.

□

9. Feladat. *A 31 fős 9.b osztály tanulói továbbfejlesztették a hálózatot, úgy hogy, ha valaki letiltja egy osztálytársát még akkor is mindenkihez eljut az információ.*

(a) Legalább hány ismeretség van?

(b) Igazoljuk, hogy mindenkinek legalább két ismerőse van.

Megoldás. 31 ismeretség már elég lehet, például ha körbe állítjuk a diákokat és mindenki a szomszédait ismeri. Ekkor bármely két ember között „körbe” eljut az információ. Tudjuk, hogy 30 ismeretség esetén, lesz olyan diák, akinek csak egy ismerőse van a csoportból. Ha a köztük lévő ismeretséget szüntetjük meg, akkor hozzá már biztosan nem jut el a tétel.

□

10. Feladat. *Balázs megosztotta facebookon a római kiránduláson készült videót. A 9 fős olasz csoportból mindenkinek pontosan két ismerőse van a facebookon. Aki meglátja közülük az új videót, szintén megosztja azt. Előfordulhat-e, hogy valaki nem látja a videót?*

Rajzoljuk le a lehetőségeket.

Megoldás. Lehetséges, hiszen a gráf diszjunkt körök uniójaként is előállhat. Így teljesül a feltétel, hogy minden pont foka 2, és mégis előfordulhat, hogy valaki nem látja a videót.

□

11. Feladat. *A színjátszó szakkör minden tagjának 2 ismerőse van facebookon a csoporttársai közül. Tudjuk, hogy ha bárki megtudja a próba időpontját, és elküldi azt az ismerőseinek, majd azok tovább küldik a másik ismerősüknek, és így tovább, akkor biztos, hogy mindenkihez eljut az üzenet. Hány fős lehet a szakkör?*

Megoldás. A szakkör 3, 4 vagy 5 fős lehet. Ha n a szakkör tagjainak a száma, akkor egy 3 és egy $n-3$ hosszú kör megoldása lehet a feladatnak, ha $n-3 \geq 3$, és ekkor már nem jutna el mindenkihez az időpont. A legkisebb olyan n, melyre ez teljesül, az a 6. Ha valaki elküld egy időpontot, azt a szomszédja továbbküldi a másik ismerősének, aki szintén továbbküldi, és így tovább. A folyamat egyszer véget ér, azaz eljut egy olyan emberhez, aki már megkapta. Az eredeti küldőn kívül már mindenkinek megvan a két ismerőse, így ez az utolsó ember csak az eredeti küldő lehet. Azaz egy kört kaptunk. Ha maradna még diák, aki nem kapta meg, az ugyanígy egy másik körben lenne benne. Egy kör legalább 3 hosszú. Ha legalább 2 kör lenne, akkor legalább 6 tagú lenne a szakkör.

□

12. Feladat. *A 31 fős 9.b osztály tanulói végül addig fejlesztették az ismeretségi hálót,míg elérték, hogy mindenki ismer mindenkit.*

(a) Hány ismeretség van összesen?

(b) Az osztályfőnök is regisztrált facebookon, ezért kénytelenek voltak őt is bejelölni. Hány új ismeretség született?

Megoldás.

(a) Az ismeretségek száma: $\binom{31}{2} = \frac{31 \cdot 30}{2} = 465$.

(b) Minden diák bejelölte az osztályfőnököt, ez összesen 31 új ismeretséget jelent. □

13. Feladat. *A* 21 *fős angol csoport tagjai között* 140 *ismeretség van facebookon. Igaz-e, hogy ha bárki megoszt valamit, azt mindenki látja?*

Megoldás. Ez akkor lenne igaz, ha mindenki ismerne mindenkit. Ekkor azonban $\binom{21}{2} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ ismeretség lenne. Tehát 140 ismeretség mellett ez nem teljesül.

□

14. Feladat. *A* 21 *fős angol csoportban a lányok közül mindenki ismer mindenkit a facebookon. Tudjuk, hogy a köztük lévő ismeretségek száma 55. Kati is jár angolra. Hány lányismerőse van a csoportból?*

Megoldás. A lányok egy olyan n csúcsú teljes gráfot alkotnak, melyben az élszám 55. Az $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 55$ egyenletet megoldva $n = 11$-et kapunk. Ez azt jelenti, hogy 11 lány van összesen, és mivel Kati az összes lányt ismeri, ezért 10 lányismerőse van a csoportból. □

15. Feladat. *Az angol csoportba járó 11 lány mind ismeri egymást, és az összes fiú is ismeri egymást facebookon, de nincs fiú-lány ismeretség. Hány ismeretség van összesen? Hány ismeretség kell még ahhoz, hogy mindenki ismerjen mindenkit?*

Megoldás. Tudjuk, hogy 11 lány van a 21 fős csoportban, így a fiúk száma 10. A 10 fiú között $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ ismeretség van, mígy a lányok között $\binom{11}{2} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$. Így összesen 100 ismeretség van a csoportban. Ha mindenki ismerne mindenkit, akkor egy 21 csúcsú teljes gráfot alkotnának, melynek $\binom{21}{2} = \frac{21\cdot 20}{2} = 210$ éle van. Azaz a hiányzó ismeretségek száma $210 - 100 = 110$.

□

16. Feladat. *A 21 fős angol csoporton belül* 190 *facebook-ismeretség van. Biztosan teljesül-e, hogy mindenkihez el tud jutni a házi feladat facebookon keresztül, ha a tanárnő valakinek elküldi azt, és a diákok minden ismerősüknek továbbküldik? Milyen minimális élszámnál teljesül biztosan, hogy mindenkihez el tud jutni a házi feladat?*

Megoldás. Nem biztos, hogy teljesül. Tekintsük azt az esetet, amikor van 20 diák, akik közül mindenki ismer mindenkit, valamint 1 valaki, akinek nincs ismerőse. Ekkor az ismeretségek száma $\binom{20}{2} = \frac{20\cdot 19}{2} = 190$, és ahhoz, akinek nincs ismerőse a csoportból facebookon, biztosan nem jut el a házi feladat.

□

17. Feladat. *Anna a rajzszakkörön mindenkit megkérdezett, hogy hány barátjukat bökték már meg a szakkörről, illetve, hogy őket hányan bökték meg. A válaszokat az alábbi táblázatban foglalta össze:*

	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***
Hány embert bökött meg?	1	0	1	0	3	1
Hány ember bökte meg?	1	1	2	1	1	1

4. táblázat. Anna felmérése

Bizonyítsuk be, hogy valaki nem mondott igazat.

Megoldás. A válaszok alapján 6 bökést indítottak a diákok, azonban 7 bökést érzékeltek. Ez nyilvánvalóan nem lehetséges.

□

4.2. Metró

A közlekedés témakörben Budapest tervezett metróhálózatának térképét vettük alapul. Már maguk a metróvonalak és a megállók egy gráfot alkotnak.

Ezen alapfunkciók segítségével jutunk el az összetettebb fogalmak bevezetéséhez.

1. ábra. Metrótérkép

Térkép objektumai	*Gráffal kapcsolatos alapfogalmak*
Állomások	csúcsok
Metró vonalak	élek
Adott állomásról indulási irányok száma	fokszám
Csomópontok	2-nél nagyobb fokszámú csúcsok
Párhuzamos metróvonalak	párhuzamos él

5. táblázat. Metró-gráf megfeleltetés

18. Feladat. *Keress olyan megállót ahonnan pontosan*

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4 *irányba tudsz elindulni.*
Melyik megállóból lehet a legtöbb irányba elindulni?

Megoldás. 1 irányba a végállomásoktól tudunk elindulni, 2 irányba olyan megállókból, melyeken egy metróvonal halad át. Pontosan 3 irányba sehonnan sem tudunk elindulni, 4 iárnyba olyan megállókból, ahol kettő metróvonal találkozik, pl. Astoria, Lehel tér. A legtöbb irányba a Deák Ferenc térről tudunk elindulni, itt 4 metró találkozik, vagyis 8 irányba indulhatunk. □

19. Feladat. *Rajzold le azt a gráfot, amelynek csúcsai a csomópontok (azaz azok a megállók, ahol több metróvonal találkozik), élei a köztük lévő metróvonalak (főszakaszok).*

20. Feladat. *Minden metróvonalon különböző színű pecsétet adnak jegykezeléskor. Egy jegyen lehet több pecsét, de 2 egyforma színű nem. Össze lehet gyűjteni az összes pecsétet egy jegyre úgy, hogy közben nem jöhetünk fel a metróból?*

Megoldás. Az összes színű pecsétet több lehetséges úton is össze lehet gyűjteni. Az egyik ilyen: Oktogon - Astoria - Keleti pályaudvar - Kálvin tér - Deák tér - Oktogon - Újpest-Városközpont.

□

21. Feladat. *Hány főszakaszt kell még építeni ahhoz, hogy bármely két csomópont között legyen közvetlen járat?*

22. Feladat. *Gergő felszáll a metróra. Azt a játékot találja ki, hogy miután ment vele egy kicsit, leszáll, majd egy másikra felszáll, és azzal is elmegy valameddig. Biztosan vége lesz egyszer ennek a játéknak?*

Megoldás. Előfordulhat, hogy ennek a játéknak sosem lesz vége, ha például Gergő körbe-körbe utazgat a csomópontok között. □

23. Feladat. *Melyek azok a szakaszok, amelyeket ha lezárnak, akkor még mindig el tudunk jutni bármely állomásról bármelyikre?*

24. Feladat. *Mutass* 4 *különböző eljutási lehetőséget a Kálvin tértől Újpest-Központig.*

(a) Van-e 2 *olyan út, amelyeknek nincs közös megállója?*

(b) Ha az Astoriát lezárják, akkor van-e 2 *ilyen út?*

(c) Minimum hány állomást kell ahhoz lezárni, hogy ne lehessen eljutni a Kálvin tértől Újpest-Központig?

25. Feladat. *Az* 1*-es (sárga) metró Barack Obama látogatása miatt le van zárva az összes megállójával együtt. El tudsz-e jutni a Csömöri úttól a Filatorigátig metróval?*

26. Feladat. *Új tarifát vezetnek be a metróvonalakon. Eszerint annyiszor* 30 *Ft-ot kell fizetnünk, ahány állomást érintünk. Minimum mennyibe kerül eljutni*

(a) A Gyöngyösi utcától a Ferenc körútig?

(b) *Az Árpád hídtól a Ferenc körútig?*

27. Feladat. *A Lehel téren betörtek egy bankba. A rendőrök üldözőbe vették a bankrablót, aki a metróba menekült. Úgy próbálta megtéveszteni a rendőröket, hogy néhányszor átszállt, és másik metróval folytatta az útját. Ha egy metrószakaszon már utazott a rabló, akkor azt már figyelik a rendőrök, így nem tud újra azon utazni. Amíg tudott, lent maradt a metróban. Amikor már nem volt más lehetősége, kijött a metróból. A rendőrök már a kijáratnál várták. Hol kapták el a bankrablót?*

4.3. Gyakoroltatott fogalmak

Készítettünk egy táblázatot, melyben összefoglaltuk, hogy feladatsoraink segítségével mely fogalmakkal ismerkedhetnek meg a diákok.

Fogalmak	***Facebook***	***Metró***
Csúcs	1., 2., 3., 4., 5.	19., 21., 25., 26., 27.
Él	1., 2., 3., 4., 5.	19., 21., 25., 26., 27.
Fokszám	1., 2., 3., 4., 5. 6., 10., 13.	18., 19.
Csúcsok és élek száma közötti összefüggés	12., 13., 14., 15., 16.	
Fokszámok összege	1., 2.	
Teljes gráf	1., 3., 12.	21.
Út	6., 8.	20., 24., 25.
Séta		24.
Fa	6., 7. (csillag), 8.	
Kör	9., 10.	19., 22., 23.
Összefüggőség	5., 6., 10.	19., 23., 24., 25.
Komponensek	5., 10.	23., 24., 25.
Elvágó pont(halmaz)		23., 24.
Diszjunkt út		24.
Irányított gráf	17.	a legtöbb feladat átalakítahtó
Párhuzamos él		19.
Legrövidebb út		26.
Euler		27.

6. táblázat. A feladatokban fellépő gráfelméleti fogalmak

4.4. Eddigi feladatok lefedése

Feladataink az eddigi tankönyvek feladatainak jelentős részét lefedik. Egyes fogalmakat kevésbé tartottunk fontosnak (például: izolált pont, hurokél), helyettük más fogalmakat vezettünk be (például: elvágó pont, komponensek stb.).

5. Útvonaltervezés

A gráfelmélet egyik napjainkban talán leggyakrabban használt területe a legrövidebb út keresés problémája. Ennek oktatását több általunk megkérdezett középiskolai tanár és egyetemi professzor a középiskolásnál jóval magasabb szintűnek tartja. Véleményünk szerint azonban megfelelő rávezetéssel egy középiskolás is el tudja sajátítani az algoritmus használatát.

A legrövidebb út keresésére szolgáló algoritmusok közül legfontosabbnak a Dijkstra-algoritmus tekinthető. Ugyanis ez alapján a módszer alapján működnek az útvonaltervező programok és a GPS-ek is. A Dijkstra-algoritmus egy gráf adott csúcsából (legyen ez s) az összes többi csúcsba vezető legrövidebb utat keresi. Ebben az esetben a gráf irányított vagy irányítatlan élei nemnegatív súlyokkal vannak ellátva. Tekintsük azt az S részgráfot, mely azokat a csúcsokat tartalmazza, melyekhez már megállapítottuk a legkisebb súlyú utat s-ből, és azokat az éleket, amik ezeket az utakat alkotják (kiinduláskor ez a részgráf csupán a s kezdőpont). Az algoritmus során minden lépésben egy csúccsal bővítjük ezt a halmazt, mégpedig úgy, hogy a csúcs hozzávételével továbbra is igaz maradjon az S részgráfra vonatkozó feltétel. Ezt úgy tehetjük meg, hogy keressük a következő minimumot:

$$min\,\{\mu_c(u) + c(uv) : uv \text{ kilépő él } S\text{-ből}\}$$

ahol $\mu_c(u)$ az u csúcsba vezető minimális út súlya, $c(uv)$ pedig az adott uv él súlya. Azt az élt vesszük hozzá a halmazhoz, melyen ez a minimum felvétetik.[23]

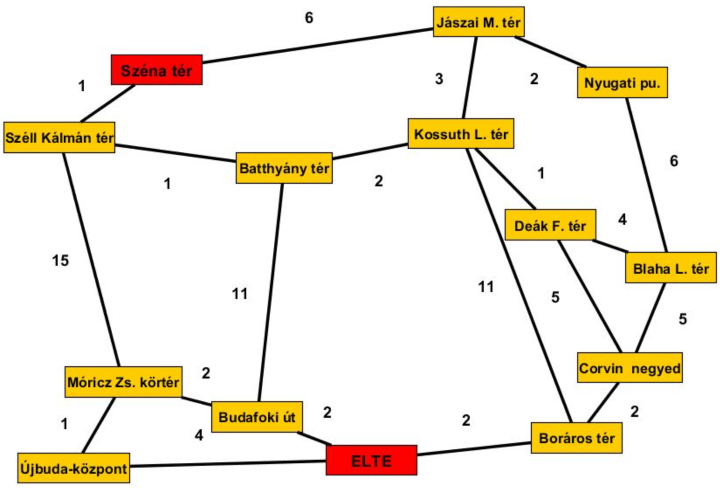
Az algoritmus bemutatására készítettünk egy feladatot, melyben Budapest tömegközlekedését használva kell legrövidebb utat keresnünk.

28. Feladat. *Az alábbi térkép (2. ábra) segítségével keressük meg a leggyorsabb útvonalat a Széna tértől az ELTE-ig. Az élek súlyai a megállók közti utazási időket adják meg.*

Megoldás. A térképet könnyen átrajzolhatjuk a 3. ábrán látható gráffá:

A leggyorsabb útvonal megkeresésének első lépésében tekintsük a Széna tér szomszédjait. Ezek a Széll Kálmán tér, és a Jászai Mari tér. A Széll Kálmán térre 1, míg a Jászai térre 6 perc alatt juthatunk el. Így az előbbit választjuk be, és tesszük egy halmazba a Széna térrel. Az összes többi csúcs a másik halmazban van. Most tekintsük az első halmaz elemeinek, vagyis a Széna térnek és a Széll Kálmán térnek a szomszédait. Ezek a Móricz Zsigmond körtér, a Batthyány tér és a Jászai Mari tér. A Móricz Zsigmond körtérre 16, a Batthyány térre 2, a Jászai Mari térre továbbra is 6 perc alatt juthatunk el. Ezek közül a Batthyány térhez juthatunk el a leggyorsabban,

2. ábra. Útvonaltervezés

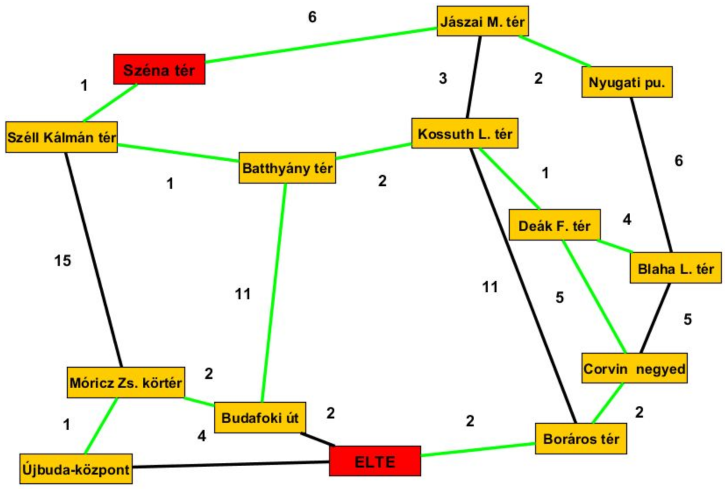


3. ábra. Gráf

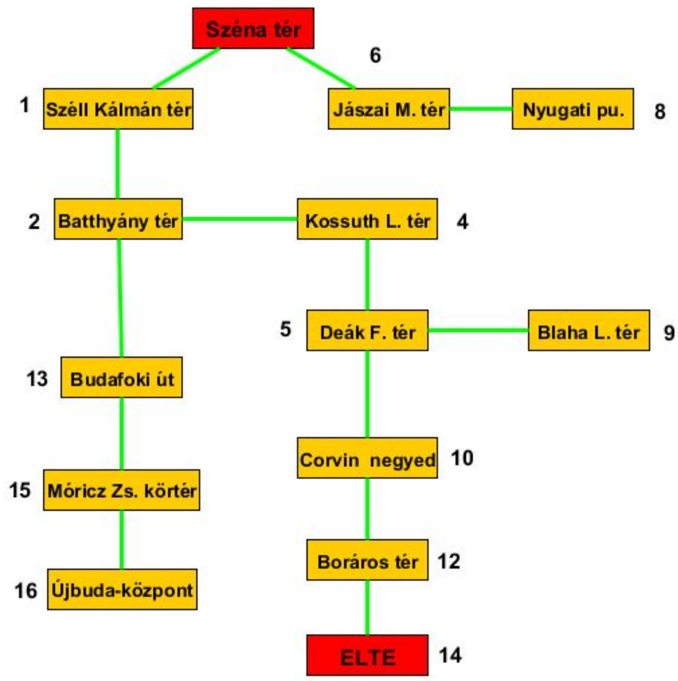
így azt választjuk be a Széna tér és a Széll Kálmán tér közé. A Batthyány tér a Budafoki utat és a Kossuth teret hozza be új szomszédként. Tehát most a szomszédok: Jászai Mari tér (6 perc), Kossuth tér (4 perc), Budafoki út (13 perc), Móricz Zsigmond körtér (16 perc). Ezek közül a leggyorsabban a Kossuth térre juthatunk el, így azt választjuk be az első halmazba a Széna tér, a Széll Kálmán tér és a Batthyány tér mellé. A Kossuth tér a Deák és a Boráros teret hozza be a szomszédok halmazába. Így ennek az elemei most a Jászai Mari tér (6 perc), a Deák tér (5 perc), a Boráros tér (15 perc), a Budafoki út (13 perc), a Móricz Zsigmond körtér (16 perc). Ezek közül a Deák teret fogjuk választani, hiszen ide juthatunk el a leggyorsabban, 5 perc alatt. Az új szomszédok most a Blaha Lujza tér (9 perc) és a Corvin negyed (10 perc). Az eddigieket is figyelembe véve következő lépésként a Jászai Mari teret kell beválasztanunk az első halmazba, hiszen most a 6 perc a legkevesebb idő. Az algoritmust így folytatva megkapjuk, h melyik a leggyorsabb út az ELTE-ig. Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a megoldást.

B	***C***	***D***	***N***	***F***	***L***	***H***	***J***	***G***	***I***	***E***	***K***	***M***
1	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	6	**2**	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	6		16	**4**	13	-	-	-	-	-	-	-
	6		16		13	**5**	15	-	-	-	-	-
	6		16		13		15	9	10	-	-	-
			16		13		15	9	10	**8**	-	-
			16		13		15	**9**	10		-	-
			16		13		15		**10**		-	-
			16		13		**12**				-	-
			16		**13**						14	-
			15								**14**	-
			15									18
												16

Az algoritmust így végigcsinálva az állomásokat tehát a következő sorrendben vesszük be: Széll Kálmán tér, Bathyány tér, Kossuth Lajos tér, Deák Ferenc tér, Jászai Mari tér, Nyugati pályaudvar, Blaha Lujza tér, Corvin negyed, Boráros tér, Budafoki út, ELTE, Móricz Zsigmond körtér és végül Újbuda központ. Eredményül a 4. és 5. ábrákon látható útvonalat és feszítőfát kapjuk. Ezek alapján látjuk, hogy a leggyorsabban a Széna tértől úgy juthatunk el a Petőfi híd budai hídfőjénél található ELTE épületeihez, ha a Széna térről 4-6-os villamossal átmegyünk a Széll Kálmán térre, ahonnan 2-es metróval a Deák térre, majd 3-as metróval a Corvin negyedhez jutunk. Itt újra 4-6-os villamosra szállva eljutunk a célig. Az összesen eltelt idő 14 perc.



4. ábra. Algoritmus után



5. ábra. Feszítőfa

Fontos megjegyeznünk, hogy most csak a tényleges utazási időkkel számoltunk, nem vettük figyelembe az átszállási és várakozási időket. Márpedig ez nagyon fontos lehet, hiszen az előbb megtalált leggyorsabb útvonal 3 átszállást tartalmaz, amely 3 gyaloglással és várakozással jár együtt.

Az átszállásokat a következő képpen tudjuk jelölni: A csomópontban találkozó éleket széthúzzuk úgy, hogy minden él keresztezzen minden élt, de minden metszésponton csak két él menjen át. A kettes, illetve hármas találkozásokat a 6. ábra mutatja:

A feladatban az alábbi jelöléseket használtuk:

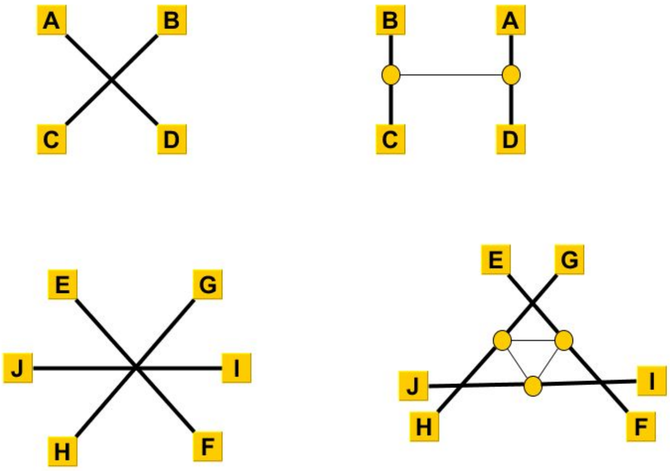
- A: Széna tér
- B: Széll Kálmán tér
- C: Jászai Mari tér
- D: Batthyány tér
- E: Nyugati pályaudvar
- F: Kossuth Lajos tér
- G: Blaha Lujza tér
- H: Deák Ferenc tér
- I: Corvin negyed
- J: Boráros tér
- K: ELTE
- L: Budafoki út
- M: Újbuda központ
- N: Móricz Zsigmond körtér

Ha az eredeti gráfban szeretnénk jelölni az átszállásokat, illetve egy átszállást átlagosan 4 percnek számolunk, akkor a 7. ábrán látható gráfot kapjuk:

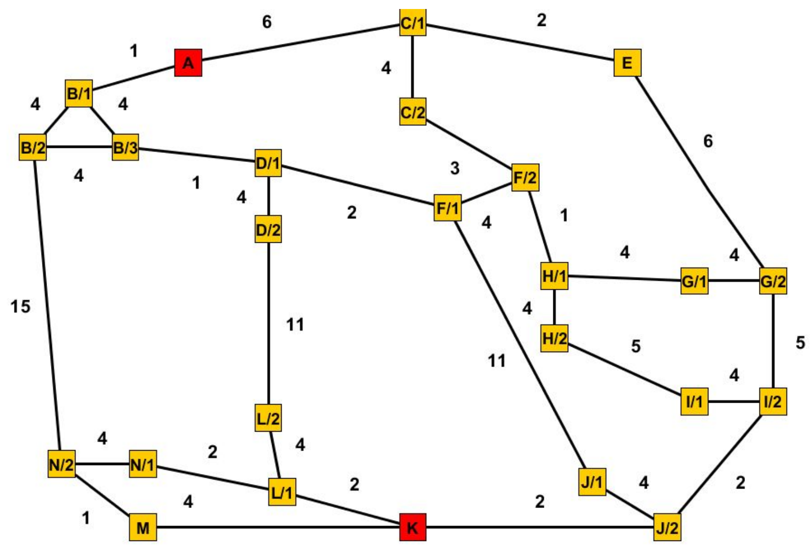
Ezen elvégezve a Dijkstra-algoritmst, a 8. és a 9. ábrán látható erdményre jutunk:

A feszítőfán jól látszik, hogy ebben az esetben már nem ugyanaz a leggyorsabb útvonal, amit előbb találtunk. Ha átszállási időt is számolunk, akkor a leggyorsabban a 4-6-os villamossal jutunk el az ELTE-ig a Széna tértől.

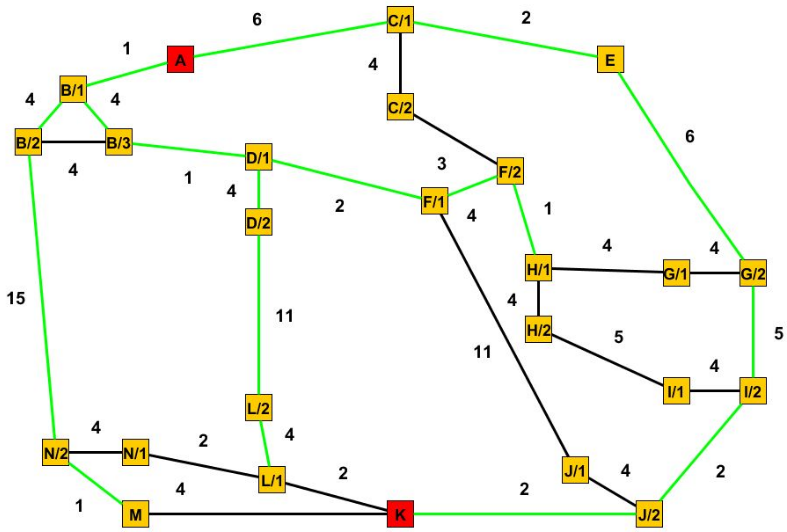
□



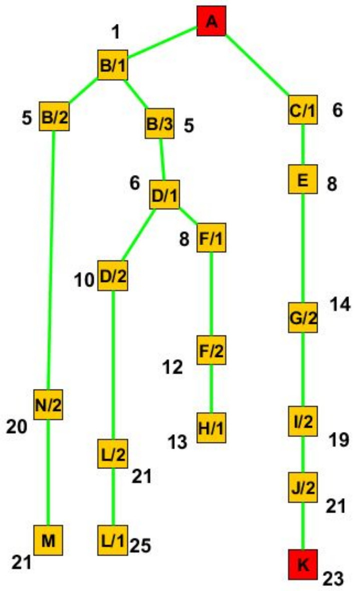
6. ábra. Átszállások jelölése



7. ábra. Átszállással



8. ábra. Átszállással



9. ábra. Átszállás

6. Melléklet

6.1. Klacsákné Tóth Ágota levele

Kedves Dorka és Veronika!

Áttanulmányoztam dolgozatukat. Jó a témaválasztás, igazán hiánypótló, alapos munkát olvashattam.

A feladatok kitűnőek, gyerekekhez közelálló témákat érintenek, könnyen megértetik a diákokkal a gráfelmélet alapfogalmait. Az egyes témákhoz kapcsolódó feladatok rendkívül sokrétűek, mind a nehézségi szint, mind a megoldásukhoz szükséges kompetenciák tekintetében. Ennek a kis feladatgyűjteménynek jó hasznát veheti valamennyi középiskolai tanár ill. diák.

Javaslatom, hogy készítsenek a feladatokhoz megoldási útmutatót (akár a dolgozaton kívül, külön dokumentumban), így a neten keresztül olyan diákok is haszonnal olvashatják, akiknek nincs alkalmuk középiskolában megismerkedni a gráfelmélet alapjaival, de szükségük lenne a tudásra a sikeres érettségi érdekében.

Én személy szerint mindkét érettségiző osztályomban használni fogom a feladatokat a rendszerező összefoglalás során. Az egyik osztályt idén vettem át, tavaly nem tanultak a gráfokról, így ezeken a feladatokon keresztül fognak megismerkedni a témával.

Gratulálok munkájukhoz, további tanulmányaikhoz sok sikert kívánok.

Üdvözlettel:

Klacsákné Tóth Ágota

Hivatkozások

[1] Andrásfai Béla, Ismerkedés a gráfelmélettel, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 1973, 1984. Angolul: Introductory graph theory, Akadémiai Kiadó, Budapest és Adam Hilger Ltd. Bristol, New York, 1977.

[2] Andrásfai Béla, Gráfelmélet. Folyamok, mátrixok, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983. Angolul: Graph theory. Flows, matices, Akadémiai Kiadó és Adam Hilger Ltd. Bristol, Philadelphia, 1991.

[3] Andrásfai Béla, Gráfelmélet, Polygon Kiadó, Szeged, 1997.

[4] Bollobás Béla, Modern graph theory, Graduate Texts in Mathematics, 184. Springer-Verlag, New York, ISBN: 0-387-98488-7 1998.

[5] Harary, Frank: Graph theory. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London 1969.

[6] Donald E. Knuth, Ronald Graham, Oren Patashnik: Konkrét matematika, 1998, Műszaki Könyvkiadó. ISBN 963-16-1422-0 2008.

[7] Elekes György, Brunczel András: Véges matematika, Eötvös Kiadó, 2006

[8] Friedl Katalin, Recski András, Simonyi Gábor: Gráfelméleti feladatok, Typotex ISBN 963-966401-4 2008.

[9] Hajnal Péter, Elemi kombinatorika feladatok, POLYGON KÖNYVTÁR, Szeged, 1997.

[10] Hajnal Péter, Gráfelmélet , II. kiadás, Polygon Jegyzet, Szeged, 2003.

[11] Hajnal Péter, Összeszámlálási problémák, Polygon Jegyzet, Szeged 1997.

[12] J. A. Bondy, U. S. R. Murty: Graph Theory, Springer. ISBN 978-1-84628-969-9 2008.

[13] Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba: A számítástudomány alapjai, Typotex. ISBN: 9639664197 2006.

[14] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika, Typotex Kiadó, ISBN 978-963-2790-85-5 2006.

[15] Lovász László, Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex kiadó, 1999.

[16] Pólya György-Szegő Gábor, Feladatok és tételek az analízis köréből, Tankönyvkiadó Vállalat, ISBN 978-963-2791-37-1 1981.

[17] R. Stanley, Enumerative combinatorics, Cambridge University Press vol. ISBN: 978-0-521-55309-4 1997.

[18] Reinhard Diestel, Graph Theory, Graduate text in mathematics 173, Springer, ISBN 978-3-642-14278-9 1997.

[19] Vilenkin, Kombinatorika, Tankönyvkiadó, Budapest

[20] Balázsi I., Ostorics L., Szalay B., Szepesi I. *PISA 2009. Összefoglaló jelentés. Szövegértés tíz év távlatában.* Budapest, Oktatási Hivatal, 2010.

[21] http://www.math.klte.hu/~kovacsa/Kompetencia.pdf

[22] http://www.ntk.hu/kozepiskola/oktatastamogatas/kerettanterv

[23] http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/opkut/ulin.2011.pdf