

Szakdolgozat

Fehér Ágnes Csenge

kémia-tanár-matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2020

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Fehér Ágnes Csenge(név) CY6X54 (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírással megerősítem, hogy az ELTE kémia-matematika osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2020. 04. 22.

Fehér Ágnes Csenge
a hallgató aláírása

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Szakdolgozat

*Geometriai szemléletfejlődés a magyar
középiskolákban*

Témavezető:

Dr. Szabó Csaba

egyetemi tanár

Készítette:

Fehér Ágnes Csenge

kémia-tanár-matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2020

1. Tartalomjegyzék

1. Tartalomjegyzék	4
2. Bevezetés a szakdolgozathoz.....	6
3. Bevezetés a tanítási részhez.....	7
4. A van Hiele elmélet	9
4.1. A szintek	9
4.2. Kommunikáció.....	10
5. Közoktatás és a szintek.....	13
5.1. Nemzeti Alaptanterv	13
5.2. Érettségi.....	14
6. A teszt.....	16
7. Eredmények	17
7.1. Értékelés.....	17
7.2. Esettanulmányok	20
8. Összegzés a tanítási részhez	23
9. Bevezetés a matematikai részhez	25
10. A modellalkotás	25
11. A Steiner-fa.....	26
12. Három pont Steiner-fája.....	27
12.1. A Fermat-pont.....	27
12.2. Három pont Steiner-fájának hossza.....	30
13. Négy pont Steiner-fája	31
13.1. A téglalap Steiner-fája	32

13.2.	Fermat-pontok a minimális Steiner-fában	34
13.3.	Általános négy pont Steiner-fája	36
14.	Összegzés a matematikai részhez	44
15.	Hivatkozások.....	45
15.1.	Hivatkozások a tanítási részhez	45
15.2.	Hivatkozások a matematikai részhez.....	47
16.	Melléklet	48

2. Bevezetés a szakdolgozathoz

Szakdolgozatom a követelményeknek megfelelően egy tanítási és egy matematikai részből áll. Először a tanítási résszel foglalkozom, melynek témája a geometriai szemléletfejlődés. Ezt követően a matematikai részt fejtem ki, amely négy pont Steiner-fájának vizsgálatára koncentrálni fog.

2016-ban Marx-Bursics Annával és Muzsnay Annával közösen készítettünk egy Tudományos Diákköri Dolgozatot, melyben a magyar középiskolások geometriai szemléletfejlődését vizsgáltuk. Ez a dolgozat képezi a tanítási rész gerincét, koncentrálni fog az általam elvégzett munkára. A vizsgálatot a Van Hiele elmélet alapján készült nemzetközileg elfogadott és alkalmazott teszttel végeztük magyar középiskolások körében. Fontosnak tartottuk a téma vizsgálatát, hiszen a geometria fontos szerepet tölt be a magyar matematikaoktatásban. Ezt jól mutatja, hogy a tanterv jelentős óraszámot biztosít geometriatanításra és a középszintű érettségi feladatok körülbelül 30%-a is geometria feladat. A dolgozat készítésekor elemeztem az aktuális (2012-es) Nemzeti Alaptantervet, középszintű matematika érettségi feladatokat, részt vettem a tesztek kitöltésének megszervezésében, javítottam és elemeztem a tesztek és természetesen az esettanulmányok elkészítésében is részt vettem.

A matematikai rész fő célja négy pont Steiner-fájának megértése, amely ekvivalens négy város közötti minimális hosszú úthálózat megtervezésével. A téma tárgyalását az izogonális pont vizsgálatával kezdem, mely régen a középiskolai tananyag részét képezte. Bár a középiskolai matematika tananyag csökkentésével a téma a tantervből kikerült, azonban úgy gondolom, hogy az izogonális pontra vonatkozó ismeretek középiskolások számára is könnyen megérthetőek és hasznosak. Ennek oka, hogy az izogonális pont egy optimalizálási feladat megoldása, amit a gyakorlatban is használnak. Az így kapott Steiner-fa problémakör komoly jelentőséggel bír többek közt az építőiparban, várostervezésben, számítógép iparban. Dolgozatomban kevés kivétellel a téma egy lehetséges középiskolai tárgyalását mutatom be egyetemi szintű bizonyításokkal kiegészítve.

3. Bevezetés a tanítási részhez

Dolgozatunkban a magyarországi közoktatásban tanuló diákok geometriai megértési szintjét vizsgáljuk. Elsősorban a középiskolásokra koncentrálunk. Ezt az 1950-es években kitalált és azóta tovább fejlesztett úgynevezett van Hiele szintek alapján tesszük [4]. Ez a fajta mérés teljesen elterjedt a nemzetközi szakirodalomban. A szintek osztályba sorolják a kitöltőket a geometriai tudásuk alapján. A Nemzeti Alaptantervből [12] és a kerettantervből [8,9] kiderül, hogy melyik korosztály melyik szinten kellene, hogy legyen. A szintek mérésére létezik egy általánosan elfogadott teszt [16] amit kitöltöttünk az ország számos középiskolájának minden évfolyamával. A teszt jogköteles, az engedélyeket megszereztük a szerzőtől és hozzájárulásával lefordítottuk magyarra. Ebben segítségünkre volt Győry Ákos kutatócsoportunk egy másik tagja. A tesztet kitöltöttük több középiskolában, amelyek reprezentálják a magyarországi középiskolai oktatás teljes skáláját. Az értékelésünkből kihagytuk a speciális matematika tagozatos diákok eredményeit. A középiskolai tudás egyik fő mérője az érettségi. A NAT követelményeit összevetjük azzal, hogy milyen geometriai fejlettségi szintet kíván meg az érettségi. A tesztek eredménye alapján általános képet alkotunk a magyarországi középiskolások geometriai fejlettségi szintjéről és az érettségi vizsga tanmenethez való alkalmazkodásáról.

Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele az 50-es években dolgozták ki a geometria megértésének szintjeit [4]. Elméletük része egy átfogóbb elméletnek, miszerint a matematika (és minden tudomány) különböző területeinek vannak megértési szintjei. Ezek a megértési szintek egymásra épülnek és a tanítási folyamat célja ezen szintek egymás utáni elérése. A megértési szintek közül ők a geometria megértésének szintjeit dolgozták ki részletesebben. Az elmélet magába foglalja azt is, hogy a különböző szinten lévő emberek különböző nyelvet beszélnek, és a különböző nyelvet beszélők nem értik meg egymást. Ezalatt azt értik, hogy az egyik szinten lévők nem fogadják el a másik szinten érvelők indoklásait. Vagy azért, mert fölsőbb szinten vannak, így a másik személy érvei számukra láthatóan hiányosak, vagy azért, mert egy alsóbb szinten például nem látják, hogy az

adott állítás bármiféle indoklást igényelne. Erre mutatunk egy példát az összefoglaló fejezetben. A házaspár elmélete széles körűen elfogadottá vált, és ennek következtében sokan kezdték vizsgálni a geometriai fejlődés szintjeit. A 80-as években született meg a legismertebb teszt, amely ezeket a szinteket hivatott mérni [16]. Ezt a tesztet legalább negyven országban alkalmazták, például: az Egyesült Királyságban [18], az Amerikai Egyesült Államokban [17], Malajziában [1], Hollandiában [4], a Dél-afrikai Köztársaságban [14], stb...

Malajziában több tanulmány is foglalkozik a diákok fejlettségi szintjével. A középiskola ott 13 éves korban kezdődik, és a geometriát többféle módon tanítják. Chong [2] felmérte a második osztályosok szintjét, Rafidah kiterjesztette ezt 4. osztályig [13], Tay [15] pedig az első osztályosokra koncentrált. A tanulmányok azt mutatják, hogy a diákok első, második szinten vannak és csak irányított van Hiele-típusú oktatással jutnak el a második szintre.

Az Egyesült Királyságban [7] kisebb az elvárt szint, mint Magyarországon és a van Hiele szint elérése nagyon függ az oktatási módszertől. A legtöbb alsó éves középiskolás, az első és második szinten teljesít, 40 százalékuk az ottani követelmény alatt. Ez egyben azt is jelenti, hogy, a tanároknak olyan tananyagot kell tanítaniuk, amely magasabb szintű mint a diákoké. Később látjuk, hogy ez a fajta oktatás sosem célravezető.

Hasonló a helyzet Görögországban [10] is, ahol az oktatás még kevésbé egységes és megállapítják, hogy elsősorban azok az oktatók jutnak el az első második szintre, akik elvégeznek egy geometria órát is. Ez a cikk nem ír az ottani követelményrendszeréről.

Magyarországon eddig csak általános iskolás tanulók vizsgálatára került sor [6]. Az Usiskin-féle teszt öt szintet mér, de a későbbi szakirodalom, és ahogy majd látható a mi vizsgálataink is azt mutatják, hogy a van Hiele házaspár öt szintjéből az első négy az, amelyek valóban tükrözik az elmélet törekvéseit. Mi dolgozatunkban azt vizsgáljuk, hogy ez az elmélet hogyan jelenik meg a magyarországi közoktatásban.

4. A van Hiele elmélet

4.1. A szintek

1. szint, a ráismerés szintje: Rajzról, ábráról felismernek alakzatokat: kör, téglalap, négyzet, stb.. Ezeket az alakzatokat egy egységként látják. Az alakzatok részeit és tulajdonságait még nem ismerik fel. Egy négyzetre például nem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy paralelogramma. Nem nevezik meg az alakzat részeit, mint például csúcs, oldal, szög.

2. szint, a vizuális vizsgálódás szintje: A tanuló felismeri az alakzatok egyes részeit és az egyes részek viszonyát. Például egy négy derékszöggel rendelkező alakzatról meg tudják állapítani, hogy téglalap (akkor is, ha nincs szépen lerajzolva). Egy rombuszról tudják, hogy szemben lévő oldalai párhuzamosak, vagy egyenlő hosszúak, de ezeket a tulajdonságokat még nem kötik össze. Egy egyenlő oldalú négyszögről tudják hogy rombusz. A különböző alakzatok tulajdonságai közti összefüggéseket még nem látják. Egy négyzetre még most sem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy paralelogramma.

3. szint, a fogalmak rendszerezésének szintje: A tanuló az egyes tulajdonságokat már rendszerben látja. A tulajdonságok rendszerezése alapján következtetéseket tud levonni, és ebben a rendszerben fontos szerepe van az ok-okozatiságnak: például egy háromszögben két oldal egyenlőségéből következik két szög egyenlősége. Tudja és érti hogy minden négyzet téglalap, minden téglalap paralelogramma. Látja, hogy ha egy négyszög egyben téglalap és rombusz is, akkor az négyzet. A szakirodalomban tipikusan emlegetett példa a váltószögek felismerése és az azzal való érvelés. Más típusú matematikai érvelésekre viszont még nem képes. A geometriát még nem látja teljes ok-okozati összefüggésben.

4. szint, a formális következtetések szintje: Ez a szint egy általánosabb matematikai érettségi szint elérése a geometrián belül. Az általános matematikai szint alatt azt értjük, hogy már megkülönbözteti a definíciókat, tételeket, bizonyításokat. Az állításoknál felmerül a bizonyítás iránti igény, ezeket a bizonyításokat értik és maguk is el tudnak végezni

egyszerűbb bizonyításokat. A geometrián belül a tanuló megérti az alapfogalmak és az axiómák meglétét, az utóbbiakat el tudja különíteni a tételektől. Például be tudja bizonyítani, hogy egy háromszögnek van beírt köre. Teljes axiomatikus bizonyításra nem feltétlenül képesek. Például egy négy derékszöggel rendelkező négyszögre rámondja, hogy a szemben lévő oldalak egyenlők, de nem érzi, hogy ezt még be kéne bizonyítani.

4.2. Kommunikáció

Ahogy már az elméletről szóló bevezetőben is említettük, az elmélet kimondja azt is, hogy a különböző szinten lévő emberek különböző geometriai nyelvet beszélnek, illetve hogy a különböző nyelven beszélők nem értik, nem érthetik meg egymást. Ez levetülhet a tanár-diák kommunikációra is, ha a tanár nem a tanuló megértési szintjén magyarázna. Ekkor ugyanis a diák nem értheti meg a tanár magyarázatát egy fogalomról vagy indoklását egy adott geometria feladathoz kapcsolódóan. Számos esetben előfordul, hogy a tanár valamely állítást, fogalmat nem magyaráz el részletesen, nem bizonyítja be [3]. Úgy gondolja, a diákok ezt már tudják, mivel korábban tanulták vagy maguktól is rá tudnak jönni. Feltételezi, hogy a diákokban meg van az igény és megfelelő tudás, hogy mélyebben megvizsgálják a tanultakat. A más nyelven történő kommunikálást az alábbi példán keresztül mutatjuk be.

Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?

Erre például az alábbi válaszok érkezhetnek:

- a) Az eredeti egyenessel párhuzamos és attól d távolságra lévő egyenesen.
- b) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el.
- c) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el. Az egyik egyenest úgy is meglehet adni, hogy a megadott egyenesnek kijelölöm egy A pontját, amelybe merőlegest állítok az egyenesre, majd felmérem rá a d távolságot.

Végül az így kapott P pontban újabb merőleget állítok az AP szakaszra.

- d) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el. Az egyik egyenest elő lehet állítani úgy is, hogy a megadott egyenesnek kijelölöm két különböző C és D pontját, amelyekben merőleget állítok a megadott egyenesre és felmérem rájuk a d távolságot. Az így kapott két ponton keresztül egyenest húzok.
- e) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el. Az egyik egyenest úgy is meg lehet adni, hogy a megadott egyenesnek kijelölöm egy A pontját, amelybe merőleget állítok az egyenesre, majd felmérem rá a d távolságot. Végül az így kapott P pontba újabb merőleget állítok az AP szakaszra, jelöljük ezt az egyenest f -fel. Most megmutatom, hogy ebben a félsíkban ennek az egyenesnek minden pontja jó és más pont nem felel meg. Tekintsük ennek az f egyenesnek egy tetszőleges Q pontját és bocsássunk ebből merőleget az e -re. Az így kapott pont legyen B . Az $APQB$ négyszög A -nál, P -nél, Q -nál lévő szöge derékszög, ezért a B -nél levő is derékszög. Tehát az $APQB$ négyszög téglalap. Így szemben levő oldalai egyenlő hosszúak. Tehát $AP = BQ = d$. Már tudjuk, hogy f minden pontja jó, tehát d távolságra van e -től. Az egyenestől való távolság definícióját felhasználva megmutatom, hogy a félsík más pontjai nem jók. Állítsunk e egy tetszőleges pontjába merőleget e -re, legyen a tetszőleges pont X , és a merőleges illetve f egyenes metszéspontja Y . Ekkor $XY = d$, ebből viszont következik, hogy ha a merőleges egy Y -től különböző Z pontját vizsgálom, akkor XZ távolság nem lesz d .
- f) Két egyenesen, melyek az eredeti, e egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el. Elegendő csak az egyik, az e egyenessel határolt félsíkra belátni. Legyen A az e egyenes egy tetszőleges pontja. Bocsássunk merőleget e -re az A pontban. Erre a merőlegesre mérjük föl d távolságot A -ból. Az így kapott pont legyen P . P -ben állítsunk merőleget az AP egyenesre. Legyen ez az egyenes f . Megmutatjuk, hogy az f pontjai jók és más pontok nem

felelnek meg. Először belátjuk, hogy f párhuzamos e -vel. Mivel e és f is szimmetrikus AP -re, e és f metszéspontjának képe az AP egyenesre is metszéspont lenne. Ekkor e és f egyeneseknek két metszéspontja lenne, ez pedig nem lehetséges. Legyen Q az f egy tetszőleges P -től különböző pontja és Q vetülete e -re legyen B . Tükrözzük az e és f egyeneseket az AB szakasz felezőmerőlegesére. Az e egyenes képe önmaga, mivel A képe B és B képe A . Legyen f képe f' , P képe P' . Ekkor AP szakasz képe BP' szakasz. És mivel a BAP és ABQ szögek derékszögek, ezért P' rajta van a BQ egyenesen és BP' hossza d . Az f és az f' egyenesek az AB felezőmerőlegesén metszik egymást. Mivel f párhuzamos volt e -vel, f' is párhuzamos e -vel. A párhuzamossági axióma miatt $f = f'$. Tehát P' eleme f -nek, azaz $P' = Q$, így a PQ szakasz hossza d . Ezzel beláttuk, hogy az f egyenes minden pontja d távolságra van e -től. A bizonyítás második fele ugyanúgy megy mint az előző esetben.

Egy ötödikes tanuló nagy valószínűséggel az a) és b) válaszok valamelyikét fogja adni, tehát a keletkező alakzatot már felismeri, de az indoklás szükségessége fel sem merül benne, hiszen nyilvánvaló, szemmel látható, hogy mi lesz az eredmény. Ez a kettes megértési szintről tanúskodik. A c) és d) válaszok a hármas szint megfelelői, hiszen itt már ok-okozati összefüggést is feltár a válaszadó azáltal, hogy az eredményhez vezető utat is részletezi.

Az e) lehetőség már a négyes szintről árulkodik, hiszen logikusan végigvezetett gondolatmenetet ismerhetünk meg. Ugyanakkor a matematikával mélyebben foglalkozókat ez a gondolatmenet sem elégíti ki, hiszen az indoklásnak egyszer csak vége szakad anélkül, hogy a mi esetünkben például az axiómákig eljutottunk volna.

Egy a b) választ adó tanulóban valószínűleg fel sem merül az igény, hogy olyan szintű indoklást fűzzön az eredményéhez, mint amit az f) lehetőség mutat be. „Látja”, hogy a válasza helyes, és ez elég is neki, nem jut eszébe megvizsgálni, hogy más pontok nem lehetnek-e jók, vagy ezen pontok mindegyike valóban jó-e. Ha egy magasabb megértési szinten álló diáktársa az e) válaszlehetőséget fejti ki, azzal nem tud mit kezdeni, hiszen

egy nyilvánvaló dolgot minek magyarázunk? A gond abból ered, hogy a „nyilvánvaló” fogalma a különböző megértési szinteken mást jelent.

A matematikai bizonyításokat, indoklásokat korábbi ismeretekig vezetjük vissza, vagyis valamilyen számunkra nyilvánvaló gondolatra építjük érvelésünket. Ezért két ember akkor tud együttműködni, a köztük zajló kommunikáció akkor lesz sikeres, ha a látható, nyilvánvaló dolgok számukra ugyanott vannak. Ha egy ötödikes gyereknek nyilvánvaló, hogy két párhuzamos egyenes minden pontja egyenlő távol van a másik egyenestől, akkor ez az ő számára nem igényel bizonyítást. A tanár tudja, hogy ezt a tanulótól el kell fogadnia és azt is tudja, hogy ez az állítás nem magától értetődő. Nem minden geometriában igaz, csak a párhuzamossági axióma teszi igazzá.

Amíg a tanár nem méri fel a diákok szintjét, és kommunikációját nem alakítja annak megfelelően, addig esély sincs arra, hogy a tanítási folyamat sikeres legyen a gondolkodás, problémamegoldó képesség fejlesztését tekintve, legfeljebb a tényanyag átadása valósulhat meg. Ha azonban sikerül feltérképeznie a gyerekek megértési szintjét, azonos kommunikációval apró lépésekben lehetőség van a fejlesztésre.

5. Közoktatás és a szintek

5.1. Nemzeti Alaptanterv

Kutatásunk keretében megvizsgáltuk a Nemzeti Alaptantervet, hogy lássuk, milyen fejlődést várhatunk el a közoktatásban résztvevő tanulóktól. Megállapítottuk, hogy a NAT olyan fejlődési folyamatot ír elő, mely egymásra épülő elemekből áll, s amelynek elemei lényegében egyértelműen megfeleltethetők a van Hiele szinteknek. A harmadik szint például a NAT-ban a következőképpen jelenik meg: hatodik osztályra elvárható a tárgyak összehasonlítása, azonosítása, osztályokba sorolása tulajdonságok szerint, a közös tulajdonságok felismerése. Nyolcadik osztályra a tanulónak már rendelkeznie kell a sík- és térbeli alakzatok csoportosításának képességével. A negyedik szinten az előírt fejlődés következő lépcsőfokaként a diákoktól

elvárják a bizonyítási igényt illetve középiskolai tanulmányaik végére bizonyos bizonyítások megértését, egyszerűbb bizonyítások konstruálását.

A NAT-ban megfogalmazott célokat a kerettanterv tovább részletezi, így annak tartalmát is nagyítónk alá vettük. Megállapítottuk, hogy az általános iskola alsó tagozata számára előírt tananyag, például a háromszög, négyzet és téglalap felismerése, ezek előállítása rajzolással szabadon vagy egy-két tulajdonság megadásával az első szinttel azonosítható. Az 5-6. osztályosoknak ismernie kell síkidomok, sokszögek (háromszögek, négyszögek) szemléletes fogalmát, azaz a kettes szinttel kell rendelkezniük, majd képesnek kell lenniük különböző alakzatokat tulajdonságok szerint csoportosítani, azaz elvárható, hogy eljussanak hatodik osztály végére a hármas szintre. Később, 7-8. osztály befejeztével már a diákok közelítenek a negyedik szinthez azzal, hogy képesnek kell lenniük tételek megfogalmazására megfigyelés alapján és rendelkezniük kell a bizonyítási igénnyel.

Összességében tehát elmondható, hogy az általános iskola alatt a harmadik, középiskola végére pedig a negyedik van Híele szintre kellene eljutniuk a gyerekeknek a NAT előírásai szerint.

5.2. Érettségi

A magyar közoktatásban a tanulmányok az érettségi vizsgával zárulnak, ezért az erre való felkészülés minden iskolában központi szerepet kap. Gyakran mind a tanárok, mind a diákok szemében az érettségi vizsgán való jó szereplés az egyedüli cél a tanulók fejlesztése és önfejlesztése szempontjából. [3,11]

A középszintű matematika érettségi két részből áll: az egyik rész 12 feladatot tartalmaz, amelyek megoldásaként a diákoknak csak a végeredményt kell feltüntetni 45 perc alatt. A második részben 6 darab több feladatrészből álló hosszabb kérdés közül az érettségiző tanulóknak 5-t kell megoldaniuk 135 perc alatt, ahol a végeredményhez vezető út lépéseit is fel kell tüntetni. Az elmúlt 8 érettségi időszak feladatsorait megvizsgálva megállapítottuk, hogy az első részben szereplő feladatok 14,55%-a, a második részben található kérdések 29,13%-a geometria feladat.

Megvizsgáltuk, hogy az érettségi elvárásai összhangban vannak-e a NAT által megfogalmazott célokkal. A kerettanterv és az érettségiben szereplő geometria feladatok mennyisége alapján azt feltételeztük, hogy az érettségi négyes szintet vár el. Ezzel szemben azt állapítottuk meg, hogy a középszintű érettségi, melyet a középiskolás tanulók körülbelül 95% tesz le, legfeljebb hármass szintet követel meg. Erre mutatunk, most néhány példát. A 2016-os tavaszi érettségi második részében található az alábbi geometria feladat:

a) Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3; -1)$ és $B(3; 7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit!

c) Adott az $A(-3; -1)$ és a $B(3; 7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz!

Ebben a feladatban a megértési szintek közül a hármásra van szükség, így persze az elsőre és a másodikra is a szintek egymásra épülése miatt, hiszen a megoldáshoz fogalmak, definíciók, tulajdonságok ismeretére van szükség, valamint alakzatok közti összefüggések felfedezésére. A hármasszinthez tartozik az alábbi következtetés: abból, hogy egy adott szakasz derékszögben látszik a keresett pontból, következtetni kell arra, hogy a szakaszra, mint átmérőre írt Thalész-körön található a pont.

Egy másik feladata 2014 őszéről:

Egy biliárdasztal játéktérülete téglalap alakú, mérete $194\text{ cm} \times 97\text{ cm}$. A játéktérület középpontja felett 85 cm -rel egy olyan (pontszerűnek tekinthető) lámpa van, amely fénykúpjának a nyílásszöge 100° .

c) Számítással állapítsa meg, hogy a lámpa megvilágítja-e a játéktérület minden pontját! (11 pont, ábrával szemléltetve)

Ennek a feladatnak a megoldásakor több nehézség is adódhat. Először is a szövegértés kapcsán: vajon hogyan kell érteni a pontszerű lámpa fénykúpját? Ez valószínűleg nem triviális minden végzős diák számára, bár az ábra segíthet az értelmezésben.

A feladat megoldásakor először is fel kell ismerni, hogy a kérdés egy sík és egy kúp metszetére vonatkozik. Innentől lényegében csak

szögfüggvényeket kell használni, ami szerencsés esetben rutinfeladat, szemléletet nem igényel. Ezek alapján ez a feladat egy második van Hiele szinten álló diák számára teljesíthető, amennyiben rendelkezik a megfelelő algebrai háttérrel.

Gyakran találkozunk az érettségi vizsgákban az alábbi típusfeladatként visszatérő feladattal. Mi a 2013-as tavaszi változatot ismertetjük:

A vízszintessel $6,5^\circ$ -ot bezáró egyenes út végpontja 124 méterrel magasabban van, mint a kiindulópontja. Hány méter hosszú az út? Válaszát indokolja! (3 pont)

Ennek a feladatnak a megoldásához bőven elég az egyes, vagy legfeljebb a kettes szint.

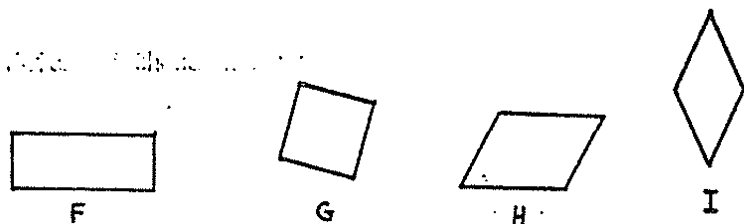
Összefoglalva tehát azt tapasztaltuk, hogy a középszintű érettségi elvárásai nincsenek összhangban a NAT elvárásaival. Az elméleti, előírt elvárások és a valóságos elvárások között nagy szakadék tátong.

6. A teszt

Kutatásunk következő lépéseként a magyar középiskolások geometriai szemléletfejlődését vizsgáltuk, amelyhez az Usiskin-féle tesztet használtuk. A teszt az öt van Hiele szintet méri, 25 feladattal, melyek közül mindegyik szinthez 5-5 feladat tartozik. Az első szintet mérő feladatok között szerepel az alábbi feladat is:

Melyik négyzet?

- Egyik sem.
- Csak G.
- Csak F és G.
- Csak G és I.
- Mind az.

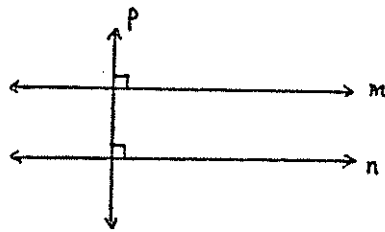


A negyedik szintet vizsgáló kérdésekre pedig a következő feladat szolgál példaként:

Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:

- i. *Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.*
- ii. *Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.*
- iii. *Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.*

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

- a. *Csak i-ből.*
- b. *Csak ii-ből.*
- c. *Csak iii-ből.*
- d. *i-ből vagy ii-ből.*
- e. *ii-ből vagy iii-ből.*

7. Eredmények

7.1. Értékelés

Vizsgálatunk során az első négy szint eredményeire fókuszáltunk. A feladatsor online formátumban és nyomtatott formában is elérhető, megoldására 35 perc áll rendelkezésre. Az általunk felmért tanulók egy része online felületen, egy másik része pedig nyomtatott formában tanórai keretek között töltötte ki a tesztet.

Az adatok nem csak a mi általunk végzett mérések eredményeit, hanem Győry Ákos [5] Debreceni Egyetemen doktorandusz miskolci középiskolai tanár kutatásának eredményeit is tartalmazzák.

A felmért középiskolák között szerepel egy budapesti és három miskolci gimnázium, valamint egy zenei szakközépiskola. Ezek mellett az ELTE

matematika alapképzésében tanuló első éves hallgatók is kitöltötték a tesztet.

Normál tantervű középiskolában tanuló diákok közül összesen 294 gyerek segítette munkánkat a teszt kitöltésével, 109 kilencedikes, 105 tizedikes, 20 tizenegyedikes illetve 60 végzős. Ezen diákok közül voltak, akik általános tantervű oktatásban részesültek, olyanok, akik nyelvi előkészítő osztályba jártak, illetve olyanok is, akik az Arany János Tehetséggondozó Programban vettek részt.

A hatvankét általunk felmért zenei konzervatóriumban tanuló diák közül 18 kilencedikes-, 17 tizedikes-, 15 tizenegyedikes-, 12 tizenkettedikesként vett részt a felmérésben.

A speciális matematika tagozaton tanuló diákok körében végzett mérést 149 gyerek közreműködésével végeztük, akik közül 54 kilencedikes, 63 tizedikes illetve 32 tizenegyedikes volt. Az ő eredményeiket Győry Ákos [5] elemezte.

Kíváncsiságból kitöltettük a tesztet kétszer is az ELTE elsőéves matematika szakos hallgatóival. Összesen 65-en töltötték ki a tesztet első alkalommal, és 18-an a második alkalommal. Először a második félév elején, a geometria 1 tantárgy legelső óráján, majd ellenőrzés céljal a félév végén. A második kitöltés célja az volt, hogy megállapíthassuk mennyit fejlődtek a félév során.

Összesen tehát 570 tanulóval töltöttük ki a tesztet, akik a középiskolás korosztály teljes spektrumát lefedték.

A NAT előírásai alapján a középiskolás diákok osztályonkénti eredményeinek lineáris fejlődését vártuk, mely során az elméletileg harmadik szinten álló kilencedikeseknek a tizenkettedik osztályra a negyedik szintre kell eljutniuk. A matematikushallgatók megértési szintjéről egyértelműen a legmagasabb, négyes szintet feltételeztük.

A gimnáziumok eredményeit az alábbi táblázat foglalja össze. A gimnáziumokat itt nem nevezzük meg, hanem A, B, C, D betűkkel jelöljük.

1. táblázat: Gimnáziumi eredmények

Osztály	A	B	C	D	Átlag	Fő
9.	2,29	2,10	2,09	2,46	2,22	109
10.	1,82	2,16	2,21	1,86	2,08	105
11.	3,43	-	2,50	-	2,60	20
12.	2,43	2,67	2,89	1,00	2,19	60

Ezekből az eredményekből három dolog egyértelműen kiolvasható. Egyrészt az, hogy a gimnáziumba bekerülő diákok által elért eredmények átlaga a teszten 2,22 az elvárt 3 helyett. Ez lényegében iskolától független, hiszen az átlagok mindegyik iskolában 2,09 és 2,46 között mozognak. Másrészt, hogy a végzős diákok sem érik el a tőlük elvárható szintet. Harmadik megállapításként pedig kimondhatjuk, hogy a gimnáziumi évek alatt a geometriai megértési szintek átlaga nem fejlődik, hiszen a kilencedik osztályos tanulók átlaga lényegében megegyezik a végzős diákokéval.

Az egyetlen pozitív irányba kiugró érték az az „A” gimnázium tizenegyedik osztályosainak 3,43-as átlaga, mely lényegében megfelel a NAT által előírt tizenegyedikes szintnek. Megörültünk ennek az eredménynek és azt gondoltuk hogy ezt az eredményt egy erős matematika fakultációs csoport érte el. Kérdésünkre azonban a tanárnő elmondta, hogy a csoport valóban fakultációra jár, de biológiából. A csoport összesen hét fős, így a tanárnőnek volt elég ideje a tananyagot a NAT elvárásainak megfelelően megtanítani.

A tesztek alapján tehát arra következtethetünk, hogy a hagyományos gimnáziumokban a gyerekek geometriai fejlettségi szintje nem a NAT elvárásainak megfelelően alakul. Látható, hogy ez az átlag alig-alig változik évfolyamonként és a gimnáziumból kikerülők átlaga is csupán 2,19, tehát az elméleti bemeneti szintet sem éri el a gyakorlati kimenet. Nagy átlagban az tapasztalható, hogy a középiskolában nem fejlődik a diákok geometriai megértési szintje.

A gimnáziumi eredményektől elkülönítve értékeltük a zenei konzervatórium eredményeit a kiugróan alacsony értékek miatt. A 2. táblázat adatait vizsgálva megállapítható, hogy ebben az intézményben sincs fejlődés, sőt a gyerekek az általános iskola alsó tagozatában elvárható második szintet sem érik el.

2. táblázat: Zenei szakközépiskola eredményei

Osztály	Átlag	Fő
9.	1,17	18
10.	1,59	17
11.	1,13	15
12.	1,17	12

A BSc-sek közül heten teljesítettek a hármas szint alatt, a középiskola bemeneti szintjét sem érve el. Ez a vizsgált hallgatók 10%-a. A többi hallgató eredménye két részre osztható: 31-en álltak a hármas szinten, és csupán 27-en a negyedik szinten. Ez annál is megdöbbentőbb, minthogy ezek a hallgatók már elvégeztek fél évet az ELTE matematika szakán. Érdekes megfigyelni, hogy pontosan az elit gimnáziumból érkező hallgatók érték el a négyes szintet. Az elvárásunknak megfelelően ez azt jelenti hogy a matematika szakos hallgatók erősebb geometria tudással rendelkeznek mint kortársaik, de elsősorban iskolafüggően sokan nem érik el a kívánt és NAT által is előírt 4-es szintet. Az utólagos kitöltés szintén megfelelt az elvárásainknak, hiszen a diákok megértési szintje nem változott. A 18 diákból 8-10 arányban voltak a 3-as illetve 4-es szintet írók és mindnyájan ugyanazt a szintet érték el, mint a félév elején.

7.2. Esettanulmányok

A matematikus hallgatók tesztjeinek kiértékelése után esettanulmányok keretében megvizsgáltuk gondolkodásmódjukat. A teszt 65 kitöltője közül 12 fővel végeztük el az esettanulmányt. Az volt a célunk, hogy megvizsgáljuk, a teszt által mutatott szint hogyan jelenik meg a gyakorlatban, tehát egy konkrét feladat megoldásánál milyen módszereket,

eszközöket használnak a különböző szinteken álló személyek. Hipotézisünk az volt, hogy az azonos szinten álló személyekben hasonló mértékű bizonyítási igény jelenik meg. Továbbá a magasabb szinten álló személyekben nagyobb a bizonyításra való igény.

Az esettanulmányok során egy, vagy több feladatot adtunk a hallgatónak. Miközben a hallgató levezette az általa helyesnek gondolt megoldást, azt figyeltünk, hogy van-e igénye a bizonyításra, meg tudja-e fogalmazni a bizonyítandó állítást, illetve figyeltük, hogy a bizonyításhoz milyen eszközöket használ. Ugyanis a BSC-s hallgatók szinte kizárólag a 3. illetve a 4. szinten álltak, és a van Hiele elmélet szerint e két szinten álló csoport között a bizonyítási igény, továbbá a bizonyítások konstruálásának képessége a különbség.

A feladott feladatok a következők közül kerültek ki:

1. Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?
2. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögnek van beírt köre!
3. Vizsgáljuk meg egy téglatest alakú szoba egy sarkát. Itt három téglalap találkozásából alakul ki egy sarok. Helyettesítsük a téglalapokat szabályos háromszögekkel. Hány szabályos háromszöggel lehetne kirakni egy sarkot?

Az első feladatot lényegében minden esettanulmány során feladtuk. A másik két feladatot két módon alkalmaztuk. Egyrészt volt, hogy a 2. vagy 3. feladattal kezdtük az beszélgetést bemelegítésképpen. Másrészt ha azt tapasztaltuk, hogy a hallgató nem tud hozzákezdeni az első feladathoz, továbbá segítő kérdéseink sem vitték előrébb a feladatmegoldást, akkor áttértünk egy másik feladatra.

Az 1. feladatot hallva először mindenki láthatóan meglepődött, valószínűleg nehezebb feladatra számítottak. Ennek ellenére volt, aki csak az egyik egyenest vette észre a két feltételeknek megfelelő közül. Miután a választ elmondták, kértük, hogy indokolják is meg; ezt magától senki sem

kezdte el. Ekkor általában újra meglepetés volt leolvasható az arcukról: “Bizonyítani? Ezt? Mit kell ezen bizonyítani?” Ezek után három markánsan elkülönülő reakciót figyeltünk meg.

1. Volt, aki bár megtalálta a helyes megoldást, lényegében hozzá sem tudott kezdeni az indokláshoz. Nem volt a bizonyítást előrevivő gondolata, és azt sem tudta megfogalmazni, hogy mit kellene belátni. Ennek értelmében az adott hallgató legfeljebb a 3. megértési szinten áll.
2. Volt olyan hallgató, aki a megoldáson túl tudott a bizonyítást előrevivő gondolatot is mondani, de azt nem fogalmazta meg, hogy mit kell belátni, tehát hogy az általa említett pontok jók, a többi viszont nem. Ezen hallgatók szintén legfeljebb a 3. megértési szinten állnak.
3. Volt olyan hallgató is, aki ha nem is teljesen önállóan, de a bizonyítandó állításokat meg tudta fogalmazni, és a gondolatmenetet is el tudta kezdeni. Ez az elmélet szerint a 4. szintnek felel meg.

A tesztek eredményei mindhárom esetben analógok voltak az általunk megfigyelt szintekkel.

A második feladat általában nem okozott gondot. Felismerték, hogy azt kell megmutatniuk, hogy a három belső szögfelező egy pontban metszi egymást és ez a pont megfelelő lesz a beírt kör középpontjának, melynek sugara innentől egyértelmű. Ez sikerült is nekik. Megjegyezzük, hogy ez a bizonyítás középiskolai tananyag.

A harmadik - megfogalmazásában talán rendhagyó - feladatban az első nehézség a feladat megértése volt. Ezután minden megkérdezett először arra a következtetésre jutott, hogy háromnál több síkidom esetében mindig lehetséges csücsköt létrehozni. Ilyenkor rávezetésképpen megkértük, hogy magyarázzák el, hogy 4, 5, stb. db háromszög esetében hogy néz ki a csücsök, ezután általában rájöttek, hogy 6 háromszög esetében síkot kapunk.

Az esettanulmányokat elemezve megállapítottuk, hogy az azonos szinten álló hallgatók hasonló módon kezdték el megoldani a kapott feladatokat, illetve a bizonyítási igényük megegyező mértékben fejtett.

Azt tapasztaltuk, hogy azon hallgatók esetében, akikkel módunk volt elvégezni az esettanulmányt, a mért van Hiele szintek egybeestek a hallgatók általunk tapasztalt megértési szintjeivel. Ez azt jelenti, hogy megfigyelésünk szerint két élesen elváló csoportra lehet osztani a hallgatókat, mely csoportok megegyeznek a teszt eredményei szerint elkülöníthető csoportokkal. Az egyik csoportbeli hallgatókban felmerült a bizonyítás igénye, és egyszerűbb bizonyítást el tudtak kezdeni. A másik csoport tagjaiban a bizonyítás igénye nincs meg, egy adott probléma esetében az illetőnek nincs ötlete, hogy milyen módon lehetne bizonyítani, bár az eszköztára elvileg adott.

8. Összegzés a tanítási részhez

Dolgozatunkban a magyarországi középiskolások geometriai megértési szintjeit vizsgáltuk. Az Usiskin-féle tesztek alapján megállapítható, hogy a középiskolában a diákok geometriai megértési szintje nem a NAT elvárásainak megfelelően alakul. A NAT az általános iskola végeztével a harmadik, a középiskola végeztével a negyedik szintet várja el. A mérések alapján megállapítottuk, hogy a kilencedikesek és a tizenkettedikesek is a kettes és a hármas szint között vannak. Ezek szerint már a középiskolába kerülő gyerekek sem állnak a tőlük elvárt szinten, és ebből a lemaradott helyzetből a következő négy év tanulmányai sem tudják őket kiemelni.

Elgondolkodtunk azon, hogy mi lehet ezen nem túl fényes eredmények hátterében. Két okot vizsgáltunk meg részletesebben. Az egyik ok az érettségi követelmény, a másik pedig az esetleges nem megfelelő kommunikáció tanár és diák között.

A legtöbb középiskolában a tanárok szinte kizárólag az érettségire készítik fel a tanulókat. [3,8] Az érettségín való jó szereplés szinte egyedüli célként jelenik meg, hiszen a tanárok, a diákok és az iskolák minősítése során is az érettségín nyújtott jó teljesítmény az egyik legfontosabb szempont. Az érettségi viszont, ahogyan azt korábban megállapítottuk, nem

követel meg harmadiknál magasabb megértési szintet. Ez a tény csökkentheti, és gyakran csökkenti is a tanárok motivációját a NAT szerinti oktatásra, ami a tananyag mennyisége miatt érthető is. Ha a számonkérésben nem a problémamegoldás, hanem a rutinfeladatok elvégzése kap hangsúlyt, természetes, hogy az oktatásban is ez kap nagyobb szerepet. Összefoglalva, a középszintű érettségi elvárásai nincsenek összhangban a NAT elvárásaival. Az elméleti, előírt elvárások és a valóságos elvárások között nagy szakadék tátong.

A másik ok, amelyet kiemelünk, a tanár és a tanítvány közti esetleges nem megfelelő kommunikáció. Ahogy az elmélet is kimondja és a példán is szemléltettük, ha nem megfelelő nyelven közelítjük meg a tanulókat, akkor esély sincs arra, hogy magasabb megértési szintre juttassuk el őket. Beigazolódtott az elméletnek az a tétele, hogy az egyetlen járható út az, hogy a diákok megértési szintjét megismerve az adott szintről kezdjük el vagy folytassuk a tanítási folyamatot. Így lesz lehetőségük „felvenni a fonalat”. Amíg a tanár nem méri fel a diákok szintjét, és kommunikációját nem alakítja annak megfelelően, addig esély sincs arra, hogy a tanítási folyamat sikeres legyen a gondolkodás, problémamegoldó képesség fejlesztését tekintve, legfeljebb a tényanyag átadása valósulhat meg. Ha azonban sikerül feltérképeznie a gyerekek megértési szintjét, azonos kommunikációval apró lépésekben lehetőség van a fejlesztésre. Ezt igazolja a BSc-sekkel végzett kísérlet is, ahol a 4-es szinten megszólított ám 3-as szinten lévő diákok nem mutattak fejlődést a félév során.

9. Bevezetés a matematikai részhez

Hol menjen az autópálya Budapest, Miskolc, Nyíregyháza és Debrecen között, ha a lehető legkevesebb aszfaltot szeretnénk felhasználni az építkezés során? Hova fektessük le a vízvezetékcsöveket egy újonnan épülő városrészben, ha a legrövidebb vízvezeték-hálózathoz szeretnénk jutni? Vagy hogyan kössünk össze néhány pontot vezetékkel egy plexilapon nyomtatott áramkörök esetében a legkevesebb vezeték felhasználásával? Dolgozatomban ezekre a kérdésekre keresem a választ a matematika, azon belül pedig a Steiner-fák segítségével.

10. A modellalkotás

Mivel a bevezetőben említett kérdések a valós világról szólnak, de a matematika eszközeivel szeretnénk rájuk választ találni, ezért tekintsük át a modellezés folyamatát.

Modellezési problémák megoldása során kapcsolatot teremtünk a matematikai, illetve a valós világ között. A modellezési problémák megoldásának egy idealizált folyamatát a következő lépések írják le [7]:

1. a probléma megértése és egy individuális „szituációs modell” alkotása
2. egyszerűsítjük a szituációs modellt, hiszen a valós életből vett problémák igen komplexek és meghatározzuk a konkrét feladatot, létrehozuk a „valós” modellt
3. matematizálás: a valós modellt lefordítjuk a matematika nyelvére létrehozva a matematikai modellt
4. matematikai eszközök segítségével megoldjuk a matematikai modellben felállított problémát
5. visszavetítjük a matematikai megoldást a valós világba, kapunk egy valós megoldást
6. validáljuk a valós megoldást összevetve az eredeti szituációval és ha a kapott eredmény nem kielégítő, akkor a modellezési folyamatot újra kezdjük a 2. lépéstől
7. feltárjuk az egész megoldási folyamatot

A folyamat lényege tehát a következő: adott egy valós probléma, melyet lefordítunk a matematika nyelvére, majd az így nyert matematikai problémát megoldjuk matematikai eszközökkel és megkapjuk a matematikai megoldást. A matematikai megoldást visszavetítjük a valós világba és kapunk egy valós megoldást, melyet validálni kell, azaz végig kell gondolni, hogy ez a megoldás mit is jelent, össze kell vetni az eredeti problémával és ki kell értékelni az eredményt.

11. A Steiner-fa

Az első kérdés tehát, hogyan építsük meg az autópályát Budapest, Miskolc, Nyíregyháza és Debrecen között úgy, hogy a lehető legkevesebb aszfaltot kelljen felhasználni az építkezés során. Ahhoz, hogy a kérdésre választ találjunk matematikai eszközökkel, az előző fejezet alapján meg kell alkotnunk a matematikai modellt. Nézzük meg először, hogy maga a valós szituáció miről szól, mi lesz a „valós” modell!

Ha jobban szemügyre vesszük a kérdést, láthatjuk, hogy az valójában nem az aszfaltról szól, hanem a pénzről. Vagyis kérdés úgy hangzik: hol menjen az autópálya ezen négy város között, ha egy adott céggel megvalósítva a tervet a lehető legkevesebb pénzt szeretnénk rászánni az építkezésre? A válasz sok mindentől függhet, de ha ideálisak a viszonyok, akkor az autópályára fordítandó összeg egyenesarányos a felhasznált aszfalt mennyiségével, amely az úthálózat hosszától függ. Ezért a valós modell ezen négy város közötti legrövidebb úthálózat kereséséről szól.

A probléma egyszerűsített matematikai modellje pedig ezek alapján a következő: keressük az euklideszi síkon négy nem kollineáris pont között azt a hálózatot, amelynek az összhossza a lehető legrövidebb. Itt a hossz alatt az euklideszi távolságot értjük. Továbbá megengedett, hogy tetszőleges számú pontot vegyünk fel a síkon, melyek a legkisebb összhosszúságú hálózat csúcsai lesznek.

Ez az hálózat, amit megszeretnénk találni, az úgynevezett minimális Steiner-fa. Nevét egy német matematikusról, Jakob Steinnerről (1796-1863) kapta [6], aki számos ismert geometriai problémát oldott meg, adott egzakt bizonyítást rájuk. Mielőtt a matematikai modellben megfogalmazott négy

ponthoz tartozó Steiner-fa problémával foglalkoznánk, először vizsgáljuk meg a kérdést három pont esetén. Ezt követően, ha a matematikai modellben megoldottuk a problémát, az eredményeinket validáljuk, hiszen a valós helyzet komplexitása miatt több egyszerűsítést is végrehajtottunk a modellezési ciklus során. Ez a lépés kifejezetten fontos, hiszen látni fogjuk, hogy még a Budapest, Miskolc, Nyíregyháza és Debrecen közötti autópálya esetében validálás igazol minket, addig a Biatorbágy, Páty, Budakeszi és Budaörs közötti úthálózat esetében nem.

12. Három pont Steiner-fája

12.1. A Fermat-pont

Három pontra tehát a kérdés a következőképpen hangzik: adott az euklideszi síkon három nem kollineáris pont. Hol van közöttük a minimális összhosszúságú hálózat?

A válaszhoz két esetet fogunk megkülönböztetni. Első esetben a három pont által meghatározott háromszög minden szöge kisebb mint 120° . A második esetben pedig ennek a háromszögnek van egy legalább 120° -os szöge.

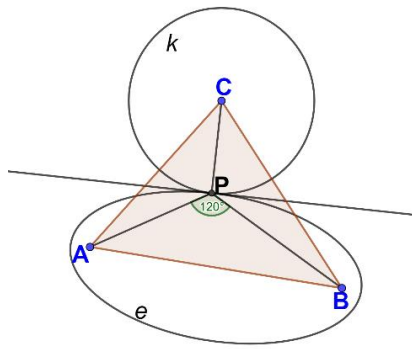
Mindkét eset ahhoz a feladathoz vezet minket vissza, melyet Pierre de Fermat 1643-ban tett feljegyzései között található [8]. Nevezetesen: *Adott három pont a síkon. Keressük azt a pontot, melynek távolságösszege e háromhoz minimális.* Bár a feladat Fermat nevéhez fűződik, ő maga nem adott rá megoldást, azonban levélben elküldte Mersenne-nek [3]. Az akkori tudományos élet szokásai szerint Mersenne továbbította a feladatot Torricellinek, Vivianinak, Cavalierinek. A problémával később többen is foglalkoztak, így lassan egy terjedelmes problémakörre nőtte ki magát ez az egyszerűnek tűnő feladat. Az első megoldás Torricelli nevéhez fűződik [9], aki az első esettel foglalkozott, ezért a kérdéses pontot szokás Torricelli-pontnak, a feladat kitalálója után Fermat-pontnak, a problémakörhöz kapcsolódóan pedig Steiner-pontnak is nevezni. A második esetre az első bizonyítást Cavalieri adta [1].

Az első esetben, melyet lebegő esetnek is szokás nevezni, Fermat feladatára a megoldás a háromszög izogonális pontja lesz. Ez az a pont, amelyből a háromszög oldalai egyenlő szögben, azaz 120° -ban látszanak. Második esetben, azaz a kötött esetben pedig a kérdéses pont a tompaszögnél levő csúcs. A lebegő és kötött elnevezés a Fermat-pontnak a megadott pontokhoz viszonyított helyzetéből adódik.

Többféle bizonyítás is született a feladatra, melyek közül az első esetre a sokak által legelegánsabbnak tartott bizonyítást J. E. Hofmann adta [2]. Ez a forgatáson alapuló közismertebb bizonyítás részletesen megtalálható például Szmerka Gergely cikkében [8] vagy Pártos Boglárka TDK dolgozatában [4]. Szakdolgozatomban Toricelli első esetre adott eredeti bizonyítását mutatom meg. Toricelli eleve feltette, hogy a Fermat-pont egyértelműen létezik, ezért bizonyításából az derül ki, hogyha létezik a Fermat-pont, akkor az a háromszög izogonális pontja lesz. A létezés azonban egyszerű geometriai eszközökkel belátható, ahogy Hofmann forgatásos bizonyításában látható.

Tétel: Adott három nem kollineáris pont a síkon, amelyek által meghatározott háromszög minden szöge kisebb, mint 120° . Ekkor az a pont, melynek távolságösszege e háromhoz minimális a háromszög izogonális pontja.

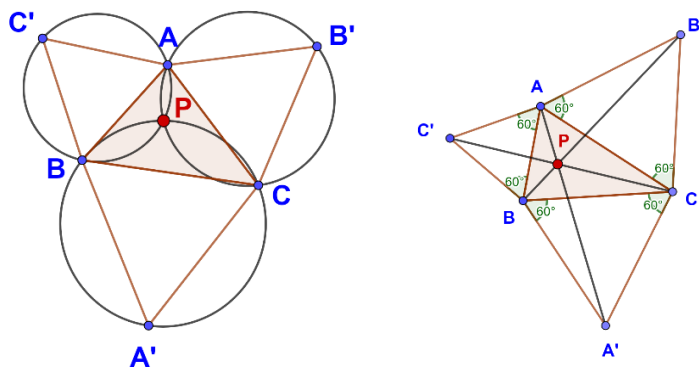
Bizonyítás: Legyen a megadott három pont A, B, C , a keresett pont pedig P . Legyen e az A, B fókuszpontú P -n áthaladó ellipszis, k pedig a C középpontú P -n áthaladó kör. Így a körnek és az ellipszisnek 1 vagy 2 közös pontja lehet. Ha 2 közöspontjuk van, akkor metszik egymást, vagyis k körvonalnak létezik P' pontja, mely az ellipszisnek belső pontja. Ekkor $AP+BP > AP'+BP'$, hiszen P az ellipszis egy pontja, vagyis $AP+BP=2a$, ahol $2a$ az ellipszis nagytengelye, P' pedig belső pont, tehát $AP'+BP' < 2a$. Ezenkívül $CP=CP'$ mivel mindkét pont a körvonalon van. Ez pedig ellentmondás, hiszen ebben az esetben P' pont A, B, C pontoktól vett távolságösszege kisebb, mint P ponté. Ha 1 közös pontja van, akkor a két alakzat érinti egymást, az érintési pont pedig P . (Lásd 1. Ábra.)



1. Ábra: Fermat-pont

A két alakzat közös érintőjét meghúzva a P pontba adódik, hogy $APC \sphericalangle = BPC \sphericalangle$. Ez az ellipszis érintőinek szögfelezőtulajdonságából és a kör érintési pontba húzott sugarának érintőre való merőlegességéből következik. Mivel A, B, C pontok szerepe felcserélhető, ezért $APC \sphericalangle = BPC \sphericalangle = APB \sphericalangle$. Vagyis a P pont, mely a háromszög Fermat-pontja, egyben a háromszög izogonális pontja is. $\square$

Torricelli és Cavalieri erre az esetre szerkesztési eljárást is adott. A szerkesztés során a háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket rajzoltak, majd ezen háromszögek köréírható körét szerkesztették meg. Ezeknek a köröknek a metszés pontja lesz az izogonális pont, hiszen ezek éppen az eredeti háromszög oldalaira írt 120° -os látókörvéek. (Lásd 2. Ábra.)



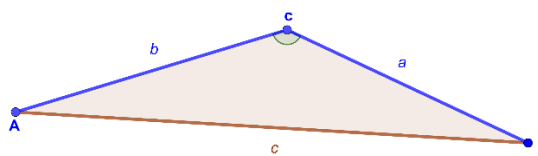
2. Ábra: Izogonális pont szerkesztése

Simpson szerkesztési eljárása ehhez nagyon hasonló: Emeljünk szabályos háromszögeket az ABC háromszög oldalaira és nevezzük el az új csúcsokat A', B', C' -nek! Ekkor az AA', BB', CC' egyenesek közös

metszéspontja lesz az izogonális pont, továbbá $AA' = BB' = CC' = AP + BP + CP$. Ennek oka, hogy $BB'C$ és $AA'C$ illetve $AA'B$ és $CC'B$ háromszögek egybevágóak, továbbá $APCB'$ egy körön van, amelyre alkalmazható a kerületi és középponti szögekre vonatkozó tétel és CPB' , APB' háromszögekben az oldalak közti összefüggések. (Lásd 2. Ábra.)

A kötött esetben, vagyis, ha az A , B , C pontok által meghatározott háromszögnek van egy legalább 120° -os csúcsa, akkor az a P pont, melynek e háromtól vett távolságösszege minimális, a tompaszögnél lévő csúcs lesz. Ennek oka, hogy a lebegő esetenél megismert bizonyítás akkor nem működik, ha a bizonyítás során említett valamelyik szög nem létezik. Ez pedig csak akkor fordulhat elő, ha a P pont megegyezik valamelyik csúccsal vagyis CP szakasz elfajul.

Összefoglalva tehát az eddigieket, ha adott három olyan pont, melyek által meghatározott háromszögnek minden szöge kisebb 120° -nál, akkor a három ponthoz tartozó Steiner-fa, vagyis a köztük lévő minimális hosszúságú hálózat csúcsai a megadott pontok és a hozzájuk tartozó izogonális pont, a hálózat hossza pedig az izogonális pont csúcsoktól vett távolságainak összege. Ha a három pont által meghatározott háromszögnek van egy legalább 120° -os csúcsa, akkor a Steiner-fa csúcsai a megadott pontok, a hálózat hossza pedig a két hegyesszögű csúccsal szemközti oldal hosszának összege. (Lásd 3. Ábra.)



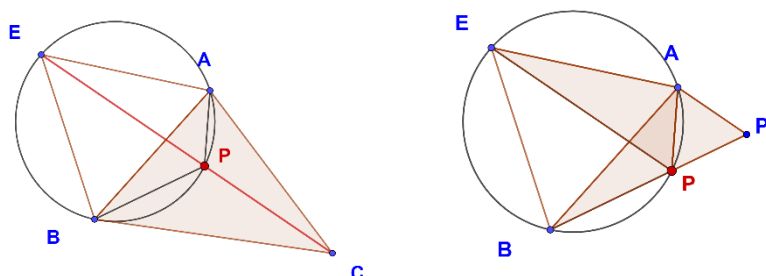
3. Ábra: Steiner-fa legalább 120 fokos csúcs esetén

12.2. Három pont Steiner-fájának hossza

Most vizsgáljuk meg, mit mondhatunk még három pont Steiner-fájának hosszáról, ha a három pont által meghatározott háromszög minden szöge kisebb 120° -nál.

Tétel: Adott három pont a síkon, melyek által meghatározott háromszög minden szöge kisebb 120° -nál. Ekkor a három pont Steiner-fájának hossza megegyezik az egyik oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsát és az oldallal szemkötti csúcsot összekötő szakasz hosszával.

Bizonyítás: Legyen a megadott három pont A, B, C , az általuk meghatározott háromszög Fermat-pontja P , az AB oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsa pedig E . (Lásd 4. Ábra.)



4. Ábra: Három pont Steiner-fájának hossza

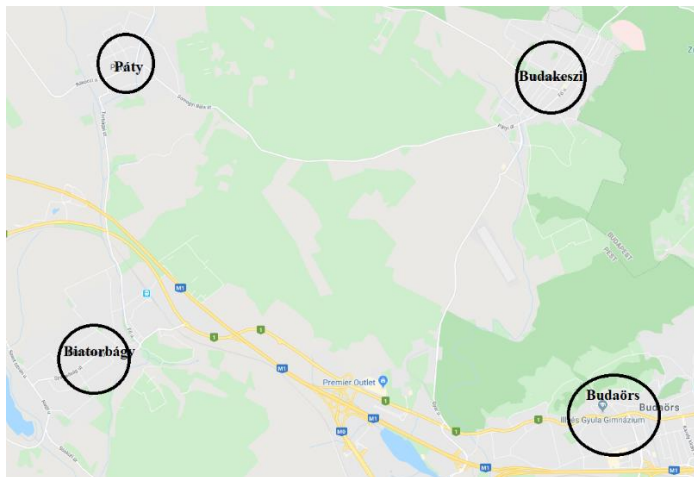
Ekkor az ABC háromszög Steiner-fájának hossza: $AP+BP+CP$ szakaszok összege. Mivel APE, BPE, AEB szögek ugyanolyan hosszúságú húrhoz tartozó kerületi szögek, ezért mindegyik szög 60° -os. Tehát BPA szög 120° -os. Ha APE háromszöget 60° -kal elforgatjuk A körül, akkor E képe B , P képe P' lesz. (Lásd 4. Ábra) Ekkor APP' háromszög szabályos, vagyis $AP=PP'$. Tehát $BP'=EP=BP+AP$. Mivel APE szög 60° -os, APC szög pedig 120° -os, hiszen P izogonális pont, ezért E, P, C pontok egy egyenesen vannak. Tehát $AP+BP+CP = EP+PC = EC$. $\square$

13. Négy pont Steiner-fája

Három ponthoz tartozó Steiner-fa keresése után, immár foglalkozhatunk a négy pont Steiner-fájának problémakörével. Ugyan csak egy ponttal bővítettük az eredeti csúcshalmazt, mégis lényegesen nehezebbé vált a feladat. A problémakörhöz tartozó tételek és bizonyítások H. O. Pollak cikkén [5], illetve Pártos Boglárka TDK dolgozatán [4] alapszanak.

13.1. A téglalap Steiner-fája

Mielőtt az autópályaépítéssel kapcsolatos problémában elmélyednénk, vizsgáljuk meg, Biatorbágy, Páty, Budakeszi és Budaörs közötti útépitési lehetőségeket. Hogyan lenne célszerű úthálózatot építeni ezen négy város közé úgy, hogy a lehető legkevesebb aszfaltot használjuk fel?



5. Ábra: Térkép-téglalap

Ha ránézünk a Biatorbágyot, Pátyot, Budakeszit és Budaörsöt tartalmazó térképre (Lásd 5. Ábra.), akkor látható, hogy az említett négy település megközelítőleg egy téglalap négy csúcsában helyezkedik el. Mivel az eddigiek alapján a kérdéses úthálózathoz alkotott matematikai modellünk a téglalap Steiner-fájának megkeresését tűzi ki célul, ezért a következőkben vizsgáljuk meg a téglalap Steiner-fáját!

Ha nem veszünk fel új pontot, akkor egy olyan úthálózatot javasolnánk, amely a téglalap két rövidebb oldalát és az egyik hosszabb oldalát tartalmazza. Azonban könnyen észrevehető, hogy ha egy belsőpontot, mint csomópontot létrehozunk és azt kötjük össze a csúcsokkal, akkor máris rövidebb hálózathoz jutunk. Ezek között a hálózatok között pedig a minimális távolságösszeggel a háromszögegyenlőtlenség miatt az rendelkezik, amelyik a téglalap átlóinak metszéspontját tartalmazza új pontként.

Ha a gondolatmenetet folytatjuk, adódik a kérdés, hogy még egy, kettő, vagy három stb. új pont felvételével javítható-e a hálózat. A választ három

pont Steiner-fájának segítségével kaphatjuk meg. Először vizsgáljuk meg még egy új pont felvételének lehetőségét!

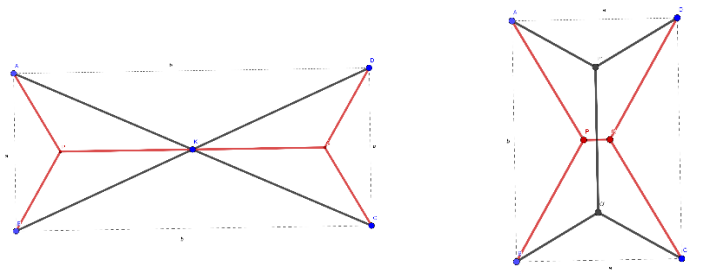
Mint a három pont vizsgálatakor, most is két esetet kell taglalnunk.

1. A téglalap átlóinak szöge kisebb, mint 60° .
2. A téglalap átlóinak szöge legalább 60° .

Első esetben tekintsük azt a két egybevágó háromszöget, melyeknek egyik csúcsa az átlók metszéspontja, másik kettő pedig a téglalap egy-egy rövidebb oldalának két végpontja. E háromszögek tartalmazzák a téglalap átlói által bezárt szöget, így ezekben a háromszögekben minden szög kisebb mint 120° . Ekkor viszont e háromszögek Steiner-fáját ismerve javítható az eredeti, átlók metszéspontját tartalmazó hálózat. Hiszen a két egybevágó háromszögnek két-két oldalát lecserélve a két háromszög Steiner-fájára rövidebb hálózathoz jutunk.

Ekkor az egyenlőoldalú háromszög tulajdonságainak, vagy a szögfüggvények ismeretében kiszámítható a hálózat hossza, amely $\sqrt{3}a + b$, ahol a a téglalap rövidebbik, b a hosszabbik oldala.

Mivel a másik két háromszögben az átlók metszéspontjánál található a Fermat-pont, ezért azon háromszögek segítségével nem javítható a hálózat. (Lásd 6. Ábra.)



6. Ábra: Téglalap egy illetve két Steiner-fával

Második esetben a két-két egybevágó egyenlőszárú háromszögnek mindegyik szöge 120° -nál kisebb, ezért az előzőhöz hasonlóan kétféleképpen is javítható az eredeti hálózat. Az így kapott hálózatok hossza $\sqrt{3}a + b$ illetve $\sqrt{3}b + a$. Mivel (a korábbi jelölést használva) $a < b$, ezért

$\sqrt{3}a + b < \sqrt{3}b + a$ vagyis az a hálózat a minimális, amelyik a rövidebb oldalakhoz tartozó háromszögek Fermat-pontjaival állt elő. (Természetesen, ha ez a téglalap négyzet, akkor mindkét hálózat egyenlő hosszúságú.)

Beláttuk tehát, hogy a rövidebb oldalhoz tartozó Fermat-pontok segítségével javítható a hálózat. Továbbá belátható, hogy téglalap esetében a rövidebb oldalhoz tartozó Steiner-fa lesz a minimális összhosszúságú hálózat, vagyis további pontok felvételével nem javítható a hálózat. A későbbiekben láthatjuk majd ennek az általános bizonyítását konvex négyszögek esetében.

Most, hogy megismertük a téglalap Steiner-fáját, megoldottuk a matematikai modellben a problémát. Azonban, ha megvizsgáljuk a térképen a négy településhez tartozó úthálózatot láthatjuk, hogy az nem hasonlít a téglalap Steiner-fájára. Ugyanis, bár a matematikai modell szerint ez lenne a megfelelő, a validálás során kiderül, hogy például a domborzati viszonyok nem teszik lehetővé ilyen úthálózat kialakítását. Tehát a valós modell megalkotásakor túl sok elhanyagolást tettünk. Így a validálás rávilágít, hogy ebben az esetben a modellezési ciklust a második ponttól újra kell kezdeni.

13.2. Fermat-pontok a minimális Steiner-fában

A téglalap Steiner-fájának vizsgálata után szeretnénk általános négyszögek Steiner-fáit is vizsgálni, azonban ahhoz, hogy a négyszögek Steiner-fáira vonatkozó tételeket be tudjuk látni, szükségünk van a minimális Steiner-fában található Fermat-pontok vizsgálatára. Először vizsgáljuk meg, mit mondhatunk egy Steiner-fában található Fermat-pontról, majd pedig, hogy legfeljebb hány darab ilyen Fermat-pont található egy Steiner-fában.

Tétel: A minimális Steiner-fában minden Fermat-pontból pontosan 3 él indul ki és az élek által bezárt szögek 120° -osak.

Bizonyítás: A minimális Steiner-fában a Fermat-pontokból nem indulhat ki pontosan egy él, mivel ekkor a Fermat-pontokat törölve rövidebb hálózathoz jutunk. Ha a Fermat-pontokból pontosan két indul ki, akkor az élek végpontjait összekötő szakasz hossza kisebb vagy egyenlő lesz a Fermat-pontból kiinduló két él hosszának összegénél a háromszög egyenlőtlenség miatt. Vagyis ilyen módon szintén rövidebb hálózathoz jutnánk.

Ebből következik, hogy a minimális Steiner-fában a Fermat-pontokból *legalább három él indul ki*.

A Fermat-pontokból kiindulók élek közül, semelyik kettő *nem zárhat be 120° -nál kisebb szöget*. Ugyanis, ha valamelyik két él 120° -nál kisebb szöget zárna be, akkor ezen a két szögszáron A és B pontot kijelölve keletkezne egy olyan háromszög melynek csúcsai A , B és a Fermat-pont. Ekkor azonban a minimális Steiner-fa hosszát csökkenthetnénk ezen háromszög Fermat-pontjának segítségével.

Ebből az is következik, hogy egy Fermat-pontból *legfeljebb három él* indulhat ki. Ugyanis ha négy vagy annál több él indulna ki, akkor biztosan keletkezne 120° -nál kisebb szög. Így beláttuk, hogy a minimális Steiner-fában található *Fermat-pontokból pontosan három él indul ki*.

Viszont, hogyha egy Fermat-pontból pontosan három él indul ki és bármely kettő által bezárt szög legalább 120° , akkor ebből következik, *hogy az élek által bezárt szögek mindenhol pontosan 120° -osak*. $\square$

Tétel: Adott n pont a síkon. Ekkor legfeljebb $n-2$ Fermat-pont felvételével megszerkeszthető az n pont minimális Steiner-fája.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a minimális Steiner-fának k darab Fermat-pontja van. Ekkor $n+k$ pontunk van, amelyek között $n+k-1$ él megy, mivel egy m csúcsú fának $m-1$ éle van. Az élek számáról azonban mást is tudunk. Minden Fermat-pontból 3 él indul ki és minden csúcsból legalább egy. Vagyis így az élek száma legalább $\frac{3k+n}{2}$. Tehát:

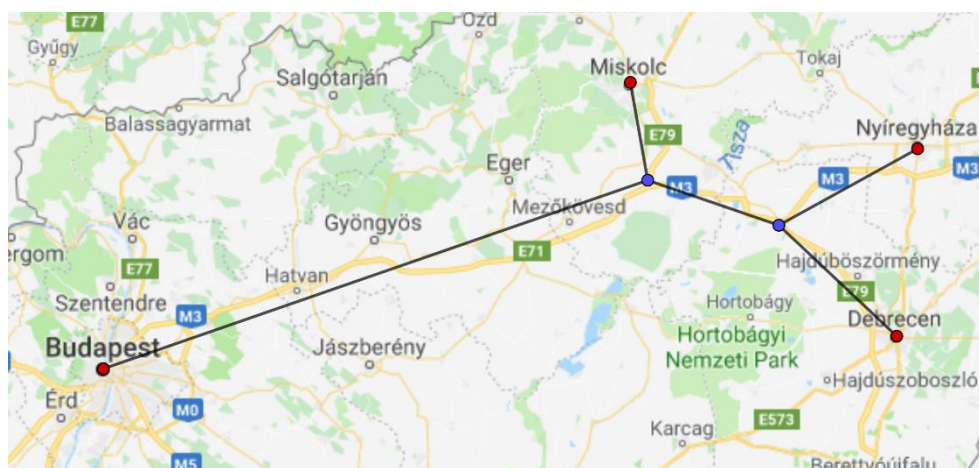
$$n+k-1 \geq \frac{3k+n}{2}, \text{ amiből átrendezéssel kapjuk } n-2 \geq k.$$

Vagyis egy n csúcsú minimális Steiner-fának legfeljebb $n-2$ Fermat-pontja lehet. $\square$

Ha egy n csúcsú Steiner-fának pontosan $n-2$ Fermat-pontja van, akkor „teljes” Steiner-fának hívjuk. Ha a Steiner-fa nem teljes, akkor lebontható kisebb teljes Steiner-fákra, melyek a megadott pontokban találkoznak.

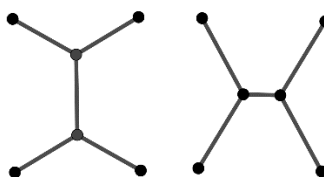
13.3. Általános négy pont Steiner-fája

A téglalap Steiner-fájának megismerése után már sejtjük, hogy az eredeti, autópályaépítésre vonatkozó kérdésünkre is a Steiner-fák fogják megadni a választ. Ráadásul, ha ránézünk a térképre, a megépített autópálya erősen emlékeztet is minket már megismert Steiner-fákra. (Lásd 7. Ábra.) Remélve, hogy a Steiner-fák egy megvalósított alkalmazására bukkantunk, áttekintjük a négy pont Steiner-faira vonatkozó ismereteinket.



7. Ábra: M3 autópálya

Általános n pont Steiner-fájának vizsgálatakor láttuk, hogy legfeljebb $n-2$ Fermat-pont felvételével megszerkeszthető n pont Steiner-fája. Vagyis négy pont esetében a Steiner-fa keresés során legfeljebb két Fermat-pontot kell megtalálnunk. Ha a négy ponthoz tartozó mindkét Fermat-pontot megtaláltuk, akkor a Steiner-fa kétféleképpen nézhet ki (Lásd 8. Ábra.):



8. Ábra: Négy pont Steiner-fája két Fermat-ponttal

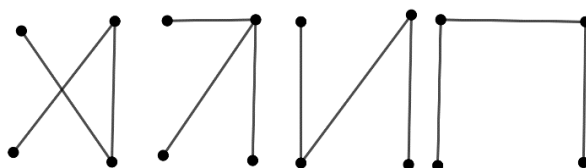
Amennyiben egy Fermat-pont segítségével keressük a legrövidebb hálózatot, úgy négy lehetőségünk van attól függően, hogy melyik három

ponthoz tartozó Fermat-pontot találtuk meg. Így ennek a hálózatnak a csúcshalmaza a négy pontból és valamelyik háromhoz tartozó Fermat-pontból, élhalmaza pedig egy oldalból és a kiválasztott három pont Steiner-fájából fog állni. Ekkor a 9. ábrához hasonló hálózatot kapunk.



9. Ábra: Négy pont Steiner-fája egy Fermat-ponttal

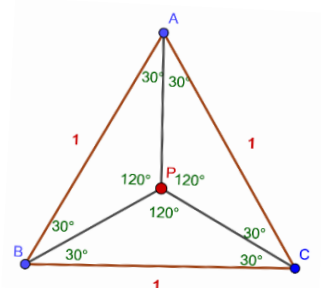
Előfordulhat, hogy új pont felvétele nélkül keressük a legrövidebb úthálózatot. Ekkor, mivel a csúcsok mindegyikét különbözőnek tekintjük (mert például városok) összesen tizenhat lehetőség adódik. Attól függően, hogy a négy csúcs által meghatározott négyszög oldalai és átlói közül melyeket vesszük bele a hálózatba, ezek egymáshoz való elhelyezkedésének szempontjából a tizenhat esetre négy lehetőség adódik. Amelyek a 10. Ábrán láthatóak, annak megfelelően, hogy két átlót és egy oldalt, két szomszédos oldalt és a közös csúcsból induló átlót, két nem szomszédos oldalt és egy átlót vagy három oldalt veszünk be a hálózatba.



10. Ábra: Négy pont Steiner-fája Fermat-pont nélkül

Gyakorlati szempontból, ahogy az autópálya esetében is felmerült, a Steiner-fa hossza érdekes számunkra. Belátható, hogy a Steiner-fa hossza legfeljebb akkora, mint a minimális feszítőfáé, amely egy olyan hálózat, ami a megadott pontokon kívül nem tartalmaz más csúcsokat. Három megadott pont esetén Gilbert és Pollak belátta [5], hogy a Steiner-fa legalább a feszítőfa $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szerese. Egyenlőség szabályos háromszög esetén fordul elő. (Lásd 11. Ábra.) Ami azt jelenti, hogy szabályos háromszög esetében, ha a feszítőfa helyett a Steiner-fát alkalmazzuk akkor, 15 százalékkal rövidebb

hálóhoz jutunk. Később Pollak azt is belátta, hogy ez az egyenlőtlenség négy pont esetén is fennáll.



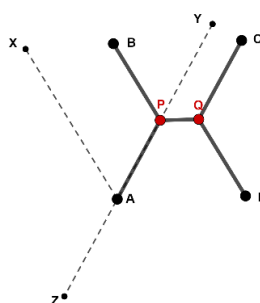
11. Ábra: Szabályos háromszög Steiner-fája

Az alfejezet elején több lehetőséget is bemutatattam négy pont Steiner-fájának alakjára, attól függően, hogy hány Fermat-pontot veszünk fel a meglévő csúcsok közé. A kérdés az, hogy ezek közül melyik lesz a minimális Steiner-fa, vagyis a legrövidebb háló.

Ahogy a téglalap esetében láttuk, előfordulhat, hogy két olyan Steiner-fa is létezik, melyek két Fermat-pontot tartalmaznak. Akkor azt is megállapítottuk, hogy amelyik a rövidebb oldalhoz tartozik, az lesz a rövidebb. Ez általános négy pontra is igaz. Vagyis: Ha adott négy pont a síkon és létezik mindkét Steiner-fa, melyek két-két Fermat-pontot tartalmaznak, akkor az lesz a minimális, amelyik Fermat-pontjai a négyszög átlói által meghatározott hegyesszögű háromszögek Fermat-pontjai. Ha az átlók merőlegesek egymásra, akkor a két Steiner-fa egyenlő hosszúságú. Ennek bizonyításához, szükségünk van a következő állításra.

Tétel: Ha $ABCD$ négyszögnek létezik olyan Steiner-fája, mely két Fermat-pontot tartalmaz, akkor ez a négyszög konvex.

Bizonyítás: Tekintsük a következő ábrát:



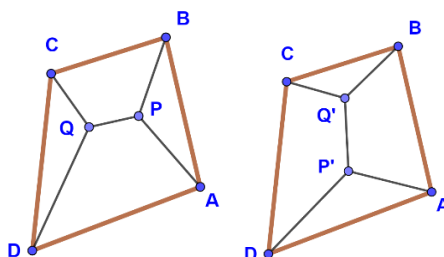
12. Ábra

$(AB)-P-Q-(CD)$ Steiner-fa Fermat-pontjai P és Q , amelyeknél minden szög 120° -os. Húzzunk A ponton keresztül párhuzamos félegyenest a BP szakasszal az AP szakaszt tartalmazó egyenesnek azon félsíkjába, melyben a B pont is található. Legyen ennek a félegyenestek egy tetszőleges pontja X . Ezt követően jelöljük ki az AP szakaszt tartalmazó egyenesen Y és Z pontokat úgy, hogy mindkét pont az AP szakaszon kívül, Z az A ponthoz, Y pedig a P ponthoz legyen közelebb. Ekkor a B pont az XAY szög belsejében található. Azonban ACD háromszög az YZ egyeneshez tartozó azon félsíkjában van, mely nem tartalmazza B -t. Tehát B nem lehet benne az ACD háromszögben. Hasonlóan látható, hogy a többi csúcs sincs a másik három csúcs által meghatározott háromszögben. Vagyis $ABCD$ négyszög konvex. $\square$

Most pedig térjünk vissza arra a kérdésre, hogy ha $ABCD$ négyszög mindkét két Fermat-pontot tartalmazó Steiner-fája létezik, akkor melyik a rövidebb.

Tétel: Ha $ABCD$ négyszög mindkét két Fermat-pontot tartalmazó Steiner-fája létezik, akkor az lesz a minimális Steiner-fa, melynek Fermat-pontjai a négyszög átlói által meghatározott hegyesszögű háromszögekben találhatóak. Ha az átlók merőlegesek egymásra, akkor a két Steiner-fa egyenlő hosszúságú.

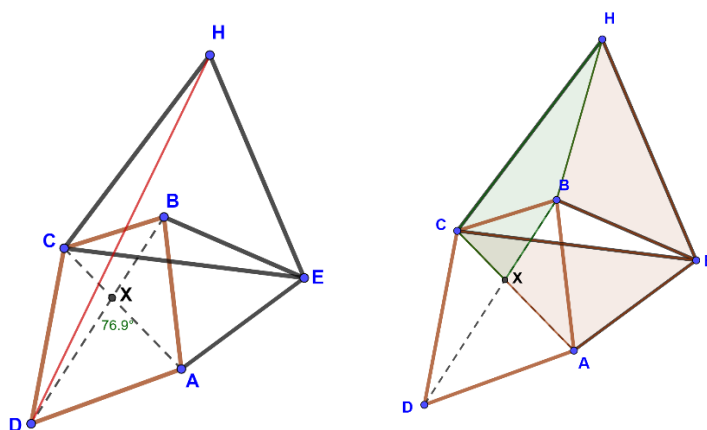
Bizonyítás: Mivel létezik mindkét két Fermat-pontot tartalmazó Steiner-fa, az előző állítás értelmében az $ABCD$ négyszög konvex. Ekkor ez a két Steiner-fa a 7. ábrához hasonlóan fog kinézni. Legyen az egyik Steiner-fa az $(AB)-P-Q-(CD)$, a másik pedig $(AD)-P'-Q'-(BC)$, ahol P, Q, P', Q' Fermat-pontok. X pedig legyen a négyszög átlóinak metszéspontja. Vizsgáljuk először az előbbi Steiner-fát. (Lásd 13. Ábra.)



13. Ábra

Legyen E az AB oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög, H pedig a CE szakaszra kifelé rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsa. Ekkor a kérdéses Steiner-fa hossza a HD szakasz hossza. (Lásd 14. Ábra.) Ennek magyarázata a három pont Steiner-fájának hosszára vezethető vissza, melyet korábban bizonyítottam. Tehát $(AB)-P-Q-(CD)$ Steiner-fa hossza egyenlő $AP+BP+PQ+CQ+DQ$ szakaszok hosszának összegével, azonban $AP+BP=EP$ mivel P Fermat-pontja az ABQ háromszögnek, $CQ+QE=QH$ mivel Q Fermat-pontja a CDE háromszögnek, tehát $QH+DQ=HD$.

Az olvasó kedvéért megjegyezzük, hogy az ábra csalhat, hiszen DBH lehet homorúsög is.



14. Ábra

Mivel AEB és CEH háromszögek szabályosak, ezért $AE=EB$ és $CE=EH$. Továbbá $60^\circ - \angle CEB = \angle CEA$ és $60^\circ - \angle CEB = \angle HEB$, tehát $\angle CEA = \angle HEB$. Ennek következtében az ECA és EHB háromszögek egybevágóak. Ezt követően vizsgáljuk a $CXBH$ négyszöget. (Lásd 13. Ábra.)

$$\angle CXB + \angle XBH = 360^\circ - (\angle XCH + \angle BHC)$$

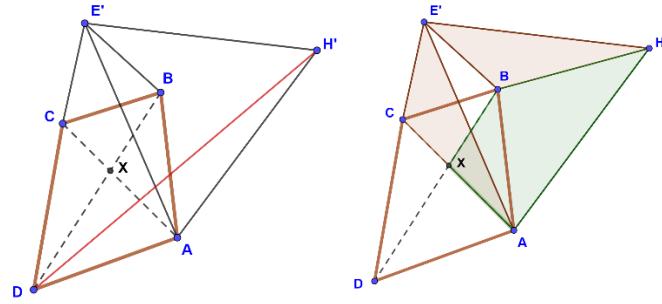
$$\angle CXB + \angle XBH = 360^\circ - (60^\circ + \angle ECA + 60^\circ - \angle BHE)$$

$$\angle CXB + \angle XBH = 240^\circ \text{ (mivel } \angle ECA = \angle BHE \text{)}$$

$$\angle DBH = 240^\circ - \angle CXB$$

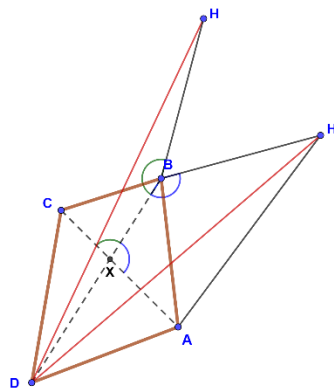
Ezután vizsgáljuk a másik, $(AD)-P'-Q'-(BC)$ Steiner-fát. (Lásd 13. Ábra.) Az előző gondolatmenethez hasonlóan ennek a fának a hossza

megegyezik DH' szakasz hosszával, illetve $DBH'\sphericalangle = 240^\circ - BXA\sphericalangle$. (Lásd 15. Ábra.)



15. Ábra

Lehetséges, hogy a $CXBH$ illetve $AXBH'$ négyszögekben $DBH\sphericalangle$ illetve $DBH'\sphericalangle$ nagyobb, mint 180° . (Lásd 15. Ábra.) Legyen a fent említett négyszögekben az alábbi két szög $DBH_n\sphericalangle$ és $DBH'_n\sphericalangle$ továbbá, ha ezeket a szögeket a DBH illetve DBH' háromszögekben vizsgáljuk, akkor pedig $DBH_h\sphericalangle$ és $DBH'_h\sphericalangle$. Ha $DBH\sphericalangle \leq 180^\circ$, akkor $DBH_n\sphericalangle = DBH_h\sphericalangle$. Ha pedig $DBH_n\sphericalangle > 180^\circ$, akkor pedig $DBH_n\sphericalangle = 360^\circ - DBH_h\sphericalangle$. Ugyanígy, ha $DBH'\sphericalangle \leq 180^\circ$, akkor $DBH'_n\sphericalangle = DBH'_h\sphericalangle$. Ha pedig $DBH'_n\sphericalangle > 180^\circ$, akkor pedig $DBH'_n\sphericalangle = 360^\circ - DBH'_h\sphericalangle$. Továbbá, mivel $DBH\sphericalangle = 240^\circ - CXB\sphericalangle$ és $DBH'\sphericalangle = 240^\circ - BXA\sphericalangle$, ezért $DBH\sphericalangle + DBH'\sphericalangle = 480^\circ - CXB\sphericalangle - BXA\sphericalangle = 300^\circ < 360^\circ$, így $DBH\sphericalangle$ és $DBH'\sphericalangle$ nem lehetnek mindketten nagyobbak 180° -nál. (Lásd 16. Ábra.)



16. Ábra

Most lássuk be, hogy $DBH_n \angle > DBH'_n \angle$ pontosan akkor, ha $DBH_h \angle > DBH'_h \angle$.

Tegyük fel, hogy $DBH_n \angle > DBH'_n \angle$. Ha $DBH_n \angle \leq 180^\circ$, akkor az összes többi szög is kisebb, mint 180° és a definíciók ugyanazok. Ha $DBH_n \angle > 180^\circ$, akkor $CXB \angle < 60^\circ$ és $BXA \angle > 120^\circ$, a korábban részletezett egyenlőségek miatt. Így $DBH_h \angle = 360^\circ - DBH_n \angle = 120^\circ + CXB \angle > 120^\circ$, míg $DBH'_h \angle = DBH'_n \angle = 240^\circ - BXA \angle < 120^\circ$. Tehát $DBH_h \angle > DBH'_h \angle$.

Most tegyük fel, hogy $DBH_h \angle > DBH'_h \angle$. Ha $DBH_n \angle$ és $DBH'_n \angle$ is kisebb, mint 180° akkor kész vagyunk. Ha $DBH_n \angle > 180^\circ$, akkor $DBH_n \angle > 180^\circ > DBH_h \angle > DBH'_h \angle = DBH'_n \angle$. Ha $DBH'_n \angle > 180^\circ$, akkor a már bebizonyított állítás miatt $DBH'_h \angle > DBH_h \angle$, ami ellentmondás.

Innen megkapjuk azt is, hogy $DBH_n \angle = DBH'_n \angle$ pontosan akkor, ha $DBH_h \angle = DBH'_h \angle$.

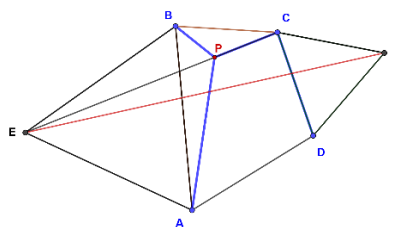
Folytatva az eredeti bizonyítást, mivel $BH=BH'$, ugyanis mindkettő egyenlő AC -vel a korábban említett egybevágó háromszögek miatt és egy háromszögben hosszabb oldallal szemben nagyobb szög található, ezért az eddigi eredmények felhasználásával megállapítható, hogy:

$DH=DH'$ pontosan akkor, ha $DBH_h \angle = DBH'_h \angle$, ami pontosan akkor igaz, ha $DBH_n \angle = DBH'_n \angle$, ami pontosan akkor igaz, ha $CXB \angle = BXA \angle$.

Illetve $DH>DH'$ pontosan akkor, ha $DBH_h \angle > DBH'_h \angle$, ami pontosan akkor igaz, ha $DBH_n \angle > DBH'_n \angle$, ami pontosan akkor igaz, ha $CXB \angle < BXA \angle$. Tehát a minimális Steiner-fa Fermat-pontjai a négyszög átlói által meghatározott hegyesszögű háromszögekben találhatóak $\square$

Ezt követően már csak azt kell belátnunk, hogy a minimális Steiner-fát akkor kapjuk meg, ha két Fermat-pontot veszünk a meglévő négy pont mellé. A kiindulás most is ugyanaz, tehát egy $ABCD$ konvex négyszögben gondolkodunk.

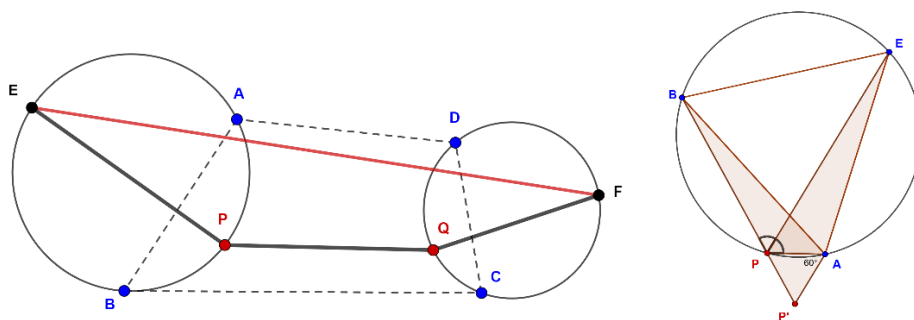
Legyen $ABCD$ konvex négyszög egy Fermat-pontja, az ABC háromszög izogonális pontja P . Ekkor a négyszög Steiner-fája ABC háromszög Steiner-fájából és AD , CD oldal valamelyikéből fog állni. Ha AB illetve CD oldalakra kifelé szabályos háromszögeket rajzolunk, ABE -t és CDF -t, akkor a Steiner-fa hossza $AP+BP+CP+CD$, (Lásd 17. Ábra.) ami egyenlő $EC+CD=EC+CF$ a három pont Steiner-fájának hosszára vonatkozó ismereteink alapján. Ami azonban hosszabb, mint EF szakasz hossza, ami a két Fermat-ponttal rendelkező Steiner-fa hossza lenne. $\square$



17. Ábra

Az eddigiek során feltettük, hogy létezik a két Fermat-ponttal rendelkező Steiner-fa, azonban a fa megszerkesztéséről eddig nem esett szó. A továbbiakban egy példát nézünk meg négy pont Steiner-fájának megszerkesztésére, mégpedig azt az esetet, amikor a négy pont által meghatározott négyszög konvex és minden szöge kisebb, mint 120° .

Mivel a keresett Fermat-pontokból mindig három él indul ki, amelyek egymással 120° -os szöget zárnak be, ezért két szemközti oldal 120° -os látóörívén fognak elhelyezkedni. Mivel tudjuk, hogy a minimális Steiner-fa Fermat-pontjai a négyszög átlói által meghatározott hegyesszögű háromszögben találhatóak, ezért ennek megfelelően választjuk meg a szemközti oldalakat. Legyen A, B, C, D a négyszög négy csúcsa, E és F az AB illetve CD oldalra kifelé írt szabályos háromszögek harmadik csúcsa, P és Q pedig a látóörívek egy-egy tetszőleges pontja. (Lásd 18. Ábra.) Mivel három pont Steiner-fájára vonatkozó ismereteink alapján tudjuk, hogy $PE=AP+BP$, ebből következik, hogy a Steiner-fa hossza az $EPQF$ töröttvonal hossza, ami akkor minimális, ha ez a négy pont egy egyenesen van. Vagyis az EF szakasznak a látóörívekkel vett metszéspontjai lesznek a Fermat-pontok, és így megszerkesztettük a keresett Steiner-fát.



18. Ábra: Négy pont Steiner-fájának szerkesztése

Mindezek után, ha alaposan szemügyre vesszük Budapest, Miskolc, Nyíregyháza és Debrecen között megépített autópályát a 7. ábrán láthatjuk, hogy két csomópont található rajta. Ezekbe három-három él fut be, melyek megközelítőleg 120° -t zárnak be egymással. Így megállapíthatjuk, hogy ezen négy város között az autópályát a négy városhoz, mint pontokhoz tartozó Steiner-fa élein halad.

14. Összegzés a matematikai részhez

Szakdolgozatomban a legrövidebb úthálózatot vizsgáltuk három, illetve négy pont esetén. Három pont esetén ez a háromszög izogonális pontjának segítségével kapható meg olyan háromszögek esetében, amelyeknek minden szöge 120° -nál kisebb. Amennyiben az egyik szög legalább 120° , úgy a legrövidebb úthálózatot a két hegyesszögű csúccsal szemközi oldal segítségével kapjuk meg.

Négyszögek esetében vizsgáltuk a teljes és nem teljes Steiner-fák lehetőségeit. Megállapítottuk, hogy a teljes Steiner-fát tartalmazó négyszög esetében az lesz a minimális Steiner-fa, melynek Fermat-pontjai a négyszög átlói által meghatározott hegyesszögű háromszögekben találhatóak. A minimális Steiner-fa hossza a négyszög megfelelő oldalaira kifele rajzolt szabályos háromszögek segítségével szerkeszthető meg. Olyan konvex négyszögek esetében, melyeknek minden szöge kisebb 120° -nál a szerkesztési eljárást a 13. fejezet végén részleteztem.

15.Hivatkozások

15.1. Hivatkozások a tanítási részhez

- [1] Chew, C. M.: Enhancing Students' Level of Geometric Thinking through Van Hiele's Phase-based Learning, *Indian Journal of Science and Technology*, U. Science Malaysia, 2009.
- [2] Chong, L.H.: Pembelajaran geometri menggunakan perisian GSP dan kaitannya dengan tahap pemikiran Van Hiele dalam geometri. *Unpublished master's thesis*, Universiti Malaya, Kuala Lumpur, 2001.
- [3] Csányi, P. – Pozsonyi, E. – Szabó, Zs.: A számelmélet oktatásának hatékonysága általános- és középiskolában. *TDK dolgozat*, 2014.
- [4] Grigoriadou, O.: Reasoning in geometry How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof, *Msc Thesis*, U. of Amsterdam, 2012.
- [5] Györy, Á.: Van Hiele levels of gifted Hungarian pupils (manuscript)
- [6] Herendiné Kónya, E.: A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei, *Iskolakultúra*, Debreceni Egyetem, 2003.
- [7] Jones, K.: Issues in the teaching and learning of geometry. In: Linda Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics*. London, Routledge, 2002.
- [8] *Kerettanterv 5-8. osztály*, 2012.
http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html
- [9] *Kerettanterv 9-12. osztály*, 2012.
http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html
- [10] Kospentaris, G. – Spyrou P.: Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-descriptive level, *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, Strasbourg, 2008.
- [11] Kovács, V. – Palotay, D.: Ez is hungaricum - A modern tudomány és az oktatás kapcsolata. *TDK dolgozat*, 2012.
- [12] *Nemzeti alaptanterv*, 2012.

http://ofi.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf

- [13] Rafidah Mohd Nor.: Mengenalpasti tahap pemahaman pelajar sekolah menengah mengenai konsep geometri berdasarkan kepada teori van Hiele. *Unpublished master's thesis*, Universiti Kebangsaan Malaysia, Bangi, 2003.
- [14] Selkirk, C. H.: An investigation into the level of understanding of two-dimensional shapes among learners at the end of the Intermediate Phase in a well-resourced former Model school in the Eastern Cape: A case study, *M. Ed.*, U. of Fort Hare, 2011.
- [15] Tay Bee Lian.: A Van Hiele-based instruction and its impact on the geometry achievement on form one students. *Unpublished master's thesis*, Universiti Malaya, Kuala Lumpur. 2003.
- [16] Usiskin, Z.: Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project Department of Education, University of Chicago, US., 1982.
- [17] Wang, S.: The van Hiele theory through the discursive lens: Prospective teachers' geometric discourses, *PhD dissertation*, Michigan State University, 2011.
- [18] Zachos, I.: Problem Solving in Euclidean Geometry in Greek Schools, *PhD dissertation*, The U. of Leeds School of Education, 1994.

15.2. Hivatkozások a matematikai részhez

- [1] Cavalieri, B.: Exercitationes Geometricae Sex, 1647.
- [2] Dörrie, H.: A diadalmas matematika. Gondolat, Budapest, 1965.
- [3] de Fermat, P., Oeuvres, Vol. I., 1891.
- [4] Pártos B.: NUMB3RS a középiskolában. TDK dolgozat, Budapest, 2011.
- [5] Pollak, H. O.: Some Remarks on the Steiner Problem. Journal of Combinatorial Theory, Series A 24, 278-295, 1978.
- [6] Promel, Hans Jurgen; Steger, Angelika, The Steiner tree problem. A tour through graphs, algorithms, and complexity Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig, 2002. viii+241 pp.
- [7] S. Schukajlow, D. Leiss, R. Pekrun, W. Blum, M. Müller and R. Messner, 2012. Teaching methods for modelling problems and student's task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. Educational Studies in Mathematics, 79(2), 215-237.
- [8] Szmerka G.: Ízelítő a Fermat–Torricelli problémakörből, KöMaL 58 2008., 194–201.
- [9] Torricelli, E.: De maximis et minimis, In Opere di Evangelista Torricelli (ed. Loria, G. and Vassura), G. Faenza, Italy, 1919.

16. Melléklet

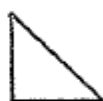
Van Hiele geometriai teszt*

Minden kérdésnél egyetlen válasz helyes.

Kidolgozási idő: 35 perc.

1. Melyik négyzet?

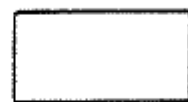
- a. Csak K.
- b. Csak L.
- c. Csak M.
- d. Csak L és M.
- e. Mind az.



K



L



M

2. Melyik háromszög?

- a. Egyik sem.
- b. Csak V.
- c. Csak W.
- d. Csak W és X.
- e. Csak V és W.



U



V



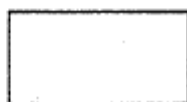
W



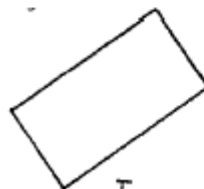
X

3. Melyik téglalap?

- a. Csak S.
- b. Csak T.
- c. Csak S és T.
- d. Csak S és U.
- e. Mind az.



S



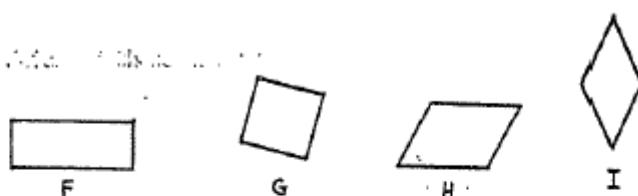
T



U

4. Melyik négyzet?

- a. Egyik sem.
- b. Csak G.
- c. Csak F és G.
- d. Csak G és I.
- e. Mind az.



5. Melyik paralelogramma?

- a. Csak J.
- b. Csak L.
- c. Csak J és M.
- d. Egyik sem.
- e. Mind az.

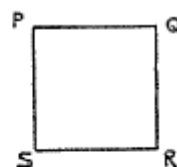


copyright ©1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago

1

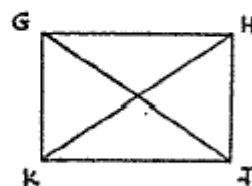
6. PQRS egy négyzet (lásd ábra). Melyik állítás igaz rá?

- a. PR és RS ugyanolyan hosszúságú.
- b. QS és PR merőlegesek egymásra.
- c. PS és QR merőlegesek egymásra.
- d. PS és QS ugyanolyan hosszúságú.
- e. A Q-nál lévő szög nagyobb, mint az R-nél lévő szög.



7. GHJK egy téglalap, GJ és HK az átlói (lásd ábra). Melyik állítás nem igaz rá a-d közül?

- a. Négy derékszöge van.
- b. Négy oldala van.
- c. Átlói egyenlő hosszúságúak.
- d. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.
- e. a-d közül mind igaz rá.



8. Melyik állítás nem igaz egy tetszőleges rombuszra (lásd ábra) a-d közül?

- a. A két átlója egyenlő hosszúságú.
- b. Mindkét átlója felezi a rombusz két-két szögét.
- c. A két átlója merőleges egymásra.
- d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
- e. a-d közül mind igaz.



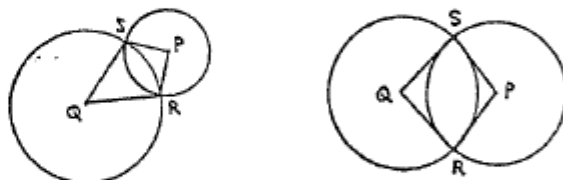
9. Melyik állítás igaz egy egyenlő szárú háromszögre (lásd ábra) a-d közül?

- Mindhárom oldala egyenlő hosszúságú kell, hogy legyen.
- Az egyik oldalának kétszer akkorának kell lennie, mint egy másiknak.
- Legalább két szöge egyenlő nagyságú kell, hogy legyen.
- Három szögének egyenlő nagyságúnak kell lennie.
- a-d közül egyik sem igaz.



10. Egy P és egy Q középpontú kör metszéspontjai R és S. Ezek a pontok meghatározzák a PQRS alakzatot. Két példát meg is adtunk (lásd ábra). a-d közül melyik állítás nem mindig igaz?

- PQRS-nek van két egyenlő hosszúságú oldalpárja.
- PQRS-nek legalább két szöge egyenlő nagyságú.
- A PQ és RS egyenesek merőlegesek egymásra.
- A P-nél és Q-nál lévő szögek egyenlő nagyságúak.
- a-d közül mind igaz.



2

11. Tekintsük a következő két állítást:

- Az F alakzat téglalap.
- Az F alakzat háromszög.

Melyik igaz az alábbiak közül?

- Ha i igaz, akkor ii is az.
- Ha i hamis, akkor ii igaz.
- i és ii egyszerre nem lehet igaz.
- i és ii nem lehet egyszerre hamis.
- a-d közül egyik sem igaz.

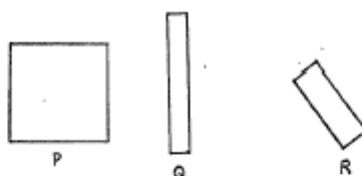
12. Tekintsük a következő két állítást:

- Az ABC háromszögnek van három egyenlő hosszúságú oldala.
- Az ABC háromszögben a B-nél, illetve a C-nél lévő szögek egyenlő nagyságúak.

Melyik igaz az alábbiak közül?

- i és ii egyszerre nem lehet igaz.
- Ha i igaz, akkor ii is az.
- Ha ii igaz, akkor i is az.
- Ha i hamis, akkor ii is hamis.
- a-d közül egyik sem igaz.

13. Az alábbiak közül melyik téglalap?



- a. Mind az.
- b. Csak Q.
- c. Csak R.
- d. Csak P és Q.
- e. Csak Q és R.

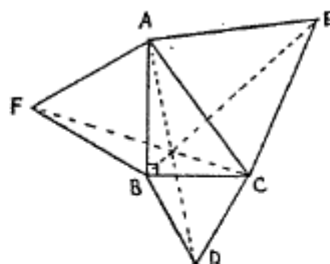
14. Melyik igaz?

- a. A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes négyzetnek is.
- b. A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes téglalapnak is.
- c. A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
- d. A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
- e. a-d közül egyik sem igaz.

15. Az alábbiak közül melyik az, ami minden téglalapra igaz, de bizonyos paralelogrammákra nem?

- a. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.
- b. Átlói egyenlő hosszúságúak.
- c. Szemközti oldalai párhuzamosak.
- d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
- e. a-d közül egyik sem igaz.

16. Az alábbi ábrán az ABC háromszög derékszögű (a B-nél lévő szöge a derékszög), míg a CBD, ACE és BAF háromszögek szabályosak:



Meg lehet mutatni, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át. Mít mondana számodra ez a bizonyítás?

- Csak a fent megrajzolt háromszög esetén lehetünk biztosak abban, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
- Néhány, de nem mindegyik derékszögű háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
- Bármelyik derékszögű háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
- Bármelyik háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
- Bármelyik szabályos háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.

17. Adott három tulajdonság egy alakzatról:

- Vannak egyenlő hosszúságú átlói.
- Az alakzat négyzet.
- Az alakzat téglalap.

Melyik igaz?

- i-ből következik ii, amiből pedig iii.
- i-ből következik iii, amiből pedig ii.
- ii-ből következik iii, amiből pedig i.
- iii-ből következik i, amiből pedig ii.
- iii-ből következik ii, amiből pedig i.

18. Van két állításunk:

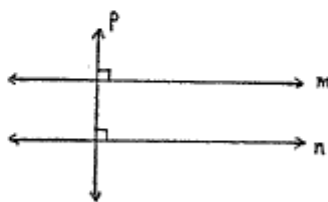
- Ha egy alakzat téglalap, akkor átlói felezik egymást.
- Ha egy alakzat átlói felezik egymást, akkor téglalap.

Melyik igaz?

- i helyességének bizonyításához elég belátni, hogy ii igaz.
- ii helyességének bizonyításához elég belátni, hogy i igaz.
- ii helyességének bizonyításához elég találni egy téglalapot, melynek átlói felezik egymást.
- ii hamisságának bizonyításához elég találni egy olyan alakzatot, amely nem téglalap és átlói felezik egymást.
- a-d közül egyik sem igaz.

19. A geometriában:
- minden fogalom definiálható, és minden igaz állításról bizonyítható helyességük.
 - minden fogalom definiálható, de bizonyos állításokról szükségszerű feltenni, hogy igazak.
 - bizonyos fogalmaknak definiálatlanoknak kell lenniük, de minden igaz állításról bizonyítható annak helyessége.
 - bizonyos fogalmaknak definiálatlanoknak kell lenniük, de szükségszerűen vannak olyan állítások, melyekről fel van téve, hogy igazak.
 - a-d közül egyik sem igaz.
20. Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:
- Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.
 - Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.
 - Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

- Csak i-ből.
- Csak ii-ből.
- Csak iii-ből.
- i-ből vagy ii-ből.
- ii-ből vagy iii-ből.

21. Egy F-geometriában (ami különbözik attól, amihez hozzá vagy szokva) pontosan négy pont van és hat egyenes. Minden egyenesnek pontosan két pontja van. Ha a pontok P, Q, R, S , akkor az egyenesek $\{P, Q\}, \{P, R\}, \{P, S\}, \{Q, R\}, \{Q, S\}, \{R, S\}$.

Ebben a geometriában a metszi és a párhuzamos a következőt jelenti: például $\{P, Q\}$ és $\{P, R\}$ metszik egymást, hiszen P közös pontjuk, míg például $\{P, Q\}$ és $\{R, S\}$ párhuzamosak, mivel nincs közös pontjuk.

Az alábbiak közül melyik helyes?

- $\{P, R\}$ és $\{Q, S\}$ metszik egymást.
- $\{P, R\}$ és $\{Q, S\}$ párhuzamosak.
- $\{Q, R\}$ és $\{R, S\}$ párhuzamosak.
- $\{P, S\}$ és $\{Q, R\}$ metszik egymást.
- a-d közül egyik sem igaz.

22. 1847-ben P. L. Wantzel általánosan bebizonyította, hogy csak körzővel és jelöletlen (azaz távolságmérésre alkalmatlan) vonalzóval nem lehet szöget harmadolni. Milyen következtetéseket tudsz ebből leszűrni?
- Általánosan igaz, hogy csak körzővel és jelöletlen vonalzóval nem lehet szöget felezni.
 - Általánosan igaz, hogy csak körzővel és jelölt (azaz távolságmérésre alkalmas) vonalzóval nem lehet szöget harmadolni.
 - Általánosan igaz, hogy semmilyen rajzadási eljárással nem lehet szöget harmadolni.
 - Még lehetséges, hogy a jövőben valaki talál egy általános eljárást arra, hogy hogyan lehet csak körzővel és jelöletlen vonalzóval szöget harmadolni.
 - Soha senki nem fog tudni általános eljárást adni arra, hogy hogyan lehet csak körzővel és jelöletlen vonalzóval szöget harmadolni.
23. Létezik olyan J által felfedezett geometria, melyben érvényes az alábbi állítás:
A háromszögek belső szögeinek összege kisebb, mint 180° .
Melyik helyes az alábbiak közül?
- J hibát követett el a háromszögek szögeinek mérése során.
 - J hibázott a logikai érvelése során.
 - J -nek rossz képzele volt a „helyes” fogalmát illetően.
 - J a szokásos geometria feltevéseitől különböző feltételekből indult ki.
 - a-d közül egyik sem igaz.
24. Két geometriakönyv különböző módon definiálja a téglalap szót. Melyik helyes az alábbiak közül?
- A könyvek egyikében hiba van.
 - Az egyik definíció hibás, hiszen a téglalaprak nincs két definíciója.
 - Az egyik könyvbeli téglalapoknak más tulajdonságai kell, hogy legyenek, mint a másik könyvbelinek.
 - Az egyik könyvbeli téglalapoknak ugyanazon tulajdonságai vannak, mint a másik könyvbelinek.
 - Elképzélhető, hogy a különböző könyvekben a téglalapoknak más tulajdonságaik vannak.
25. Tegyük fel, hogy az i és ii állítás be van bizonyítva.
- Ha p , akkor q .
 - Ha s , akkor nem q .
- Melyik állítás következik i-ből és ii-ből?
- Ha p , akkor s .
 - Ha nem p , akkor nem q .
 - Ha p vagy q , akkor s .
 - Ha s , akkor nem p .
 - Ha nem s , akkor p .