

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szabó Zsanett

Kombinatorikus játékok különböző karakterisztikájú felületeken

Matematika BSc

Szakdolgozat

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	4
2. A játék	4
3. A játék történetéről	5
4. Nem mindig rakható ki a helyes sorrend?	7
5. Lehetetlenség bizonyítások	9
5.1. William Woolsey Johnson bizonyítása	9
5.2. Hermann Schubert bizonyítása	11
6. Játék más felületeken	12
6.1. Játék hengeren	12
6.2. Játék Möbius-szalagon	14
6.3. Játék tóruszon	16
6.4. Játék Klein-kancsón	18
6.5. Játék a projektív síkon	19
7. További lehetlenség bizonyításokról	20
8. Játékok más felületeken	22
8.1. Játék hengeren	22
8.2. Játék Möbius-szalagon	23
8.3. Játék tóruszon	27
8.4. Játék Klein-kancsón	28
8.5. Játék a projektív síkon	30
9. Játék a telefonmenüben	32
10.Összefoglalás	34

1. Bevezető

Szakedolgozatomban különböző felületeken elképzelt tologatós játékokkal foglalkozom. A 135 éves hagyományos tologatós játék bemutatása után annak történetét ismertetem. A történeti leírást az [1] kiadvány alapján készítettem. Ezután megvizsgálom, hogy ennél a játéknál milyen feltételek mellett rakhatóak ki az egyes állások. Ezt követően azt elemzem, hogy hengeren, Möbius-szalagon, tóruszon, Klein-kancsón és projektív síkon hogyan játszhatunk tologatós játékot. Minden felület esetében megmondom, hogy mi rakható ki egy-egy kezdőállásból. A szakedolgozat második felében ugyanezekben a felületeken elképzelt játékokat vizsgálom egy gráfelméleti tétel segítségével.

A különböző felületek után azt is megvizsgálom, hogy hogyan lehetne a mobiltelefon menüjében tologatós játékot játszani.

A dolgozat célja az is, hogy bármely olvasó, mindenféle háttér nélkül megértse a lehetetlenségi bizonyításokat.

2. A játék

A 15-ös kirakójátékot vagy ismertebb nevén tili-tolit angolul „*Fifteen Puzzle*”-ként emlegetik. A játék eredetileg egy négyzet alapú papírdobozból és 15 számozott fakockából állt. A doboz oldalhossza négy szorosan egymás mellé helyezett fakocka szélességének felelt meg. A 15 fakockát ki lehetett venni a dobozból és tetszőleges sorrendben vissza lehetett tenni abba. A 15 fakocka mellett még egynek lenne helye a dobozban. Így a doboz tartalma tologatásokkal átrendezhető.

Az üres helyet megcserélhetjük a vele szomszédos fakockákkal úgy, hogy a kiválasztott fakockát az üres hely helyére toljuk. A játékban minden szabályos lépés egy ilyen csere, ami az üres helyet cseréli meg valamelyik vele szomszédos fakockával. A játék célja, hogy az összekevert fakockákat ilyen szabályos lépésekkel sorba rendezzük.

Az eredeti játék leírása mindössze annyi volt, hogy borítsuk ki a doboz tartalmát, majd tegyük vissza véletlen sorrendben és tologassuk addig a fakockákat, ameddig azok ismét sorban nem lesznek.



3. A játék történetéről

Az 1880-as évek elején vált igazán népszerűvé a 15-ös játék. Rengetegen játszottak vele, legalább 280 újságban jelent meg cikk vagy hirdetés a játékkal kapcsolatban, de sokáig, több mint 125 évig nem derült fény igazi kitalálójának személyére.

A játékot „*Gem*” néven kezdték el árusítani 1879. december közepe táján. Ez a Bostonban élő Matthias J. Rice nevéhez köthető, aki nem gondolta, hogy ekkora játékkörületet indít el a tologatós játékkal. Sokáig többen hitték azt, hogy az ő fejében született meg a játék gondolata, de ez nem így történt.

Rice zongorák és egyéb fából készült dolgok gyártásával és eladásával foglalkozott 1869-től. Egyszer egy szerelővel, aki a házában az ablakot szerelte arról beszélgetett, hogy szeretne árulni a boltjában egy kis fa játékot, amit olcsón elő tud állítani és népszerű lehet a vásárlók körében. Néhány nappal a beszélgetés után a szerelő ismét felkereste Rice-t. Egy fából készült játékot mutatott neki, amit egy hartfordi süket diáktól vásárolt Bostonban 75 centért. Ez a játék a 15-ös játék volt.

Rice-nak rögtön megtetszett a tologatós játék, ezért elvitte bemutatni a boltjában dolgozóknak. Ők kritikával fogadták az újdonságot, és nem jósltak neki nagy jövőt. A nem túl megnyerő fogadtatás után Rice más kereskedőkhöz is elment prezentálni szerzeményét, hátha valamelyiküknek megtetszik annyira, hogy forgalmazni is hajlandó lesz. Végül *Banfield, Forristal & Co.* díszműáru kereskedő egyezett bele az értékesítésbe. A játékot „*Gem Puzzle*” néven hozták forgalomba.

A következő fél évben annyira népszerűvé vált a „*Gem Puzzle*”, és olyan nagy volt rá kereslet, hogy Rice nem tudott eleget készíteni belőle. Hihetetlen sebességgel terjedt el a 15-ös játék. 1880 februárjában meghódította Bostont és az Amerikai Egyesült Államok keleti nagyvárosait, március 2-án Chicagót, egy héttel később pedig már San Franciscót is. Ez azért említésre méltó, mert akkoriban ez az út Chicagótól San Franciscóig vonattal is nyolc napig tartott. A kisebb városokban valamivel többet kellett várni a játék debütálására, de április közepére azokba is megérkezett az újdonság. Májusban már Hawaii-n is ezzel játszottak. Közben áprilisban Franciaországba is betört a játékkörület, ami Európában az amerikaihoz hasonló tempóban terjedt.

Az első, a tili-tolival foglalkozó cikk 1880. január 6-án – körülbelül három héttel a játék népszerűvé válása után – a *Boston Evening Transcript* című újságban jelent meg. Hat nappal később ugyanebben a lapban ismét foglalkoztak az újdonsággal. Összegyűjtötték a különböző gyártók által forgalmazott különféle kiadásokat, hiszen már ekkor többféle néven értékesítették a tili-tolit. A játék minden új gyártója a Rice-féle megjelenést és szabályokat másolta. Néhányan még a „*Gem Puzzle*” nevet is megtartották, míg mások „*Solitaire*”, „*Fifteen*”, „*Number Puzzle*” vagy „*Boss*” névre keresztelték. Amint játék megjelent és elterjedt egy-egy nagyvárosban, úgy jelentek meg a következő néhány hétben a helyi lapokban is a játékkal foglalkozó cikkek, mert nagyon sokakat érdekelt minden, ami a tili-tolival kapcsolatos. Abból is látszik, hogy mennyire központi szerepet kapott ez az újdonság az emberek életében, hogy 1880-ban legalább nyolc olyan zenés szerzemény jelent meg, aminek címében vagy témájában a 15-ös játék szerepelt.

A játékot kezdetben 50, majd 25 centért árulták. 1880. március 1-jén, kevesebb, mint három hónappal a megjelenése után már 5 centért is meg lehetett vásárolni a tili-tolit. Ha hinni lehet a számoknak, akkor 1880-ban az Amerikai Egyesült Államokban minden ötödik embernek volt saját tologatós játéka. Az ár-csökkenés a gyártás fejlődésének és a különböző gyártók közötti versenynek volt köszönhető. 1880. március 5-én Rice kezdeményezte a „Gem” szabadalmaztatását. Április 13-án meg is kapta a szabadalmi jogot, de az Amerikai Egyesült Államokban ekkor már lecsengőben volt a játékörület, így Rice-nak ez már nem hozott túl nagy hasznot.

A játékot jóformán mindenki ismerte, a kitalálóját viszont senki sem. Számos újságban foglalkoztak azzal, hogy kié lehetett eredetileg a játék ötlete, így sokféle elmélet született ezzel kapcsolatban. Egy pennsylvaniai napilapban így kommentálták a feltételezéseket: „Az újságok szerint a 15-ös játéknak több kitalálója volt, mint amennyi fakocka van a dobozban.”. Az enciklopédiák és internetes oldalak többsége Sam Loyd-nak tulajdonította a játékot, aki több másik játék kitalálójának mondhatta magát. Bár a játékörület ideje alatt senki sem említette őt ezzel kapcsolatban, tíz évvel később, 1891 januárjában azt állította, hogy ő találta ki a tologatós játékot. Haláláig (1911.) Loyd minden újságban és könyvében saját találmányi közé sorolta a tili-tolit, és senki sem kérdőjelezte meg mindezt.

Loyd legidősebb fia 1914-ben megjelentetett egy könyvet (*Sam Loyd's Cyclopedia of Puzzles*), melyben apja nagyszerű játékairól, köztük a tili-toliról is írt. Ezzel sokakat ismét meggyőzött arról, hogy apja találta ki a kedvelt játékot. Bár a fiú soha többet nem említette mindezt, mégis pénzhez jutott a játék utáni díjak kapcsán. Sam Loyd annyira sikeresen elhitette a világgal, hogy ő találta fel a tili-tolit, hogy még 1957-ben is az ő vívmányai közé sorolták.

A kérdés azonban továbbra is fennáll: Ha nem Matthias J. Rice és nem is Sam Loyd a játék kitalálója, akkor ki?

Úgy gondolták, hogy a válaszhoz majd az a hartfordi süket diák fog elvezetni, akitől Rice ablakszerelője vette a játékot. Ez az út azonban zsákutcába vezetett, mert az iskolai levéltár dokumentumai alapján nem derült ki, hogy ki készítette a játékot. Az sem volt egyértelmű, hogy egy vagy több diák barkácsolt 15-ös játékokat az iskola műhelyében.

Az *Ontario Country Journal* 1880. február 20-ai számában jelent meg egy cikk, mely szerint talán a canastotai (New York) postamester, Noyes Palmer Chapman találta ki a 15-ös játékot. Összességében több mint 20 újságban jelent meg ez az információ, de a sok találgatás és téves hír mellett mindez nem volt eléggé megbízható.

A hiteles történet máig nem tisztázott. Két lehetséges út van:

Az egyik, hogy Chapman fia, Frank vitt haza magával Syracuse-ba egy vagy több játékot. Franknek James Beldennel közös birtoka volt. James felesége Anna Gere édesapja Robert Gere nagy vállalkozó volt, aki sokszorosíthatta a játékot. A Belden család 1877-ben három hetet, 1878-ban pedig egy hónapot töltött Watch Hill-ben, ahol a lakosoknak és az ott tartózkodó vendégeknek volt alkalma kipróbálni az eredeti és sokszorosított 15-ös játékokat. Az szintén nem egyértelmű, hogy hogyan juthatott el a tili-toli Hartfordig. Annyi biztos, hogy 1879. július 2-án 75 hartfordi diák kirándult Watch Hillben. Így talán ők vitték magukkal a

játékot az iskolába.

A másik lehetséges út az, hogy a játékot a Belden család odaadta Mary és Julius Catlinnek, akiknek amellett az Ocean House hotel mellett volt villájuk, ahol Beldenék is tartózkodtak. Talán lányuk, Hannah Catlin vitte haza magával a játékot Hartfordba 1878-ban, ahol a lány alkalmanként meghívta magához a süket diákokat. Lehetséges, hogy így került a játék az iskola tanulóinak kezébe.

Így vagy úgy tehát a játék eljutott a hartfordi iskolába, a diákok pedig iskola műhelyében sokszorosították, majd az utcán árulni is kezdték a tili-tolit. Így jutott hozzá az az ablakszerelő is, aki elvitte Rice-nak a játékot.

Miért nem szabadalmaztatta Noyes Chapman a sikeres játékot? Az Amerikai Egyesült Államok kiváltságlevelei között valóban nincs bejegyzés Chapman néven, a marylandi bejegyzések között viszont megtalálható a játék 1880. február 21-edikei dátummal „*Block Solitaire Puzzle*” néven. Kérdéses, hogy az Amerikai Egyesült Államok kiváltságlevelei között miért került elutasításra Chapman kérvénye. Valószínűleg azért, mert egy évvel korábban Ernest U. Kinsey szabadalmat kapott a „*Puzzle-Block*” nevű játékára és azt gondolhatták, hogy a kettő ugyanaz. (Kinsey játéka 6×6 kockából állt. Ezek egyik oldalán számok és betűk álltak, a kockák hátoldalain pedig egy kép kis részletei. Ezzel a kirakóssal az ABC-t és a számokat lehetett gyakorolni.)

Többen nem hitték, hogy a tili-toli népszerű lehet, mégis nagyobb sikere volt, mint korábban bármelyik másik kirakós játéknak. Az ezt megelőző kirakós játékokról azért nem született ennyi cikk, mert azokat mindig mindenki ki tudta rakni vagy legalább látta, hogy mi a megoldás. Itt azonban úgy tűnt, hogy nem minden kezdőállásból lehet kirakni a helyes sorrendet. Ez pedig az örületbe kergette az embereket.

4. Nem mindig rakható ki a helyes sorrend?

A játékkal kapcsolatban az volt a legfrusztrálóbb, hogy voltak olyan alaphelyzetek, amelyekből nem sikerült kirakni a helyes sorrendet. Sokan mérgelődtek, amikor az első 13 kockát már sikeresen a helyére rakták, és csak a 14-es és 15-ös számúak voltak felcserélve, de sehogy sem tudták visszacserélni azokat. 1880. január 31-én egy worcesteri fogorvos, Dr. Charles K. Pevey egy 25 dolláros fogsort ajánlott fel (később ezt 100 dollárosra emelte) annak, aki ebből a felcserélt állásból ki tudja rakni a helyes sorrendet. A díjat emelve 1896-ban Sam Loyd 1000 dollárt ajánlott fel a megoldónak.

A két felajánlás között eltelt 16 év is jelzi, hogy milyen hosszú időn keresztül jelentett problémát annak az állásnak a kirakása, amikor csak a 14-es és 15-ös számú fakockák vannak felcserélve. Nagyon sokakat foglalkoztatott ez a kérdés, de senki nem tudta megoldani. Sok cikk is született ezzel kapcsolatban. Ezekben nevezték el 13 – 15 – 14-nek ezt az állást, amikor minden kocka a helyén van, kivéve a 14-est és 15-öst, amik fel vannak cserélve. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban én is ezen a néven fogok erre az állásra hivatkozni.

A felajánlott összeget soha senki nem nyerte el, mert nem találtak valós megoldás a problémára, pedig sokan pályáztak rá. A lehetséges megoldásokat ingerületen vitatták meg helyi újságokban, bárókban és szociális körökben. Több lapban

cikkezték olyan emberekről is, akiket örületbe vitt a játék okozta feszültség.

1880. január 30-án a *Gasette* című folyóiratban Pevey – a 25 dolláros fogszor felajánlója – megjelentetett egy cikket, amiben azt állította, hogy a játék kirakása bizonyos esetekben matematikailag lehetetlen. Magyarozatként azt írta, hogy ez ahhoz hasonló, mint amikor két vonat nem tud egyszerre ugyanazon a vágányon haladni. Bár a kirakás lehetetlenségében teljesen igaza volt, a magyarázata hagyott még némi kívánnivalót maga után.

Mielőtt matematikailag korrekt lehetetlenségi bizonyítás született volna a 13–15 – 14-es állásra, olyan trükkös megoldások láttak napvilágot, amiknek a játék szabályainak többértelműsége adott teret. Habár a játék dobozának fedelén volt egy kép a „helyes” sorrendben lévő kockákról, ahol a számok az 1. ábrán látható módon helyezkedtek el, mégsem volt sehol leírva vagy kimondva, hogy az lenne a

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1. ábra. A „helyes” sorrend

játékszabályban említett helyes sorrend. Sok megoldó érvelt azzal, hogy a doboz fedelén szereplő kép nem része a játék leírásának, így teljesen elfogadhatóak az ő megoldásaik, amikben a kockák más szempontok szerinti szabályos sorrendben helyezkednek el.

Az első ilyen megoldás 1880. február 25-én, a *New York Evening Post*ban jelent meg. Ennél a kirakásnál kockák alulról felfelé vannak rendezve úgy, hogy az 1-es a bal alsó sarokban helyezkedik el. Ha a kirakás után a dobozt elforgatjuk 90°-kal jobbra, akkor majdnem az eredetileg helyesnek gondolt sorrendet kapjuk, ahogyan a 2. ábrán látható.

4	8	12	
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

2. ábra. Az első trükkös megoldás

Ez a megoldás ihlette a játéknak azt a változatát, amiben kockák helyett

hengerek vannak, amik könnyedén elforgathatóak.

A cikk megjelenése utáni napokban több másik megoldás született arra, hogy milyen sorrendben rakható még ki a 13 – 15 – 14-es állás. A 3. ábrán bemutatok párat ezek közül, valamint látható néhány saját trükkös megoldásom is.

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
12	13	14	15

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
	15	14	13

4	3	2	1
5	14	13	12
6	15		11
7	8	9	10

1	2	3	4
12	13		5
11	14	15	6
10	9	8	7

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
	15	14	13

1	2	4	7
3	5	8	11
6	9	12	14
10	13	15	

1	9	10	2
3	11	12	4
5	13	14	6
7	15		8

3. ábra. További trükkös megoldások

5. Lehetetlenség bizonyítások

A történeti hűség kedvéért a következő két bizonyítást úgy ismertetjük, ahogy azok annak idején publikálásra kerültek.

5.1. William Woolsey Johnson bizonyítása

Johnson bizonyítása az *American Journal of Mathematics* című folyóiratban jelent meg 1879 decemberében. (Érdekes, hogy a lapot csak 1880 áprilisában adták ki. Ezzel sok fejfájást okoztak azoknak, akik a 13 – 15 – 14-es állás kirakásával próbálkoztak.)

Helyezzük el a dobozban a 15 kockát tetszőleges sorrendben úgy, hogy a jobb alsó sarok maradjon üresen. Számozzuk meg a helyeket a dobozban 1-től 16-ig. Kezdjük a bal felső sarokban és soronként balról jobbra haladjunk. Így a jobb alsó sarokban lesz a 16-os hely.

A kockák minden lehetséges sorrendje megfelel az 1 és 16 közötti számok egy-egy permutációjának. Összesen $16!$, vagyis 20 922 789 888 000 féle sorrendben helyezhetők el a dobozban a kockák.

Egy példa a permutációra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 13 & 2 & 8 & 11 & 4 & 15 & 16 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 14 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

A felső sorban a helyet jelölő sorszám, az alsóban pedig az adott helyen található kocka száma szerepel.

A permutációt felírhatjuk ciklikus formában is. Átírásakor vennünk kell egy számot a felső sorból (legyen ez most a 6-os), majd vegyünk az alatta lévő számot (példánkban ez a 4-es). Ezt is keressük meg a felső sorban, utána pedig folytassuk az alatta lévővel (esetünkben ez a 8-as). Ismételjük ezt addig, ameddig vissza nem jutunk ahhoz a számhoz, amiből elindultunk. Azok a számok, amikbe ilyen módon eljutottunk, az eljutás sorrendjének megfelelően egy ciklust alkotnak. A példában a 6-osból indulva ezt a ciklust kaptuk: 6, 4, 8, 16, 5, 11, 3, 2, 13, 10, 7, 15. Az első ciklus felírása után, ha maradt még olyan szám, amibe nem jutottunk el, akkor abból indulva újabb ciklus írható fel. Ha már az összes számhoz eljutottunk, akkor a kapott ciklusokat egymás mellé írva megkapjuk a permutáció ciklikus felírását. (A permutációk ciklikus felbontása a ciklusok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.)

A példa ciklikus felbontása a következő:

$$(6, 4, 8, 16, 5, 11, 3, 2, 13, 10, 7, 15)(12)(1, 9)(14)$$

Nézzük meg, hogy mi történik akkor, ha két kockát megcserélünk egymással. Ha ugyanabban a ciklusban találhatók, akkor a csere kettéosztja a ciklust és két ciklus lesz belőle. A 10 és a 11 felcserélésével például a következőt kapjuk:

$$(7, 15, 6, 4, 8, 16, 5, 10)(3, 2, 13, 11)(12)(1, 9)(14)$$

Ha pedig megcserélt kockák eredetileg különböző ciklusokban találhatóak, akkor a két ciklus egy ciklussá alakul. A fenti permutációban a 10 és 11 felcserélésével az eredeti, csere előtti permutációt kapjuk vissza.

Tekintsük a permutációkat párosnak vagy páratlannak aszerint, hogy páros vagy páratlan számú ciklusból áll. Az előbbieket alapján bármely két kocka cseréje egy páros permutációt páratlanná, egy páratlant pedig párossá tesz.

A sorba rendezett kockák ciklikus felírása 16 db 1-es ciklusból áll, vagyis páros permutáció. Felírása a következő:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)$$

Annak az esetnek a ciklikus reprezentációja, amikor a 14 és a 15 kivételével minden kocka a helyén van 14 db egyes ciklusból és 1 db kettes ciklusból áll, tehát

páratlan permutáció. Így írható fel:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14, 15)(16)$$

A játékban az összes legális lépés egy csere az üres hely és valamelyik szomszédja között. Ahhoz, hogy a kezdeti helyzetéből (jobb alsó sarok) az üres helyet visszajuttathassuk ugyanoda, páros számú cserét kell végrehajtanunk. A páros lépés után a kezdetben páros permutáció ismét páros, a kezdetben páratlan pedig ismét páratlan lesz.

Tehát nem lehet a szabályos lépésekkel sorba rendezni a kockákat, ha kezdetben csak a 14-es és a 15-ös volt felcserélve, mert az egyik egy páros permutáció, a másik pedig páratlan, és páros számú lépést kellene végrehajtanunk az üres hely jobb alsó sarokba való visszajuttatása miatt.

Ezt a bizonyítást, mely igazolja, hogy a páratlan permutációk nem rakhatóak ki sokszor összekapcsolják William E. Story, ugyanebben az újságban megjelent bizonyításával, melyben bizonyította, hogy minden páros permutáció kirakható.

5.2. Hermann Schubert bizonyítása

Ez a bizonyítás a *Hamburgischer Correspondent* című folyóiratban jelent meg W. W. Johnson bizonyításának megjelenési idejével azonos hónapban, 1880 áprilisában.

Az előző bizonyításhoz hasonlóan számozzuk be a helyeket soronként 1-től 16-ig és írjuk fel az adott elhelyezést kétsoros permutáció formájában. A felső sorba kerülnek ismét a helyek számai, az alsóba pedig az adott helyen lévő kocka száma. Az üres helyet jelöljük 16-os számmal a kétsoros felírásban.

Számoljuk meg az így felírt permutációban az inverziókat. Egy kocka inverzióban áll egy mögötte lévővel, ha annak száma kisebb, mint a fakockán lévő szám. Az üres hely esetében ne számoljuk az inverziókat. Az egyes elemek inverzióinak összege adja az adott állás permutációs felírásában található összes inverzió számát.

Például az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 13 & 2 & 8 & 11 & 4 & 15 & 16 & 1 & 7 & 3 & 12 & 10 & 14 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

permutációban a 4-es számot viselő fakocka az 1-es és 3-as számúval van inverzióban. Ebben a példában a kétsoros felírás alsó sora szerinti sorrendben számolva $8 + 11 + 1 + 6 + 7 + 2 + 8 + 0 + 3 + 0 + 3 + 2 + 2 + 1 + 0$, vagyis 54 inverzió van összesen.

Megállapítható, hogy ha az üres helyet a során belül mozgatjuk, akkor az inverziók száma nem változik. Ha a tologatás során az üres hely egy másik sorba kerül, akkor annak eredeti helyére egy számozott fakockának kell kerülnie. Így ez a fakocka a kétsoros felírásban 3 hellyel odébb kerül, vagyis 3 számmal cserél helyet. Ha ezek a számok mind nála nagyobbak vagy nála kisebbek voltak, akkor az inverziók száma 3-mal változik. Ha a háromból 2 nála nagyobb volt, 1 pedig kisebb vagy 2 nála kisebb, 1 pedig nagyobb, akkor az inverziók száma 1-gyel változik. Ezek alapján sorváltáskor minden esetben egy páratlan számmal változik az inverziók száma.

Tehát a játék minden lépésében változatlan marad, vagy páratlan számmal változik (az előbb leírt módon 1-gyel vagy 3-mal) az inverziók száma.

A kockákat szabályos sorrendben elhelyezve az inverziók száma 0, míg a 13 – 15 – 14 állás esetén 1. Ha az egyik állásból a másikat szeretnénk kirakni, akkor páros számú sorváltást kell végrehajtanunk, hiszen az üres hely mindkét esetben a jobb alsó sarokban van. A páros sok sorváltás alkalmával az inverziók száma páros alkalommal változik páratlan számmal. Így összességében az inverziók száma csak páros számmal változhat. A kétféle kirakás viszont 1 inverzióval tér el egymástól, ezért nem lehet az egyik állapotból szabályos tologatásokkal a másik állapotba juttatni a kockákat.

6. Játék más felületeken

A Johnson-féle és a Schubert-féle bizonyítások érvényesek azokban az esetekben is, amikor a számozott kockák nem 4×4 -es, hanem tetszőleges $n \times k$ -s ($n, k \in \mathbb{N}$ és $n, k > 1$) elrendezésben vannak. (Ekkor értelemszerűen nem 15, hanem $n \cdot k - 1$ számozott fakockára van szükség a játékhoz.) A Johnson-féle bizonyítás alapján az is jól látszik, hogy ezeknél az $n \times k$ -s játékoknál is csak a lehetséges permutációk fele rakható ki egy-egy kezdőállapotból.

A továbbiakban n és k alatt mindig 1-nél nagyobb pozitív egész számot értek. Az n jelöli a játék sorainak, k az oszlopainak számát.

Képzeljük el, hogy hogyan nézne ki a tologatós játék, ha nem egy dobozba pakolnák a számozott kockákat, hanem egy hengerpalástra, Möbius-szalagra, tóruszra, Klein-kancsóra vagy éppen a projektív síkra. A továbbiakban azt fogom vizsgálni, hogy ha ezekre a felületekre tesszük rá a játékot, akkor mely esetekben lehet kirakni az összes lehetséges permutációt és melyekben nem.

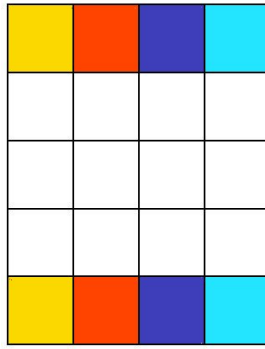
6.1. Játék hengeren

Valósítsunk meg egy tili-toli játékot a hengerfelületen is. Magyarországon az 1970-es években gyártottak már hengeren játszható tologatós játékot.

Vegyünk most is n sorba és k oszlopba rendezett számozott kockát. Ezeket a kockákat most ne egy doboz aljára pakoljuk, hanem egy henger palástjára. Az egyik kocka helyét hagyjuk szabadon azért, hogy a hagyományos tili-toli játékhoz hasonló módon tologatni tudjuk majd a kockákat. Amikor a kockákat a henger felületére rakjuk, az eddigi $n \times k$ -s elrendezésből k egymás mellé helyezett n hosszú kör keletkezik. Így már körbe-körbe is tudjuk tologatni a kockáinkat.

Olyan ez, mintha eggyel több soros játékot ragasztanánk össze a 4. ábra alapján úgy, hogy az azonos színű helyeket egymásra ragasztjuk.

Meg szeretnénk vizsgálni, hogy hogyan változik a hengeren a játék kirakhatósága. A téglalapon már jól tudjuk, hogy milyen tologatásokat tudunk elvégezni, és mi az, ami kirakható és mi nem. Ahhoz, hogy megvizsgálhassuk, hogy milyen tologatásokat végezhetünk el a hengeren, vágjuk el egy helyen a henger palástját. Az elvágott palástot a síkra kiterítve egy téglalapot kapunk. Ezen a kiterített téglalapon az eddig vizsgált téglalapok tologatásai mellett újakat is kapunk.



4. ábra. 4×4 -es játék a hengeren

Most már az ugyanabban az oszlopban található alsó és felső helyek között is tologathatjuk a kockákat. Ha például a felső sor egyik helyéből még feljebb akarunk lépni, akkor ezt most már megtehetjük, de ilyenkor bár ugyanabban az oszlopban maradunk, az alsó sorban kötünk ki. (A jól ismert 4×4 -es esetben, ha a kockák sorban vannak és az üres hely a jobb alsó sarokban van, akkor már nem csak a 12-es és 15-ös kockát tolhatjuk át az üres helyre, hanem a 4-est is.)

Azt szeretnénk megvizsgálni, hogy a hengeren már kirakható-e egy kezdőállapotból az összes lehetséges permutáció. A Johnson-féle bizonyítás alapján ehhez az kell, hogy az üres helyet páros, illetve páratlan számú lépéssel is vissza tudjuk juttatni az eredeti helyére. Mivel a permutáció paritása minden lépésben megváltozik, így páros számú lépéssel az eredetivel azonos paritású, míg páratlan számú lépéssel az eredetitől eltérő paritású permutációkat kaphatjuk meg.

A téglalapon csak páros számú lépéssel tudtuk visszajuttatni az üres helyet az eredeti helyére, ezért a kiindulási állapotból az állapotnak megfelelő permutációval megegyező paritású permutációkat a hengeren is elő tudjuk állítani.

Biztosak lehetünk benne, hogy ahhoz, hogy páratlan számú lépéssel vissza tudjuk juttatni az üres helyet a kiindulási helyére, használnunk kell legalább egy olyan lépést, ami a hagyományos játék esetében még nem volt megengedett. Amikor ilyen lépést használunk, az üres hely az alsó sor valamelyik oszlopából ugyanazon oszlop felső sorába kerül vagy fordítva.

Nézzük meg, hogy egy ilyen új szabályos lépést hány olyan lépéssel tudnánk helyettesíteni, ami már a téglalapon is megengedett volt. A helyettesítéshez legalább $n - 1$ lépésre van szükség, hiszen ennyi lépés mindenképpen kell ahhoz, hogy az alsó sorból a felsőbe vagy a felsőből az alsóba juttassuk az üres helyet.

Ha ennél több lépést használnánk fel az egyik helyről a másik helyre való eljutáshoz, akkor a szükséges lépések száma minden esetben páros számmal változna, mert ha nem csak olyan lépéseket tennénk, amivel közelebb jutunk az elérni kívánt helyhez, akkor amennyit ellépünk az egyik irányba, ugyanannyit vissza is kell majd lépünk a további lépésekkel. Nekünk most nem a lépések száma a fontos, hanem az, hogy ezen lépések száma páros vagy páratlan.

Ha n páros, akkor páratlan számú lépéssel cserélhető le minden új, a hengeren szabályossá vált lépés. Így páros n esetén továbbra sem lesz kirakható minden permutáció egy kezdőállásból, mert ha egy új lépést használunk, akkor azt páratlan számú olyan lépésre tudjuk lecserélni, amik már a téglalapon is megengedettek

voltak, ezért a megtett lépések számának paritása nem változik meg a cserével. Így az üres helyet továbbra is csak páros számú lépéssel tudjuk visszajuttatni a kiindulási helyére.

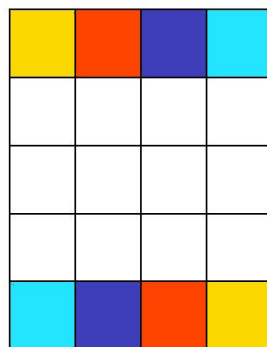
Páratlan n esetén az új, hengeren szabályossá vált lépések páros számú lépéssel cserélhetőek le. Így, ha a játék során használunk olyan lépést, ami a téglalapon még nem volt megengedett, akkor már páratlan számú lépésben is vissza fogjuk tudni juttatni az üres helyet a kiindulási helyére.

Tehát ha $n \times k$ -s elrendezésből készítettük hengeren játszható tologatós játékot úgy, hogy n hosszúságú körök keletkeztek, akkor páratlan n esetén egy-egy kezdőállásból az összes lehetséges permutáció kirakható lesz, míg páros n esetén csak azok fele.

6.2. Játék Möbius-szalagon

A kockákat most ne egy doboz aljára és ne egy henger felületére pakoljuk, hanem egy Möbius-szalagra. Ha veszünk egy papírcsíkot és annak a két végét úgy ragasztjuk össze, hogy közben az egyik végén csavarunk egyet (180° -ot), akkor Möbius-szalagot kapunk. Ez egy olyan térbeli alakzat, aminek egyetlen oldala van.

A Möbius-szalagon játszható tologatós játék elkészítéséhez vegyünk a kockák n soros és k oszlopos elrendezését. Papírszalag helyett ebből a téglalap alakú elrendezésből kell Möbius-szalagot csinálnunk. Fogjuk meg a téglalap (vagyis a téglalap alakú elrendezés) két k hosszúságú oldalát és formázzunk hengert a téglalapból. Mielőtt így „összeragasztanánk” a téglalapot, az egyik oldalt fordítsuk meg, és úgy ragasszunk. (A 5. ábra alapján az azonos színeket kell egymáshoz ragasztani.) Így a tologatások során néha a kockák számozott felét, néha pedig a hátulját fogjuk látni. Ahhoz, hogy a Möbius-szalagon tologatni tudjuk a kockákat, most is szükségünk lesz egy üres helyre a szalagon. Ebben az elrendezésben ennek egy tényleges lyuk felel meg a szalagon.



5. ábra. 4×4 -es játék Möbius-szalagon

A téglalapra kiterített Möbius-szalagon a szabályos lépések vizsgálatakor kiindulhatunk azokból a lépésekből, amiket a téglalapon korábban már megvizsgáltunk. A Möbius-szalag esetén elvégezhető lesz az összes olyan tologatás, ami a téglalapon elvégezhető volt. Ezekon kívül lesznek olyan tologatások, amik a

téglalapon és a hengeren nem voltak megengedettek, de itt a szabályos lépések közé sorolhatóak.

Most a felső sor egy elemét a hengerhez hasonlóan át tudjuk tolni az alsó sorba és vissza, de itt már oszlopot is váltunk az áttolás során. A felső sorban balról jobbra, az alsóban pedig jobbról balra számozzuk meg az oszlopokat. Amikor a Möbius-szalagon tologatunk, akkor a felső sor egy oszlopából úgy tolhatjuk át a kockát az alsó sorba, hogy az oszlop számát az alsó sorban már az alsó sor szerinti számozás alapján nézzük. (A 4×4 -es esetben, amikor a kockák sorban helyezkednek el és az üres hely a jobb alsó sarokban van, akkor már nem csak a 12-es és 15-ös kockát tolhatjuk át az üres helyre, hanem az 1-est is.)

Vizsgáljuk meg a Möbius-szalagos játék esetén is, hogy hogyan változik a játék kirakhatósága:

Ehhez azt nézzük meg, hogy az üres helyet vissza tudjuk-e juttatni páratlan lépésben a kiindulási helyére. Ha igen, akkor minden kezdőállásból a kockák összes lehetséges permutációja kirakható lesz. Abban biztosak lehetünk, hogy a keresett páratlan hosszúságú lépéssorozatban szerepelnie kell legalább egy olyan lépésnek, ami a téglalap alakú elrendezés esetén még nem számított szabályos lépésnek.

Ha az üres hely kezdetben a jobb alsó sarokban van, akkor a bal felső sarokban lévő elemet áttolhatjuk az üres helyre. Ez egy olyan lépés, amit a téglalap alakú elrendezés esetében nem hajthattunk volna végre, de a Möbius-szalagon már szabályos lépésnek számít. Így az üres hely a bal felső sarokba kerül.

A további lépéseknél arra kell törekednünk, hogy az üres helyet visszajuttassuk az eredeti helyére a jobb alsó sarokba. Ha ez páros sok lépésben sikerül, akkor találtunk olyan páratlan lépésből álló lépéssorozatot, ami az üres helyet visszajuttatja az eredeti helyére. Vagyis ebben az esetben egy kezdőállásból az összes lehetséges permutáció kirakható lesz.

Próbáljuk meg páros számú lépésben visszajuttatni az üres helyet úgy, hogy nem használunk többször olyan lépést, ami csak a Möbius-szalag esetében megengedett. Ehhez legalább $(sorok\ száma - 1) + (oszlopok\ száma - 1)$, vagyis $n + k - 2$ lépésre lesz szükségünk. Ennyi lépés elegendő abban az esetben, amikor minden lépésben úgy lépünk, hogy az üres hely közelebb kerül a jobb alsó sarokhoz. Ez azt jelenti, hogy az üres hely minden lépéssel eggyel lejjebb vagy eggyel jobbra kerül.

Ha n és k is páros vagy mindkettő páratlan, akkor $n + k - 2$ is páros lesz. Ezért ebben az esetben eljuttatható páros számú lépéssel az üres hely a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba. Eszerint ezekben az esetekben kirakható lesz egy állásból az összes többi permutáció, mert az üres helyet összesen páratlan számú lépéssel sikerül visszajuttatnunk az eredeti helyére.

Ha n vagy k egyike páratlan, a másik pedig páros, akkor $n + k - 2$ páratlan lesz. Így másképp kell páratlan hosszúságú lépéssorozatot keresnünk. Ha csak olyan lépéseket használunk, amik már a téglalapon is megengedettek voltak, akkor nem fogunk olyan páratlan lépésből álló lépéssorozatot találni, ami az üres helyet visszajuttatja a kiindulási helyére. Ugyanis ha az első lépés után nem csak a jobb alsó sarokhoz közeledő lépéseket használnánk, akkor minden távolodó lépés miatt egy-egy újabb közeledő lépésre lenne szükségünk. Így a jobb alsó sarokba

jutáshoz szükséges lépések számának paritása változatlan maradna.

Mi történik akkor, ha további olyan lépéseket használunk, amik csak a Möbius-szalagon váltak megengedetté? Vizsgáljuk meg itt is, hogy egy ilyen új lépést hány olyan lépésre tudunk lecserélni, amik már a téglalapon is megengedettek voltak. Az első sor első helye és azt utolsó sor utolsó helye közötti Möbius-szalagon szabályosnak számító lépést $n + k - 2$ olyan lépésre tudjuk lecserélni, ami már a téglalapon is megengedett volt, mert legalább ennyi lépésre van szükség ahhoz, hogy az üres helyet az egyik helyről a másik helyre juttathassuk, ha csak olyan lépéseket használunk, amik már a téglalapon is megengedettek voltak. Az előbb már azt is megállapítottuk, hogy ha ennél több lépést használunk fel a két kocka kicseréléséhez, akkor a lépések számának paritása változatlan marad.

Megállapítható az is, hogy ha nem a két szélső hely közötti lépést szeretnénk lecserélni olyan lépésekre, amik már a téglalapon is szabályosak voltak, hanem a felső sor i . oszlopa és az alsó sor $(k - i + 1)$. oszlopa közötti lépést szeretnénk lecserélni, akkor az ehhez szükséges lépések számának paritása $n - k - 2$ -vel megegyező paritású lesz. A téglalapon szabályosnak számító lépésekkel ugyanis a felső sor i . és az alsó sor $(k - i + 1)$. helye közötti cserét $(n - 1) + (k - i + 1 - i) = n + k - 2 \cdot i$ lépéssel tudjuk lecserélni.

Tehát, ha n és k különböző paritású, akkor minden olyan lépést, ami a Möbius-szalagon vált megengedetté páratlan számú olyan lépésre tudunk lecserélni, ami már a téglalapon is megengedett volt. Így bármelyik és bármennyi új szabályos lépést használunk is fel, az üres helyet ezekben az esetekben továbbra is csak páros számú lépéssel fogjuk tudni visszajuttatni a kiindulási helyére.

Ezek alapján a Möbius-szalagon játszható játékunk esetén akkor rakható ki egy kezdőállásból az összes lehetséges permutáció, ha n és k is páros vagy, ha mindkettő páratlan. Egyébként pedig csak a lehetséges permutációk fele lesz kirakható egy kezdőállásból.

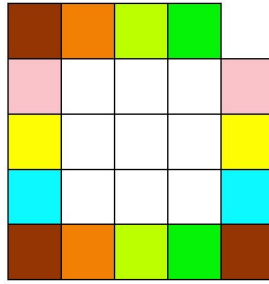
6.3. Játék tóruszon

A hengeren és a Möbius-szalagon elképzelt tologatós játék után nézzük meg, hogy hogyan játszhatunk tóruszon. Tóruszt úgy hozhatunk létre, hogy egy henger két végét illesztjük egymáshoz. (A hagyományos úszógumi vagy a fánk jó példa tóruszra.)

Vegyük megint a számozott kockák egy n soros és k oszlopos elrendezését. Az elrendezésben ennél a játéknál is hagyjunk üresen egy helyet, hogy majd tologatni tudjuk a kockákat. Formázzunk az $n \times k$ -s elrendezésből hengert úgy, ahogyan azt a hengeres játéknál is tettük. Így k db egymás mellé helyezett n hosszú kört kapunk. Ezután a hengert alakítsuk tóruszá. Ekkor egy k hosszú kör mentén fog elhelyezkedni a k db n hosszú kör. Ezzel el is készült a játékunk a tórusz mentén. A tologatást lehetővé tevő üres helyet természetesen most sem szabad elfelejtenünk.

A 6. ábra alapján az azonos színű mezők összeragasztásával elkészíthető a 4×4 -es játék tóruszon megvalósított változata.

A tóruszon játszható játék esetében a téglalapon és a hengeren szabályosnak számító lépések mellett újabb lépésekkel bővült a szabályos lépések listája. Ha a



6. ábra. 4×4 -es játék tóruszon

hagyományos 4×4 -es játékot nézzük, ahol a kockák sorban vannak és az üres hely a jobb alsó sarokban van, akkor most már nem csak 12-es, 15-ös és 4-es számú kockákat tolhatjuk át az üres helyre, hanem a 13-ast is.

Nézzük meg a tóruszon is, hogy hogyan változik a játék kirakhatósága. Ehhez most is érdemes „kiterítenünk” az elrendezést. Vágjuk el egy helyen az „úszógumit”, majd a hengerenél alkalmazott módon vágjuk el egy helyen az így kapott hengerpalástot. Így ismét egy n soros és k oszlopos téglalapot kapunk. Ezen a téglalapon fogjuk megvizsgálni, hogy vissza tudjuk-e juttatni az üres helyet páratlan számú lépésben az eredeti helyére.

A henger esetében már láttuk, hogy ha n páratlan, akkor egy kezdőállásból az összes lehetséges permutáció kirakható lesz. Ez itt sem lesz másképp, mert tóruszon minden olyan lépés megengedett, ami a hengeren megengedett volt. Az ottani szabályos lépések mellé csak újakat nyilvánítottunk szabályossá, de egyikre sem mondtuk azt, hogy mostantól nem számít szabályos lépésnek.

A másik két esetben viszont, ha páratlan számú lépéssel szeretnénk az üres helyet az eredeti helyére visszajuttatni, akkor biztosan használnunk kell legalább egy olyan lépést, ami a hengeres játék esetében még nem volt megengedett. Azt tudjuk, hogy ezekben az esetekben csak a hengeren szabályosnak számító lépéseket használva csak páros számú lépéssel juttathatjuk vissza az üres helyet a kiindulási helyére.

Nézzük meg, hogy az új szabályos lépéseket hány olyan lépéssel tudjuk lecserélni, ami már a hengeren is szabályos volt. Egy ilyen új lépés az egyik sor elején lévő üres helyet a sor végre vagy a sor végétől az elejére juttatja. Ha ezt a cserét a korábbi szabályos lépésekkel szeretnénk végrehajtani, akkor ehhez legalább $k - 1$ lépésre van szükség. Ugyanis legalább ennyi lépésre van szükség ahhoz, hogy az üres helyet a sor elejétől a végre vagy a végétől az elejére juttassuk.

A lépések számának paritása akkor is változatlan marad, ha ennél több lépéssel szeretnénk eljuttatni az üres helyet a sor egyik végétől a másikra, mivel ha nem csak olyan lépéseket használunk fel, amik közelebb juttatják az üres helyet az elérni kívánt helyhez, akkor amennyi távolodó lépést teszünk, ugyanannyit vissza is kell majd lépünk.

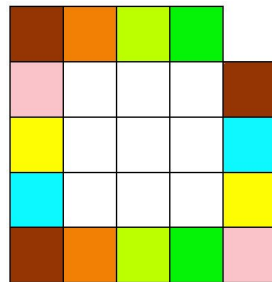
Ha k páratlan, akkor minden új szabályos lépést páros számú olyan lépéssel tudunk lecserélni, ami már a hengeren is megengedett volt, mert ebben az esetben a $k - 1$ páros lesz. Így ha a játék során használunk olyan lépést, ami a tóruszon vált megengedetté, akkor már páratlan számú lépéssel is vissza tudjuk juttatni az üres helyet a kiindulási helyére.

Páros k esetén minden szabályos lépést páratlan számú olyan lépéssel tudunk lecserélni, ami már a hengeren is megengedett volt, mivel ekkor $k - 1$ páratlan. Így hiába használhatjuk az új lépéseket, az üres helyet továbbra is csak páros számú lépéssel juttathatjuk vissza a kiindulási helyére.

A tóruszon játszható tologatós játék esetén csak akkor nem tudjuk egy kezdőállásból a számozott kockák minden lehetséges permutációját kirakni, ha n és k is páros, míg a többi esetben az összes lehetséges permutáció kirakható minden állásból.

6.4. Játék Klein-kancsón

Valósítsunk meg tologatós játékot Klein-kancsón is. Kiindulásképp vegyük itt is a számozott fakockák n soros és k oszlopos elrendezését. Ne felejtünk el most is egy üres helyet hagyni az elrendezésben, hogy később majd tologatni tudjuk a kockákat. Ebből az $n \times k$ -s elrendezésből pedig formázzunk Klein-kancsót. Ehhez első lépésben készítsünk belőle egy hengert a hengeres játéknál leírtak alapján, majd a hengerből készítsünk egy Möbius-szalagot. A 7. ábrán látható színezés alapján kell az azonos színű mezőket egymáshoz ragasztanunk ahhoz, hogy megkapjuk a Klein-kancsón játszható tologatós játékunkat.



7. ábra. 4×4 -es játék Klein-kancsón

Így a Klein-kancsón megengedett lesz minden olyan lépés, ami a hengeren megengedett volt, és új lépések is kerülnek a szabályos lépések közé. A 4×4 -es elrendezésből készített Klein-kancsón játszható játéknál, ha a kockák sorban vannak, az üres hely pedig a jobb alsó sarokban helyezkedik el, akkor már nem csak a 12-es, 15-ös és 4-es számú kockák cserélhetők meg első lépésként az üres hellyel, hanem az 1-es is.

Most is terítsük ki az elrendezésünket, hogy könnyebb legyen beszélni róla. Vágjuk el a Klein-kancsót úgy, hogy hengerpalást legyen belőle, majd a palástot is vágjuk szét. Így egy n soros és k oszlopos téglalapot kapunk.

Vizsgáljuk meg, hogy Klein-kancsó esetén hogyan változik a játék kirakhatósága:

Ahogy már említettem, Klein-kancsón megengedett lesz minden olyan lépés, ami a hengeren már megengedett volt, hiszen a játék előállításakor is a hengerből formáztuk a Klein-kancsót. A hengeren páratlan n esetén egy kezdőállásból minden lehetséges permutáció kirakható volt. Ebből adódóan ez páratlan n esetén Klein-kancsón is így lesz.

Elemezzük a másik két esetet is, amikor n páros. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy visszajuttatható-e az üres hely páratlan számú lépéssel az eredeti helyére. Abban biztosak lehetünk, hogy a keresett lépéssorozatban legalább egy olyan lépésnek lennie kell, ami a hengeren még nem volt megengedett, mert ezeknél az eseteknél hengeren csak páros lépésben tudtuk visszajuttatni az üres helyet az eredeti helyére.

Az új szabályos lépések ugyanúgy keletkeztek, ahogyan az a Möbius-szalag esetében történt. Mindössze annyi a különbség, hogy most nem a k , hanem az n hosszúságú oldalak mentén készítettünk Möbius-szalagot a téglalap alakú elrendezésből. Így a Möbius-szalagnál leírtak alapján az új lépések mindegyike lecserélhető $k + n - 2$ olyan lépéssel, amik már a téglalapon is megengedettek voltak. (Lecserélhetnénk ezeket az új lépéseket több lépéssel is, de a lépések számának paritása mindenképp az $n + k - 2$ paritásával megegyező lenne, számunkra pedig most csak ez a fontos.)

Ha n és k is páros, akkor $n + k - 2$ páros, vagyis minden új szabályos lépés páros számú olyan lépéssel cserélhető le, ami már a téglalapon is megengedett volt. Így a Klein-kancsón játszható játéknál páros n és k esetén az üres hely visszajuttatható lesz páratlan számú lépéssel is az eredeti helyére, mivel páros számú már a téglalapon is szabályosnak számító lépést fogunk tudni a lecserélésnek köszönhetően egyetlen új lépéssel helyettesíteni.

Ha n páros és k páratlan, akkor $n + k - 2$ is páratlan lesz. Így minden új lépés páratlan számú olyan lépéssel cserélhető le, ami már a téglalapon is megengedett volt, ezért ebben az esetben továbbra is csak páros számú lépésben fogjuk tudni visszajuttatni az üres helyet a kiindulási helyére.

A leírtakból adódik, hogy a Klein-kancsón elképzelt tologatós játék esetén csak akkor nem rakható ki egy kezdőállásból az összes lehetséges permutáció, ha n páros, k pedig páratlan. A másik három esetben minden állásból kirakható a kockák összes lehetséges permutációja.

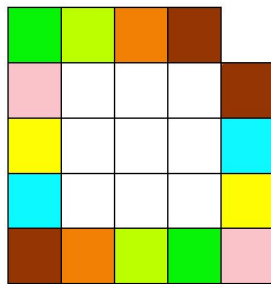
6.5. Játék a projektív síkon

Nézzük meg, hogy hogyan nézne ki a tologatós játékunk, ha a projektív síkon valósítanánk meg. Induljunk ki most is a számozott fakockák egy n soros és k oszlopos elrendezéséből. Az előzőekhez hasonlóan, most sem szabad elfelejtenünk, hogy a játékhoz szükségünk lesz egy üres helyre is, ezért az elrendezésben egy helyet szabadon kell hagynunk. Az $n \times k$ -s téglalap alakú elrendezésből úgy kaphatunk a projektív téren játszható tologatós játékot, ha az n és k hosszúságú oldalpárok mentén egyszerre formázunk Möbius-szalagot.

Ha a 8. ábra szerint ragasztjuk egymáshoz az azonos színű helyeket, akkor megkapjuk a projektív síkon játszható játékunkat.

Ha a 4×4 -es játékot valósítjuk meg a projektív síkon, és a kockák sorban vannak, az üres hely pedig a jobb alsó sarokban található, akkor az üres hely az 1-es, 12-es és 15-ös helyek egyikével cserélhető meg.

A projektív síkon minden olyan lépés szabályos, ami a Möbius-szalagon megengedett volt. Azonos paritású n és k esetén a Möbius-szalagon már beláttuk, hogy egy-egy állásból az összes lehetséges permutáció kirakható. Ez itt sem lesz



8. ábra. 4×4 -es játék a projektív síkon

másképp.

Meg kell vizsgálnunk, hogy mi a helyzet akkor, ha n és k különböző paritású. Ezekben az esetekben a Möbius-szalagon csak a lehetséges permutációk fele volt kirakható egy-egy állásból. Az a kérdés, hogy változtat-e ezen valamit az, hogy a másik irányból is Möbius-szalagot formáztunk a téglalap alakú elrendezésből? Találunk-e így olyan páratlan lépésből álló lépéssorozatot, ami az üres helyet a kiindulási helyére juttatja vissza?

Azok a lépések, amik a projektív síkon szabályosak, a téglalapon pedig még nem voltak azok, különböző helyek közötti cseréket tesznek lehetővé. Így az összes ilyen lépés független a többitől.

Egy Möbius-szalagon végrehajtható lépés kiváltható $n + k$ -val megegyező paritású olyan lépéssel, ami már a téglalapon is végrehajtható volt, ez különböző paritású n és k esetén páratlan lépést jelent. Így a projektív sík összes olyan lépése, ami a téglalapon még nem volt megengedett kiváltható páratlan számú olyan lépéssel, ami már a téglalapon is megengedett volt, hiszen a projektív síkon úgy keletkeztek az új szabályos lépések, ahogyan az a Möbius-szalag esetében történt.

Azt is tudjuk, hogy a téglalapon játszható játékoknál nem tudtunk olyan n -t és k -t megadni, amik esetében egy állásból az összes lehetséges permutáció kirakható lett volna. Így különböző paritású n és k esetén a projektív síkon sem fogjuk tudni az üres helyet páratlan lépéssel visszajuttatni a kiindulási helyére, mivel az új szabályos lépéseket csak páratlan számú olyan lépésre tudunk lecserélni, ami már eddig is szabályos volt. Így bármennyiszer is használunk a lépéssorozatunkban új szabályos lépéseket, a lépéssorozat hosszának paritásán nem fogunk tudni változtatni.

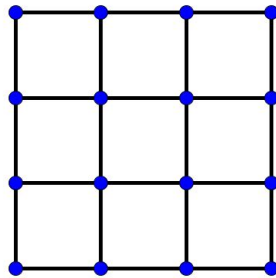
A projektív síkon tehát csak akkor lesz egy állásból kirakható az összes lehetséges permutáció, ha n és k paritása megegyezik. Egyébként csak a lehetséges permutációk fele lesz kirakható minden állásból.

7. További lehetlenség bizonyításokról

Johnson és Schubert mellett sok más matematikus is foglalkozott a $13 - 15 - 14$ -es állás lehetlenségének bizonyításával. Legtöbben Johnson bizonyításához hasonlóan a páros és páratlan permutációk felől közelítették meg a problémát. 1974-ben R. M. Wilson adott egy ettől eltérő, gráfes megoldást a „*Journal of*

Combinatorial Theory” című folyóiratban.

A 15-ös játék szabályos lépéseit egy gráf segítségével ábrázolta. A gráf csúcsainak a játék dobozának 16 helye felel meg. Él pedig akkor van két csúcs között a gráfban, ha az egyik helyről át lehet tolni a kockát egy lépéssel a másik helyre. Erre gondolhatunk úgy is, hogy a dobozban szomszédos helyeknek megfelelő csúcsok között van él a gráfban. (9. ábra)

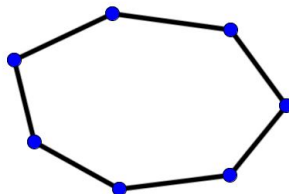


9. ábra. 15-ös játékhoz tartozó gráf

Wilson bizonyításának segítségével két kivétellel minden hasonló jellegű tologatós játékról eldönthető, hogy egy-egy állásból kirakható-e minden lehetséges permutáció vagy csupán azok fele.

Ennek eldöntéséhez, a 15-ös játékhoz hasonlóan készítsük el az n számozott fakockából álló játékhoz tartozó $n + 1$ csúcsú gráfot. A csúcsok legyenek most is a kockák helyei, él pedig akkor legyen két csúcs között, ha az egyik helyről egy szabályos lépéssel eltolhatjuk a kockát a másik helyre. Ha az így kapott gráf tartalmaz páratlan hosszú kört, akkor az összes permutáció előállítható minden állapotból, egyébként pedig csak a permutációk fele.

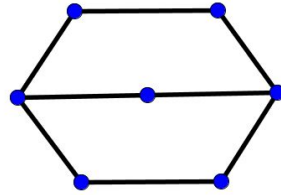
Az első kivételt ez alól a szabály alól az olyan gráfok jelentik, amik csupán egy $n + 1$ csúcsú páratlan hosszú körből állnak (pl.: 10. ábra). Ebben az esetben az n kocka $(n + 1)$ féle módon helyezhető el, de ezek között csak $(n - 1)!$ olyan van, amelyek nem ekvivalensek egymással. Egy adott állásból pedig csak a vele ekvivalensek rakhatóak ki. Ilyen kirakásból minden állás esetén $n(n + 1)$ van.



10. ábra. Első fajta kivétel

A másik fajta kivétel az, amikor a 7 csúcsú gráfban 6 csúcs egy körön helyezkedik el, egy pedig a 11. ábrán látható módon a kör két szemközti csúcsához kapcsolódik egy-egy éllel. Ebben az esetben a középső helyen 7-féle elem állhat (a 6 fakocka egyike vagy az üres hely), a külső körön pedig a maradék 6 elemnek

$5!$ -féle nem ekvivalens elrendezése van. A $7 \cdot 5! = 840$ permutáció között pedig csak 6 olyan van, amelyek nem ekvivalensek egymással.



11. ábra. A második kivétel

8. Játékok más felületeken

A továbbiakban a korábban a Johnson és Schubert-féle bizonyításokkal már megvizsgált, különböző felületeken elképzelt játékok boncolgatását fogjuk végezni a Wilson-féle gráfos bizonyítással.

Ehhez szükségünk van egy gyorsan és jól alkalmazható módszerre, mellyel eldönthetjük, hogy egy gráf tartalmaz-e páratlan számú csúcson átmenő kört vagy sem.

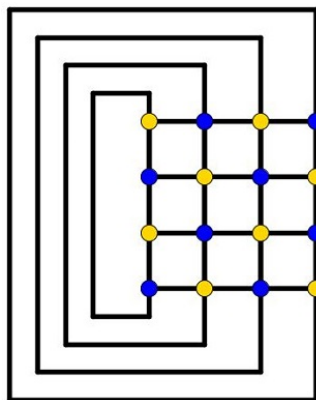
Egy ilyen jól használható módszer például a következő: Kezdjük el kiszínezni egy gráf csúcsait két színnel. Legyen ez a két szín például a kék és a sárga. Színezzük az első csúcsot mondjuk kékre, majd az összes szomszédját sárgára. Azok szomszédjait pedig ismét kékre. Ha a színezés során keletkezik két olyan szomszédos csúcs, amiket azonos színnel színeztünk ki, akkor a gráfban van páratlan számú csúcson átmenő kör. De ha sikerül az összes csúcsot kiszíneznünk a két színnel úgy, hogy minden szomszédos csúcs más színű lesz, akkor a gráf csak páros számú csúcson átmenő köröket tartalmaz. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a gráf páros és kromatikus száma $\chi = 2$.

8.1. Játék hengeren

Úgy képeltük el a tologatós játékot a hengerfelületen, hogy az n soros és k oszlopos téglalap alakú elrendezést pakoljuk egy henger felületére. Így egymás mellett k db n hosszú kör keletkezik, amik mentén tologatni fogunk tudni.

A 4×4 -es elrendezésből készített hengeres játék gráfjának lerajzolásakor kiindulhatunk a 15-ös játék gráfjából, mert az összes lépés, ami a 15-ös játékban szabályos volt, hengeren is megengedett lesz. A gráfban ezeken az eddigi szabályos lépéseket jelölő éleken kívül be kell húznunk azokat az éleket is, amik azokat a lépéseket jelölik, amik a hengeren váltak megengedetté.

Ezek az új élek a felső sorban lévő helyeket és az ugyanabban az oszlopban lévő alsó sorbeli helyeket kötik össze. Hiszen a felső sorban lévő elemet most már áttolhatjuk az alsó sorba úgy, hogy ugyanabban az oszlopban maradunk. Ha az eddigi élek mellett ezeket az éleket is berajzoljuk a 15-ös játék gráfjába, akkor a 12. ábrán látható gráfot kapjuk.



12. ábra. Hengeren játszható 4×4 -es játék gráfja

A gráf csúcsai az ábrán látható módon kiszínezhetők két színnel úgy, hogy minden szomszédos csúcs különböző színű, ezért a gráfban nincs páratlan hosszúságú kör. Így ebben a módosított játékban is csak a lehetséges permutációk fele rakható ki egy-egy összekeverésből.

A konkrét példa után vizsgáljuk meg általánosan is a hengeren elképzelt tologatós játékot.

Tekintsük azt az esetet, amikor az n – ami a sorok számát jelölte az eredeti téglalap alakú elrendezésben – páros. Azt tudjuk, hogy eredetileg az $n \times k$ -s téglalap alakú elrendezésben csak páros hosszúságú körök voltak. Ha a kockákat a hengerfelületre pakoljuk, akkor új körök keletkeznek, amik n hosszúak. Mivel n páros, így ezek páros hosszúságú körök lesznek.

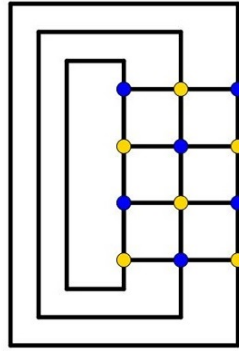
Annak belátásához, hogy nem keletkezett ezeken a körökön kívül olyan kör, ami páratlan hosszú, színezzük ki a csúcsokat két színnel. Kezdjük a bal felső sarokban kék színnel. Ekkor a bal alsó sarokban sárga színű csúcsnak kell majd lennie. Mivel a csúcsokat felváltva színezzük a két színnel, ezért a páratlan sorszámu sorok ebben az első oszlopban mindig kékek, a páros sorszámuak pedig mindig sárgák. Így a bal alsó sarkot jelölő csúcs is sárga színű lesz. Ezt is szeretnénk volna. Oszloponként tehát jó a színezés. Soronként pedig továbbra sem lesz gond a színezéssel, mert minden sorban felváltva színezhettük a csúcsokat a két színnel.

Tehát abban az esetben, amikor n páros, akkor továbbra is csak a lehetséges permutációk fele rakható ki egy-egy kezdőállásból páros és páratlan k esetén is (13. ábra).

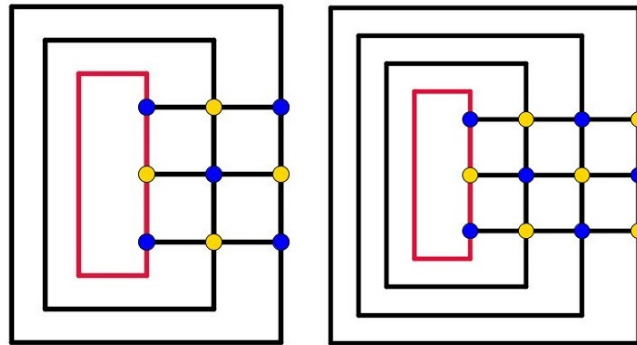
Páratlan n esetén a keletkező n hosszúságú körök páratlan számú csúcson mennek át. Így páros és páratlan k esetén is lesz páratlan hosszú kör a hengeren játszható tologatós játék gráfjában (14. ábra), vagyis egy kezdőállásból az összes lehetséges permutáció kirakható lesz páratlan n esetén.

8.2. Játék Möbius-szalagon

Möbius-szalagon úgy alkottuk meg a saját tologatós játékunkat, hogy az $n \times k$ -s téglalap alakú elrendezésre úgy tekintettünk, mintha az lenne a papírcsík, amiből Möbius-szalagot szeretnénk formázni. Az elrendezés k hosszúságú oldalait



13. ábra. Hengeres játék gráfja páros n esetén



14. ábra. Hengeres játék gráfja páratlan n és páratlan, illetve páros k esetén

ragasztottuk egymáshoz úgy, hogy ragasztás előtt az egyik oldalon csavartunk 180° -ot.

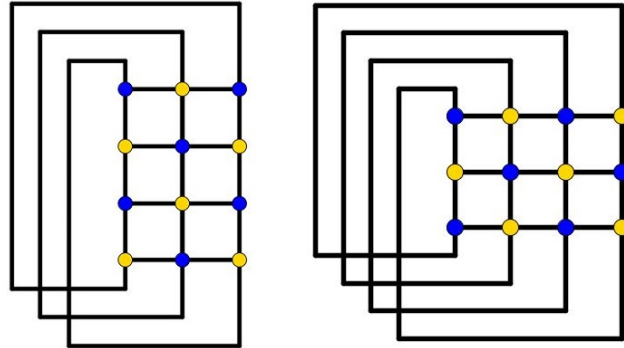
Az így keletkező tologatós játék gráfjának felrajzolásakor kiindulhatunk a 15-ös játék gráfjából. Azok a lépések, amelyek annál a játéknál szabályosak voltak, most is azok lesznek. Ezeken kívül a gráfban be kell húznunk azokat az éleket is, amik a Möbius-szalagon keletkező új szabályos lépéseket jelölik. Ezek az élek a felső és az alsó sor helyeinek megfelelő csúcsokat kötik össze. Számozzuk a felső sort balról, az alsót pedig jobbról, így az azonos sorszámú csúcsok közötti élek jelölik a Möbius-szalagon keletkezett új szabályos lépéseket.

Ahhoz, hogy megállapíthassuk, hogy keletkezett-e páratlan hosszúságú kör, színezzük ki a gráf csúcsait két színnel (késsel és sárgával). Ha sikerül úgy kiszíneznünk a csúcsokat, hogy minden szomszédos csúcs különböző színű, akkor a gráfban csak páros hosszúságú körök vannak. Az egy sorban lévő csúcsok felváltva kapnak kék, illetve sárga színt. A páratlan sorszámú sorokban a színezés késsel kezdődik, a páratlanokban pedig sárgával.

Páratlan k esetén soronként az utolsó csúcs színe megegyezik az adott sor első csúcsának színével, páros k esetén pedig a sorok két szélén lévő csúcsok különböző színt kapnak. Ha n páratlan, akkor az első és az utolsó sor színezése megegyezik, páros n esetén pedig az első és az utolsó sor azonos oszlopban lévő csúcsai különböző színűek lesznek.

Ezek alapján, ha n páros és k páratlan, akkor a felső és az alsó sor színezése különböző lesz, így azok a csúcsok, amik között a Möbius-szalagon megengedett

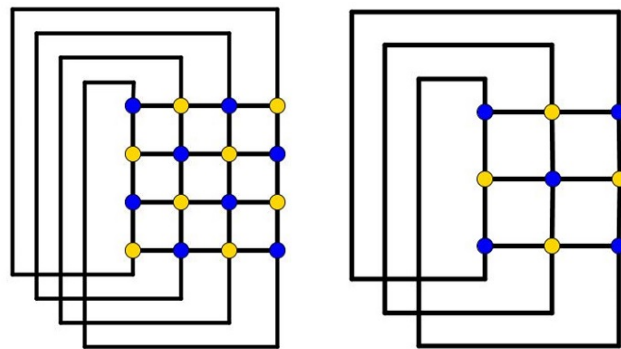
vált lépések miatt keletkezett él, különböző színűek lesznek (15. ábra bal oldal). Hiszen az első sor első csúcsa és az utolsó sor utolsó csúcsa különböző színű, így a többi, egymással összekötött csúcs színe is mind különböző lesz.



15. ábra. Möbius-szalagos játék gráfja különböző paritású n és k esetén

Ha n páratlan és k páros, akkor az alsó és a felső sor színezése ugyan megegyezik, de az első sor első csúcsának és az utolsó sor utolsó csúcsának színezése eltérő lesz. Ebből adódik, hogy a Möbius-szalagon szabályossá vált lépéseket jelölő élek mindig különböző színű csúcsokat kötnek össze egymással, ugyanis soronként felváltva színeztük a csúcsokat és az említett élen kívüli új élek mindig az adott sorban soron következő (a felső sorban jobbra haladva, az alsóban balra) egy-egy csúcsot köti össze. (15. ábra jobb oldal)

Ha n és k is páros, akkor az alsó és a felső sor színezése nem fog megegyezni, de ebben az esetben a bal felső és jobb alsó sarokban lévő csúcsok színe megegyező lesz. Így két színnel nem tudjuk jól kiszínezni a csúcsokat. (16. ábra bal oldal)



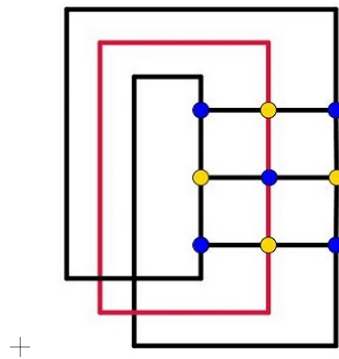
16. ábra. Möbius-szalagos játék gráfja azonos paritású n és k esetén

Ha pedig n és k is páratlan, akkor az első és utolsó sorok színezése megegyező lesz, de ebben az esetben is azonos színű az első sor első, illetve az utolsó sor utolsó csúcsa. Ebből adódik, hogy itt sem színezhettük ki jól két színnel a csúcsokat. (16. ábra jobb oldal)

Tehát, ha n és k paritása megegyezik, akkor a gráfban van páratlan kör, vagyis kirakható lesz egy-egy állásból az összes lehetséges permutáció. Ellenkező esetben viszont csak páros hosszúságú körök lesznek a Möbius-szalagon megvalósított

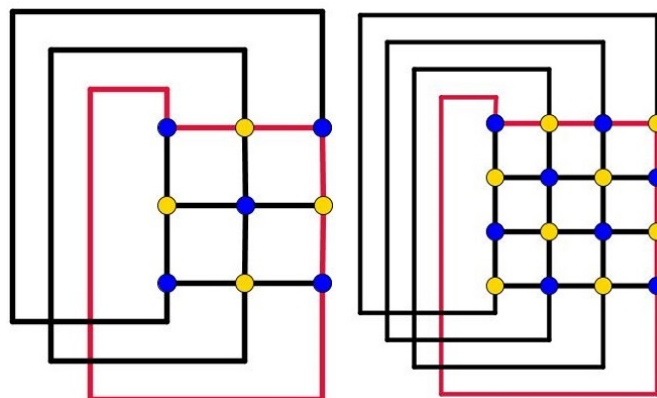
Most, hogy tudjuk, hogy melyik gráfokban kell lennie páratlan számú csúcson átmenő körnek, keressük meg, hogy ezek hol keletkeztek.

Páros k esetén $\frac{k}{2}$ db $2n$ hosszúságú, páratlan k esetén pedig egy n hosszúságú és $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ db $2n$ hosszúságú új kör keletkezett a Möbius-szalag oldala mentén. Ezek között csak akkor van páratlan hosszúságú, ha n és k is páratlan (17. ábra), így ez még nem ad magyarázatot arra, hogy páros n és k esetén miért keletkezett páratlan hosszú kör a gráfban.



17. ábra. Páratlan n és k esetén keletkező páratlan hosszú kör

Keressünk további, a 15-ös játékban még nem létező köröket úgy, hogy az új élek közül csak egyet használunk fel a körben. Legyen ez most a bal felső és a jobb alsó csúcs közötti szabályos lépést jelölő él. Ezután olyan lépéseket kell végrehajtanunk, amik már a 15-ös játékban is szabályos lépéseknek számítottak és a bal felső és jobb alsó csúcsokat kötik össze. Végigmehetünk például az első soron és az utolsó oszlopon. Így egy $n + k - 1$ hosszúságú kört kapunk. Ha n és k paritása megegyezik, akkor ez páratlan hosszú kör lesz. Ezzel mindkét esetben, ahol van a gráfban páratlan hosszúságú kör, megtaláltuk azt. (18. ábra)

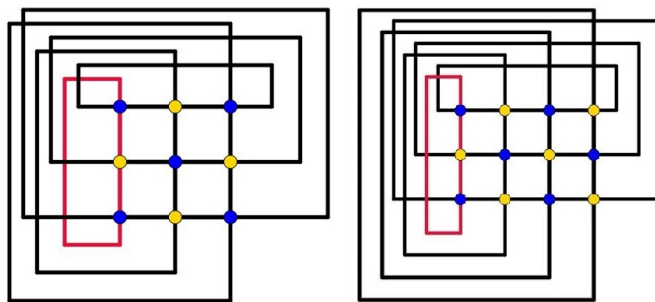


18. ábra. Möbius-szalagon azonos paritású n és k esetén keletkező páratlan hosszú körök

8.3. Játék tóruszon

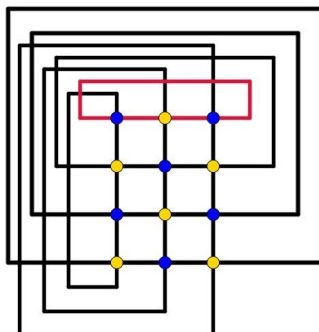
Tóruszon úgy képzeltük el a tologatós játékot, hogy az $n \times k$ -s téglalap alakú elrendezésből hengert formáltunk a k és az n hosszúságú oldalak mentén is. Így egy k hosszúságú kör mentén elhelyezkedő k db n hosszú kört kaptunk. A hengeres játék esetében a k hosszú oldalak mentén készítettük el a hengert. Ezért a tóruszon játszható tologatós játék gráfjának felrajzolásakor kiindulhatunk a hengeren játszható játék gráfjából, hiszen csak azt kell majd kiegészítenünk n db éllel. (Ennyi új szabályos lépés keletkezett a hengernél már meglévők mellé.) Ezek az új élek minden sorban az első és az utolsó helyet jelölő csúcsokat kötik össze egymással.

Mivel bizonyos esetekben már a hengernél is találtunk páratlan hosszúságú kört a gráfban, így ezeknél biztosan most is találni fogunk ilyeneket, mert a hengeres játékok gráfjai részgráfjai lesznek az azonos n és k választással készített tóruszon játszható tologatós játék gráfjának. Hengeren páratlan n esetén találtunk páratlan hosszú kört a gráfban, így páratlan n és tetszőleges k választása mellett tóruszon is lesz ilyen kör a gráfban. (19. ábra)



19. ábra. Játék tóruszon páratlan n esetén

A tórusz létrehozásakor a henger k db egymás melletti n hosszú körét „fel-fűztük” egy k hosszúságú körre. Páratlan k esetén ez egy páratlan hosszúságú kört jelent, vagyis ebben az esetben is találunk páratlan hosszúságú kört a játék gráfjában. (20. ábra)

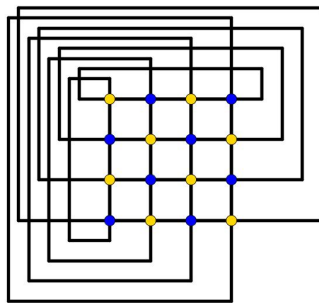


20. ábra. Játék tóruszon páros n és páratlan k esetén

Páros n és k esetén csak páros hosszúságú új körök keletkeztek a tóruszon. Annak igazolásához, hogy közben tényleg nem keletkezett sehol a gráfban pá-

ratlan hosszú kör, színezzük ki a csúcsokat két színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. Azt kell megnéznünk, hogy ha a két színnel felváltva színezzük a csúcsokat soronként és oszloponként is, akkor minden sorban az első és az utolsó csúcs, valamint minden oszlopban a felső és az alsó csúcs különböző színű-e. Ha igen, akkor a gráf jól kiszínezhető két színnel, vagyis nincs benne páratlan hosszúságú kör.

Soronként felváltva kell színeznünk a csúcsokat, mert az egymás mellett lévő csúcsok között mindig van él. Így páros k esetén minden sorban különböző színű lesz az első és az utolsó csúcs. Oszloponként is felváltva kell kiszíneznünk a csúcsokat, mert az oszlopban egymás alatt lévő csúcsok között is mindig van él. Mivel n is páros, ezért különböző színű lesz minden oszlopban a felső és az alsó csúcs. Tehát páros n és k esetén ki tudjuk színezni a tóruszos játék gráfját két színnel úgy, hogy minden szomszédos csúcspár különböző színű legyen. (21. ábra)



21. ábra. Játék tóruszon páros n és k esetén

A leírtak alapján tóruszon csak akkor rakható ki egy kezdőállásból az összes lehetséges permutáció, ha n és k közül legalább az egyik páratlan.

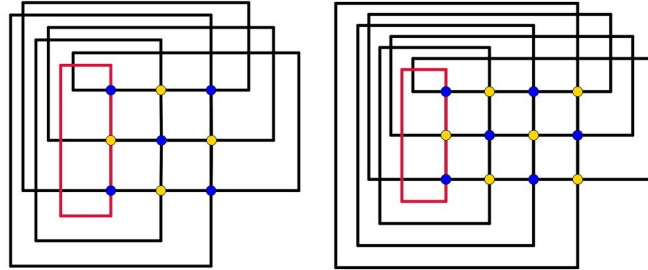
8.4. Játék Klein-kancsón

Klein-kancsón úgy valósítottuk meg a tologatós játékot, hogy az $n \times k$ -s elrendezésből a k hosszúságú oldalak mentén hengerpalástot készítettünk, majd a palástból csináltunk Möbius-szalagot.

A Klein-kancsón elképzelt tologatós játék gráfjának elkészítésekor kiindulhatunk a hengeres játék gráfjából. Az ugyanolyan n és k választással készített hengeres játék gráfja részgráfja a Klein-kancsón játszható játék gráfjának, mert a Klein-kancsón minden olyan lépés szabályos, ami a hengeren szabályos volt. A henger szabályos lépései mellett ennél a játéknál is vannak olyan lépések, amik most már szabályosak, de az eddigi játékok esetén még nem voltak azok. Ahhoz, hogy felrajzolhassuk a Klein-kancsós játék gráfját, ki kell egészítenünk a hengeres játék gráfját az ezeket a lépéseket jelölő élekkel.

Ezek az élek az első és az utolsó oszlop csúcsait kötik össze egymással úgy, hogy ha az első sort fentről lefelé, az utolsót pedig lentől felfelé számozzuk, akkor az azonos sorszámú helyek között lesz él a gráfban. A gráf felrajzolása után most is meg kell állapítanunk, hogy van-e benne páratlan hosszúságú kör.

Azoknál az eseteknél, ahol már a hengeren is volt páratlan hosszúságú kör a gráfban, itt is találni fogunk ilyen kört. Így abban biztosak lehetünk, hogy páratlan n esetén van páratlan hosszúságú kör a Klein-kancsón játszható tologatós játék grájában. (22. ábra)



22. ábra. Játék Klein-kancsón páratlan n esetén

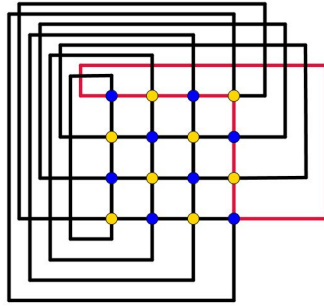
Páros n esetén a hengeres játéknál nem volt páratlan hosszúságú kör a gráfban. A két színnel való csúcsszínezés segítségével állapítsuk meg, hogy Klein-kancsón van-e ezekben az esetekben páratlan hosszúságú kör a játék grájában. Azt tudjuk, hogy az új szabályos lépéseket jelölő élek nélkül ki tudtuk színezni úgy a csúcsokat, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek voltak. Azt kell megvizsgálnunk, hogy az új élek olyan színű csúcsokat kötnek-e össze, amiket a hengeren azonos vagy különböző színűel színeztünk ki.

Ha k páros, akkor minden sorban az első és az utolsó csúcs színe különböző, míg páratlan k esetén ezek színe megegyezik. Az új élek az első és az utolsó oszlop csúcsait kötik össze úgy, hogy ha az első oszlopot fentről, az utolsót pedig lentől számozzuk, akkor az azonos sorszámú csúcsok között lesz él.

Így ebben a gráfban van él az első oszlop első csúcsa és az utolsó oszlop utolsó csúcsa között. Páros n esetén az első és az utolsó sor színezése különböző, ezért ha k páros, akkor az első oszlop legfelső csúcsát és az utolsó oszlop legalsó csúcsát azonos színnel színeztük ki. Így páros n és k esetén van páratlan hosszúságú kör a Klein-kancsón játszható játék grájában.

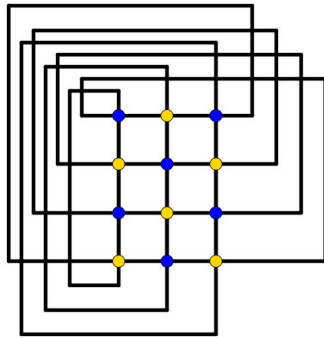
A páratlan hosszúságú kör megtalálása a Möbius-szalagnál leírtakhoz hasonlóan történhet. A körben lennie kell legalább egy olyan lépésnek, ami a hengeren még nem volt megengedett. Legyen az üres hely a jobb alsó sarokban és kezdjünk egy ilyen lépéssel. Ekkor az üres hely a bal felső sarokba kerül. Innen kell páros számú lépésben eljuttatnunk az üres helyet az eredeti helyére. Ha minden további lépésben úgy lépünk, hogy az üres hely közelebb kerüljön a kiindulási helyéhez, vagyis az egy sorral lejjebb vagy egy oszloppal jobbra kerül, akkor $(n - 1) + (k - 1) = n + k - 2$ lépést hajtunk végre. Ez pedig páros n és k esetén páros számú lépés. Ezzel meg is találtuk a páratlan hosszúságú kört a gráfban. (23. ábra)

Ha n páros, k pedig páratlan, akkor a gráfot ki tudjuk színezni két színnel úgy, hogy különböző színűek legyenek azok a csúcsok, amik között van él. Színezzük a csúcsokat soronként és oszloponként is felváltva a két színnel. Az első és az utolsó sor színezése így különböző lesz, ezért az első és az utolsó sor csúcsait összekötő élek – ahogyan azt már a hengeres játék esetén is megállapítottuk, – különböző színű csúcsokat kötnek össze egymással. Az első és az utolsó oszlop



23. ábra. Játék Klein-kancsón páros n és k esetén

csúcsainak színezése azonos lesz, de mivel az új szabályos lépések az első oszlop csúcsait a fordított sorrendben számozott utolsó oszlop csúcsaival kötik össze, amiket különböző színnel színeztünk ki, ezért ezek között sem lesz olyan, ami azonos színű csúcsokat köt össze egymással. (24. ábra)



24. ábra. Játék Klein-kancsón páros n és páratlan k esetén

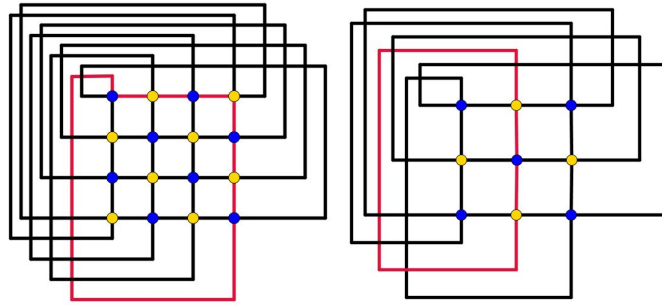
8.5. Játék a projektív síkon

Úgy valósítottuk meg a projektív síkon játszható tologatós játékot, hogy az $n \times k$ -s téglalap alakú elrendezésből az n és k hosszú oldalpárjai mentén is Möbius-szalagot készítettünk.

A projektív síkon játszható tologatós játék gráfjának elkészítésekor kiindulhatunk a Möbius-szalagon játszható játék gráfjából, hiszen a projektív síkon szabályos marad minden olyan lépés, ami a Möbius-szalagon szabályos volt.

Möbius-szalagon azokban az esetekben, amikor az n és k paritása megegyezett, volt páratlan hosszúságú kör a gráfban. Így ezeknél az eseteknél a projektív síkon megvalósított játék gráfjában is lesz páratlan hosszúságú kör. (25. ábra)

Különböző paritású n és k esetén a Möbius-szalagos játéknál nem volt páratlan hosszúságú kör a gráfban. A projektív síkon játszható játékot úgy készítettük el, hogy a másik két oldal mentén is Möbius-szalagot készítettünk a téglalap alakú elrendezésből. Ha eszerint nézzük n és k paritását, az akkor is különböző marad. Ezek alapján sejthető, hogy ezeknél az eseteknél nem lesz páratlan hosszúságú kör a projektív síkon játszható játék gráfjában. Ennek belátásához nézzük meg, hogy



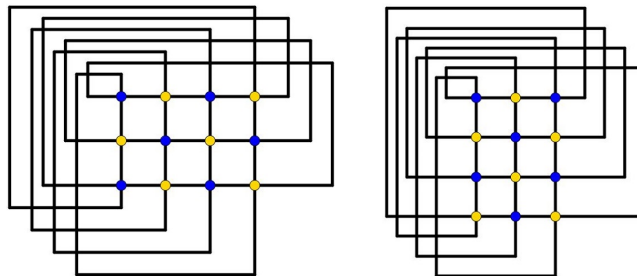
25. ábra. Játék a projektív síkon azonos paritású n és k esetén

valóban kiszínezhetőek-e két színnel a gráf csúcsai úgy, hogy különböző színűek azok a csúcsok, amik között van él.

A csúcsokat soronként és oszloponként felváltva kell színeznünk, mert a szomszédos csúcsok között mindig van él a gráfban. Ha n páratlan, akkor az első és az utolsó sor színezése megegyezik, viszont az élek nem az azonos oszlopban lévő csúcsokat kötik össze, hanem a felső sor minden csúcsát az alsó sorban a visszafelé történő sorszámozás szerinti megfelelőjével, így páros k esetén ezek különböző színűek lesznek. Ha k páros, akkor az első és az utolsó oszlop színezése különböző lesz, de az egyik oszlop csúcsait itt is visszafelé sorszámozzuk, és az azonos sorszámú csúcsok közé rajzoljuk be az új éleket, így ez sem fog problémát okozni a csúcsok színezésekor. Ezek alapján páratlan n és páros k esetén nem lesz páratlan hosszúságú kör a projektív síkon játszható tologatós játék esetében.

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha n páros és k páratlan, mert a játék készítésekor mindkét oldalpár mentén Möbius-szalagot készítettünk a téglalap alakú elrendezésből. Így a két eset a gyakorlatban ugyanazt a gráfot eredményezi.

A színezések alapján látható, hogy különböző paritású n és k esetén a projektív síkos játék esetében nincs páratlan hosszúságú kör a játék grájában. (26. ábra)



26. ábra. Játék a projektív síkon különböző paritású n és k esetén

Tehát a projektív síkon elképzelt tologatós játéknál csak akkor rakható ki egy állásból az összes lehetséges permutáció, ha n és k paritása megegyezik.

9. Játék a telefonmenüben

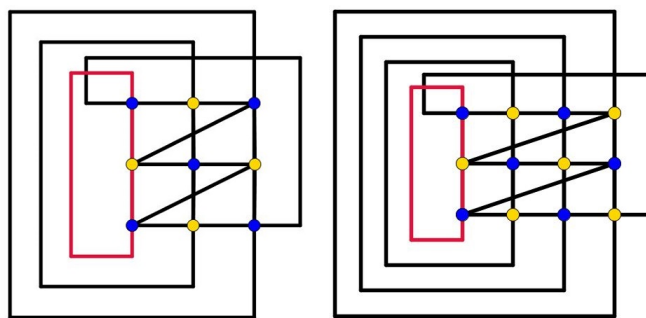
A szakdolgozattal kapcsolatos egyik beszélgetés során, amikor azt magyaráztam, hogy hogyan lehet elképzelni a tóruszon a tologatós játékot, a nyomógombos mobiltelefon menüjét hoztam fel példaként. Később viszont kiderült, hogy az nem is teljesen olyan, mint tórusznál, mert a menüben minden sor végén a következő sor elejére ugrik a kijelölés. Innen jött az ötlet, hogy megvizsgáljam, hogy ha a mobiltelefonunk menüjével játszánánk tologatós játékot, akkor az ikonok minden lehetséges permutációját ki tudnánk-e rakni a kezdőállapotból.

Az eddigi tologatós játékokhoz hasonlóan itt is szükségünk van egy üres helyre a menüben, hogy tologatni tudjuk az ikonokat. Ebben a játékban minden lépésben egy ikont és az üres helyet tudjuk felcserélni. Azokat a lépéseket tekintjük szabályosnak, amik két olyan hely közötti cserét jelentenek, amik között az egyik navigációs gomb egyszeri megnyomásával mozgatható a kijelölés a menüben. A kijelölés a sorokon és oszlopokon belül jobbra-balra és fel-le mozgatható. Minden oszlop legalsó ikonjáról az ugyanabban az oszlopban lévő legfelső ikonra mozgatható a kijelölés, a sorok utolsó ikonjáról pedig mindig a következő sor első ikonjára léptethető. Az utolsó sor utolsó ikonjáról a legelső sor legelső ikonjára ugorhatunk.

Vizsgáljuk meg, hogy ha a telefonunk menüjében n sorban és k oszlopban helyezkednek el az ikonok, akkor az előbb leírt módon megvalósított tologatós játék esetén kirakható-e szabályos lépésekkel az összes lehetséges permutáció az ikonok egy sorrendjéből. Ehhez készítsük el a Wilson-féle bizonyítás alapján a játékhoz tartozó gráfot, és nézzük meg, hogy van-e a gráfban páratlan hosszúságú kör.

A játék gráfjának rajzolásakor kiindulhatunk az ugyanolyan n és k esetén elkészített hengeren játszható játék gráfjából, mert azok a lépések, amik ott szabályosak voltak, azok a telefon menüjében is szabályosak lesznek.

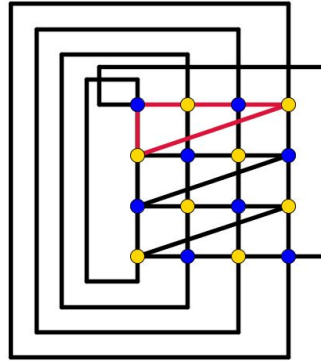
Ha n páros, vagyis az oszlopokban páratlan számú ikon van, akkor a gráfban lesz páratlan hosszúságú kör. (27. ábra) Így volt ez már a henger esetében is.



27. ábra. Játék a telefonmenüben páratlan n esetén

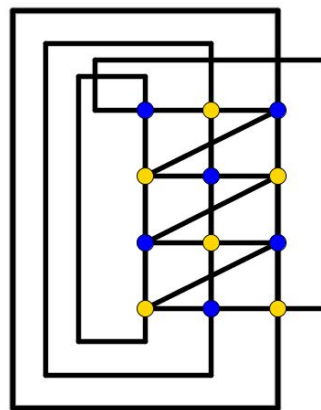
Ha n és k is páros, akkor a hengeres játéknál nem találtunk páratlan hosszú kört a gráfban. A csúcsszínezés segítségével döntsük el, hogy itt van-e. Soronként és oszloponként az egymás melletti csúcsoknak különböző színűeknek kell lenniük, mert ezek között mindig van él. Emellett minden sorban az utolsó csúcsnak és a következő sor első csúcsának színe is különböző kell, hogy legyen. Viszont ha az

első sor első csúcsa kék, akkor az első sor utolsó csúcsa sárga lesz, mert k páros. A második sor első csúcsának sárgának kell lennie, mert a fölötte lévő csúcs (az első sor első csúcsa) kék volt, és van él a két csúcs között. Az első sor utolsó csúcsa miatt azonban ezt a csúcsot kékre kellene színeznünk, mert e között a két csúcs között is van él a gráfban. Így páros n és k esetén találunk páratlan hosszúságú kört a telefon menüjében játszható tologatós játék gráfjában. (28. ábra)



28. ábra. Játék a telefonmenüben páros n és k esetén

Nézzük meg, hogyan alakul a csúcsszínezés abban az esetben, amikor n páros, k pedig páratlan. A csúcsokat soronként és oszloponként is felváltva kell színeznünk a két színnel, mert az egymás melletti csúcs között van él a gráfban. Továbbá minden sor utolsó csúcsának és a következő sor első csúcsának színe különböző kell, hogy legyen. Mivel k páratlan, ezért minden sorban megegyezik az első és az utolsó csúcs színe. Ez jó, mert így nem lesz gond a színezéssel. Minden oszlopban a legalsó és a legfelső csúcs színe is különböző lesz, mert n páros. Ezek alapján a gráf összes éle különböző színű csúcsokat köt össze, így nincs páratlan hosszúságú kör a gráfban. (29. ábra)



29. ábra. Játék a telefonmenüben páros n és páratlan k esetén

A telefon menüjében elképzelt tologatós játék esetén tehát csak akkor nem rakható ki az összes lehetséges permutáció az ikonok egy sorrendjéből, ha a sorok száma páros, az oszlopok száma pedig páratlan.

10. Összefoglalás

A 1. táblázatban összegezzük, hogy az egyes felületeken megvalósított játékok esetén milyen n és k választások mellett rakható ki egy-egy állásból a kockák összes lehetséges permutációja. Igen szerepel a táblázat megfelelő oszlopában, ha kirakható az összes permutáció és nem szerepel a cellában, ha csak a lehetséges permutációk fele rakható ki egy kezdőállásból.

	$páros \times páros$	$páratlan \times páratlan$	$páros \times páratlan$	$páratlan \times páros$
sík	nem	nem	nem	nem
henger	nem	igen	nem	igen
Möbius-szalag	igen	igen	nem	nem
tórusz	nem	igen	igen	igen
Klein-kancsó	igen	igen	nem	igen
projektív sík	igen	igen	nem	nem
telefonmenü	igen	igen	nem	igen

1. táblázat. Összefoglaló táblázat

Hivatkozások

- [1] Jerry Slocum – Dic Sonneveld: *The Famous 15 Puzzle*, New York, Metro Books, 2009