

Szakdolgozat

Griece Melani

angol nyelv és kultúra tanára – matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi Kar

SZAKDOLGOZAT

LOGIKAI FELADATOK MATEMATIKÁJA



Témavezető:

Dr. Szabó Csaba
egyetemi tanár

Készítette:

Griecs Melani
angol nyelv és kultúra
tanára – matematikatanár
osztatlan tanári mesterszak

Budapest, 2022

Eredetiségi nyilatkozat

AlulírottGRIECS MELANI.....(név)

.....BLKSPR.....(Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE.....angol nyelv és kultúra - matematika.....osztatlan tanári mesterszakján

írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2022.....04.22.....

.....Griecs Melani.....

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	3
Bevezetés.....	4
1. Típusfeladatok	6
1.1. Példatári feladatok	6
1.2. A paradoxon – hamis állítások minimális száma.....	9
1.3. Nyelvi különbségek	12
1.4. Lehetséges feloldások	14
2. Rokonfeladatok	21
2.1. Igaz állítások maximális száma	21
2.2. Többértékű rendszerek.....	23
2.3. Egy érdekes példa	25
2.4. Igaz, hamis vagy nem állítás?- régi feladat újragondolása	27
3. Logika az osztályteremben	31
3.1. Az alaptantervek a logikáról	31
3.2. Tankönyvi tartalmak	33
3.3. Kísérlet a középiskolásokkal	34
Irodalomjegyzék	47

Bevezetés

A matematikai logika mindig az általam nagyon kedvelt témakörök közé tartozott, és az eddigi tapasztalataim alapján a diákok körében is - legyen szó általános vagy középiskolás tanulókról – nagy népszerűségnek örvend. Gondolkodtat, mindeközben teszi ezt szórakoztató jelleggel, nagyon változatos és izgalmas feladatokon keresztül. Egy kicsit talán ki is lóg a többi témakör közül, nem közértelemben vett matematikai feladatokról beszélhetünk, hiszen általában nem tartalmaznak számokat, változókat, vagy hagyományos értelemben vett műveleteket. Talán éppen ezért még olyan diákok számára is élvezetes lehet a logikai feladatok tanulmányozása, akik egyébként nem kedvelik különösebben a matematikát. Mivel tanárként elsődleges célom, hogy a lehető legtöbb tanuló számára élvezhetővé és érdekessé tegyem a tárgyat, az én szememben kiemelt szerepet kap a logika témaköre. Sok más matematikusszerző mellett jelentős alakja a téma népszerűsítésének Róka Sándor, aki több könyvet is kiadott, tele játékos, vagy éppen bonyolultabb logikai feladatokkal. Ezeket olvasva lettem figyelmes egy feladattípusra, amihez két szerzeményében, a 2000 feladat az elemi matematika köréből (Róka, 2010) című példatárban, illetve a Logika-land (Róka, 2013) című könyvben is alkotott feladatokat. Ezeket a feladatokat a megoldáson túl, tovább elemezve számomra meglepő felfedezésekre jutottam. Dolgozatomban logikai feladatokról fogok írni, ezen belül is olyan állításokat tartalmazó példákról, ahol a cél az igazságértékek megadása. Néhálynak közülük egy középiskolás számára nincs megoldása, egy egyetemista számára paradoxont, egy matematikus vagy nyelvész számára azonban érdekességet jelenthetnek. A matematikai és a nyelvi logika ugyanis itt eltér egymástól. A formális matematikai logikában egy állításnak vagy van igazságértéke, vagy eldönthetetlen. A nyelv logikájában ez már nem igaz, mert a nyelv logikája nem ellentmondásmentes. Ezek, a néha játékos, néha bonyolultabb logikai feladatok megpróbálják kikerülni ezeket a paradoxonokat, de abban a pillanatban, amint szeretnénk általánosítani, vagy kiterjeszteni a feladatokat, látható, hogy problémába ütközünk.

Negyedéves koromban csatlakoztam az ELTE Természettudományi Karának Matematika Intézetén belül működő Matematika Tanuláselméleti és –Pszichológiai Kutatócsoportjának egyik kutatásához. A dolgozatom harmadik, tanítással kapcsolatos része ennek egy részét mutatja be. A kutatásban azt vizsgáljuk, hogy különböző korú és különböző szintű tudással rendelkező tanulók hogyan kezelik a matematikailag nem precíz helyzeteket,

például a paradoxonra vezető feladatokat. A kutatás első eredményeit már publikálta a kutatócsoport (Szabó, Bereczky-Zámbó, Szenderák, Szeibert, 2021). A vizsgálat során különös figyelmet szenteltünk a tanulók gondolkodásmenetének, és jegyzeteket készítettünk válaszaikról. Ahol lehetett, felvételt is készítettünk a beszélgetésekről. A résztvevők egyik csoportja doktoranduszokból állt, a velük készített interjúk már megjelentek a korábban említett cikkben. A feladatokhoz szükséges háttértudásuk a doktoranduszoknak persze igen nagy, mégis elbizonytalanodtak a megoldásban, miközben félrevezető vagy éppen rávezető kérdéseket kaptak. Kíváncsi voltam arra, hogy a jóval kisebb tudással rendelkező diákok hogyan viszonyulnak azokhoz a kérdésekhez, amit a doktoranduszok is kaptak, így egy újbudai gimnázium kilencedik, valamint tizedik évfolyamos tanulóival végeztem el a kísérletet. Dolgozatom harmadik részében a kutatásnak ezt a részét fogom bemutatni. A kutatás része egy nagyobb, átfogóbb kutatásnak, így csak az idevágó következtetéseket fogjuk most levonni.

1. Típusfeladatok

Ebben a részben típusfeladatokat fogunk végignézni, valamint megvizsgáljuk, hogy ezek közül melyiknek van klasszikus értelemben vett megoldása, melyiknek nincsen, és hogyan lehet az utóbbiak ellentmondásait feloldani.

1.1. Példatári feladatok

Kezdjük a következő, Róka Sándor példatárában szereplő feladattal a sort:

„Egy papírlapon az alábbi öt állítás olvasható.

- 1. Ezen a lapon 1 állítás hamis.*
- 2. Ezen a lapon 2 állítás hamis.*
- 3. Ezen a lapon 3 állítás hamis.*
- 4. Ezen a lapon 4 állítás hamis.*
- 5. Ezen a lapon 5 állítás hamis.*

Kérdés: Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?” (Róka, 2010, 17. o. 75.)

Ennek a kérdésnek a megválaszolása nem vet fel különösebb problémát egy középiskolás számára. Biztosan tudjuk, hogy csak egyetlen állítás lehet igaz, már ha van egyáltalán igaz állítás közöttük. Ha a papírlapon egyik állítás sem lenne igaz, akkora az utolsó állítás igazat állítana, hiszen öt hamis állításunk lenne. Ez így nem lehetséges, tehát biztosan van legalább egy igaz a kijelentések között.

Mivel a kijelentések a hamis állítások pontos számára vonatkoznak, és mindegyik más értéket tartalmaz, így ezek egymást kizáró állítások, nem lehet egynél több igaz állítás, pontosan egy lesz. Ekkor a másik négy állításnak hamisnak kell lennie. Tehát tudjuk, hogy az öt kijelentés közül egy igaz, négy pedig hamis lesz. Emiatt éppen a negyedik állítás az igaz, a többi pedig hamis. Egy másik megközelítés, hogy egyesével megvizsgáljuk a kijelentések lehetséges igazságértékét. Az előzőek alapján, miszerint pontosan egy igaz állítás lehet, az első állítás biztosan nem lehet igaz, hiszen azt állítja, 1 hamis kijelentés van, ekkor viszont három másik állításnak is igaznak kéne lennie. Hasonló indoklással sem a második, sem a harmadik állítás sem lehet igaz. Megint arra jutottunk, hogy a negyedik állítás - miszerint „Ezen a lapon 4 állítás hamis.” – lesz igaz, a többi pedig hamis. Ez az egyetlen helyes megoldása a feladatnak.

A hamis állítások pontos száma helyett persze megadhatnánk akár egy minimális értéket is a kijelentésekben, így a megoldás már több gondolkodást igényel. A következő feladat ezzel foglalkozik, egy kicsit bonyolultabb formában:

„Egy papírlapon az alábbi állítások olvashatók:

- 1. Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.*
- 2. Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.*
- 3. Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.*
- 4. Ezen a lapon legalább 4 állítás hamis.*
- 5. Ezen a lapon legalább 5 állítás hamis.*
- 6. Ezen a lapon legalább 6 állítás hamis.*
- 7. Ezen a lapon legalább 7 állítás hamis.*
- 8. ...*

Sajnos a 8. állítás olvashatatlan. Kérdés: A 8. állítás igaz vagy hamis?” (Róka, 2013, 88.o. 3.)

Az első állítás nem lehet hamis, hiszen akkor biztosan lenne már legalább egy hamis állításunk, emiatt pedig ez az állítás igaz lenne. Így ellentmondásra jutunk, mivel tudjuk, hogy egy állításról egyértelműen el lehet dönteni, hogy igaz, vagy pedig hamis. Tehát az első kijelentésünk igaz. A második állításról még nem tudunk mondani semmit, a hetedikről azonban meg tudjuk mondani, hogy hamis lesz, mivel ha igaz lenne, az első állítással együtt már lenne két igaz állításunk, de ez ellentmondásban áll azzal a kijelentéssel, miszerint van legalább 7 hamis, mert az állítások száma csupán 8. A hetedik állítás tehát hamis. Ez éppen azt jelenti, hogy legfeljebb már csak hat darab kijelentés lehet hamis. A hamis kijelentések maximális száma ezen a ponton 6, abból következik, hogy az igazak száma legalább kettő, ezt az igazságértéket pedig az 1. állítás után a 2. állításnak tudjuk még biztosan odaadni. Ha már a második kijelentés is igaz, a 6. nem lehet, hiszen úgy lenne három darab igaz állításunk, amik mellett nincs helye legalább hat darab hamisnak, mert továbbra is nyolc állításunk van összesen. Tehát a 6. kijelentés hamis, legfeljebb öt hamis állítás lehet, vagyis legalább három igaz van, így a 3. állítás igaz. Már csak a negyedik és az ötödik kijelentések maradtak (és persze a nyolcadik, de arról még nem tudunk semmit). A negyedik nem lehet hamis, mert ha hamis lenne, akkor már lenne éppen négy darab belőlük, önmagának mondana ellent. Vagyis a 4. kijelentés igaz, tehát van legalább négy darab hamis állítás a

nyolc között, amiből eddig kettőt ismerünk. Mivel már csak az 5. és 8. állítások maradtak ki, így ezek biztosan hamisak lesznek. Tehát a 8. állítás hamis.

Észrevehetjük, hogy ha igaz egy állítás, akkor az összes soron előtte lévő állítás is igaz, hiszen ha van legalább N darab olyan állítás, amire igaz valamilyen tulajdonság, akkor létezik legalább $N - 1$ darab is belőle. Azt is tudjuk, hogy ha egy állítás a papíron hamis, akkor minden utána soron következő állításnak is hamisnak kell lennie, hiszen ha nincsen legalább M darab adott tulajdonságú állítás, akkor biztos, hogy $M + 1$ darab sem lesz. Azon a ponton, ahol rájöttünk, hogy a hetedik állítás hamis, tévesen pontot is tehattünk volna a megoldás végére, mivel a 7. állítás hamis, és azt mondtuk, ha a feladatban egy állítás hamis, akkor a soron utána következő is biztosan az. Ez az észrevétel azonban nem vonatkozik a nyolcadik állításra, mert nem tudjuk, mit takar maga az állítás, a hetedik kijelentés hamis igazságértékéből még nem következtethetünk semmire. Egyáltalán nem biztos, hogy a nyolcas sorszám mellett az a mondat áll, hogy „Ezen a lapon legalább 8 állítás hamis.” Anélkül pedig már nem működik az észrevételünk, más utat kellett keresni.

A feladatok eddig mindig a hamis állításokról szóltak, amikkel továbbra is dolgozni szeretnénk, de vegyük most egy másik variációját:

„Egy papírlap egyik oldalán a következő szöveg olvasható:

- 1. Ezen a lapon legalább egy állítás igaz.*
- 2. Ezen a lapon legalább két állítás igaz.*
- 3. Ezen a lapon legalább három állítás igaz.*

...

99. Ezen a lapon legalább kilencvenkilenc állítás igaz.

100. Ezen a lapon legalább száz állítás igaz.

Ha megfordítjuk a lapot, a másik oldalán ezt olvassuk:

- 1. Ezen a lapon legalább egy állítás hamis.*
- 2. Ezen a lapon legalább két állítás hamis.*
- 3. Ezen a lapon legalább három állítás hamis.*

...

99. Ezen a lapon legalább kilencvenkilenc állítás hamis.

100. Ezen a lapon legalább száz állítás hamis.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a 200 állítást.

Hány igaz állítás van a lapon?” (Róka, 2013, 88-89. o. 4.)

A szerzőhöz hasonlóan, nevezzük el az első oldal első állítását I/1-esnek, a másodikat I/2-esnek, és így tovább. A második oldalon szereplő kérdések a sorszámuk elé pedig a II-es jelzést kapják (Róka, 2013).

Itt már szerepelnek állítások az igaz állítások számára vonatkozóan is, de a megoldáshoz továbbra is a hamis állítások számát tárgyaló kijelentésekből tudunk kiindulni. A II/1. állítás nem lehet hamis. Ha hamis lenne, az azt jelentené, hogy nincs hamis állítás a lapon, önmagával mondana ellent. Vagyis ez az állítás igaz, emiatt pedig az I/1. állítás is igaz lesz, hiszen van legalább egy darab igaz állításunk. Sőt, az I/1-gyel együtt már kettő is van, tehát az I/2. is igaz lesz, amivel együtt pedig már három az igaz állítások száma, így igaz lesz az I/3. is, és így tovább, az első oldalon minden egyes igaz állítással egy újabb állítás válik igazzá, elmehetünk egészen I/100.-ig. Tehát az első oldalt hamar le is zárhatjuk, minden kijelentésének igaz az igazságértéke. Vizsgáljuk meg most a második oldalt. A II/1-ről már kijelentettük, hogy igaz, vagyis van már összesen 101 darab igaz állításunk, tehát a II/100. kijelentés, miszerint van legalább 100 darab hamis állítás a lapon, biztosan hamis. Haladjunk tovább a II/2. állítással. Ha ez hamis lenne, az azt jelentené, hogy egyetlen egy hamis kijelentés van a lapon. De a második oldal utolsó állítása miatt, amiről már tudjuk, hogy hamis, ez nem lehetséges. II/2. biztosan igaz. Ezen a ponton 102 igaz állításunk van, tehát II/99. biztosan hamis, nem lehet legalább 99 darab hamis állítás. Emiatt II/3. igaz lesz, majd II/98. hamis, ezután II/4. megint igaz, II/97. pedig megint hamis, és így tovább. Eljuthatunk ilyen módon a második oldal közepéig, és mivel páros sok állítást tartalmaz az oldal, az 50. állítás éppen igaz, az 51. pedig hamis lesz a második oldalon. Tehát a lapon összesen 150 darab igaz kijelentés szerepel.

1.2. A paradoxon – hamis állítások minimális száma

Láttunk most már egy feladatot, ami a hamis állítások pontos számával foglalkozik, és két olyat is, ami ezeknek a hamis kijelentések a minimális számával. Róka Sándor példatáraiban számos hasonló feladattal találkozhatunk. Miközben ezeket a feladatokat olvastam, feltűnt, hogy míg az első feladatban páratlan számú kijelentéssel dolgoztunk, a

minimális számra vonatkozóan mindig páros számú állítással szerepelnek a példák. A kérdés az, hogy ez egyszerű véletlen, vagy szándékosan kerül a szerző azt az esetet, amikor páratlan számú kijelentés szerepel a feladatban. Most kipróbáljuk, mi történik ebben az esetben:

Egy papírlapon az alábbi öt állítás olvasható:

1. *Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.*
2. *Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.*
3. *Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.*
4. *Ezen a lapon legalább 4 állítás hamis.*
5. *Ezen a lapon legalább 5 állítás hamis.*

Kérdés: Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

Az első állítás most sem lehet hamis, megint saját magának mondana ellent. Tehát az első kijelentésünk igaz. Azt is tudjuk, hogy az utolsó állításunk nem lehet igaz, mivel ha igaz lenne, akkor legfeljebb már csak három állításunk lehetne hamis, így ez az utolsó állítás hamis lenne, ami újabb ellentmondás. Így az ötödik kijelentés biztosan hamis. A negyedik állítás sem lehet igaz, mivel az elsőről tudjuk, hogy igaz. Így már csak a maradék három állításunk lehetne hamis, ami viszont nem tesz eleget a kijelentésnek, miszerint van legalább 4 hamis állítás. Arra jutottunk, hogy a negyedik állítás is biztosan hamis, tehát nincs 4 hamis kijelentés a lapon.

Mint korábban is láttuk, ha igaz egy állítás, akkor az összes soron előtte lévő állítás is igaz. Azt is tudjuk, hogy ha egy állítás a papíron hamis, akkor minden utána soron következő állításnak is hamisnak kell lennie. Így ha a második kijelentés hamis lenne, a harmadik is az lenne, tehát összesen négy hamis állításunk lenne, ez azonban lehetetlen, mivel így az első négy állításnak igaznak kellene lennie, pedig tudjuk, hogy a negyedik biztosan hamis. Ez azt jelenti, hogy a második kijelentésünk is igaz, vagyis van legalább 2 hamis állítás a papíron.

Már csak a harmadik állítás igazságértékéről kell döntenünk. Ha igaz lenne, az azt jelentené, hogy van legalább 3 hamis állításunk. Ebben az esetben csak az utolsó két állítás hamis, ami nem lehetséges. Ha hamis lenne, az azt jelentené, hogy maximum kettő hamis állítás van a lapon. Ez azonban nem lenne igaz, mivel így már három hamis állítás is szerepelne. Így tehát nem tudjuk megmondani a harmadik kijelentésről, hogy igaz lesz, vagy pedig hamis.

Ezt a feladatot kiterjeszthetjük általánosan, N darab állítás esetére is, vagyis:

1. Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.
2. Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.
3. Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.

...

N. Ezen a lapon legalább N állítás hamis.

Kérdés: Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

A megoldáshoz az előző feladat logikáján indulunk el. Az első állítás megint biztosan igaz, az utolsó, N -edik pedig biztosan hamis. Ha az első igaz, akkor az utolsó előtti, vagyis az $N - 1$ -edik állítás is hamis lesz, hiszen ha igaz lenne, az azt jelentené, hogy a lapon legalább $N - 1$ darab állítás hamis. Ez nem lehetséges, mivel az első is igaz, tehát maximum $N - 2$ darab kijelentés lehet már csak hamis, $N - 1$ biztosan nem. Ezek után a második állításról is tudunk dönteni, még pedig biztosan igaz az igazságértéke, hiszen ha hamis lenne, az azt jelentené, hogy maximum egy hamis állítás van. Erről pedig tudjuk, hogy nem így van, mert már találtunk kettőt. Ezek után persze az $N - 2$ -edik állítás is hamis, ami miatt a harmadik igaz, majd pedig az $N - 3$ -adik megint hamis, a negyedik pedig megint igaz, és így tovább. Lentről felfelé és fentről lefelé egyesével haladva a következőre juthatunk: Ha már igazoltuk, hogy az első k állítás igaz, akkor emiatt az utolsó k állítás hamis. Azaz van legalább k igaz és legalább k hamis állításunk. Végül azt kapjuk, hogy páros N esetén éppen az első $\frac{N}{2}$ darab kijelentés lesz igaz, a maradék szintén $\frac{N}{2}$ darab kijelentés pedig hamis.

Páratlan n esetén azonban ugyanabba a problémába ütközünk, amibe az előző feladat megoldása során. Tudjuk, hogy az első $\frac{N-1}{2}$ darab állítás biztosan igaz, illetve az $\frac{N+3}{2}$ -edik állítástól kezdve minden további hamis lesz az eddigiek alapján, és az $\frac{N+1}{2}$ -edik kijelentésről nem tudunk semmit mondani, mindenhogy ellentmondásra jutunk. Ugyanis ha ez az állítás hamis, akkor legfeljebb $\frac{N+1}{2} - 1$ állítás lehet hamis. Azonban ezzel az állítással együtt már összesen $\frac{N+1}{2}$ lenne, ami nem lehetséges. Ha viszont igaz lenne az állítás, akkor ezzel együtt összesen $\frac{N+1}{2}$ igaz, valamint az állítás miatt még legalább $\frac{N+1}{2}$ hamisnak is kellene lennie, nekünk pedig csak N darab állításunk van.

Azt kaptuk tehát, hogy nem tudjuk megállapítani egy állításról, hogy igaz, vagy pedig hamis, éppen úgy, ahogy a hamis állítások minimális számára vonatkozó páratlan számú

állítás esetén sem. Ugyanakkor tudjuk, hogy állításnak azt a kijelentő mondatot nevezzük, melyről egyértelműen eldönthető, hogy vagy igaz, vagy hamis. Adódik a kérdés: Állítások-e egyáltalán a feladatokban szereplő mondatok? És ha nem, mit értelme van így a feladatnak? Látszik, hogy nem lehet az ezekben a feladatokban szereplő mondatoknak mindegyike állítás. De hogyan változtatja ez az észrevétel a feladat megoldását? Amennyiben kihasználjuk azt az észrevételt, hogy nem lehet az összes itt szereplő mondat állítás, még azt is meg kell vizsgálnunk, hogy melyek ezek az igazságérték nélküli mondatok. Sőt, valójában az is kérdésessé válik, hogy adottak ezek a mondatok, vagy nekünk kell eldönteni egy tetszőleges mondatról, hogy állításnak tekintjük-e.

1.3. Nyelvi különbségek

Mielőtt elkezdtem az előző kérdések vizsgálatát, fontosnak tartottam utánajárni, mit írnak erről a problémáról a könyvek, tankönyvek, hogyan oldhatók fel ezek a paradoxonok.

Mi okozza tehát a paradoxont, és hogyan vélekednek a témáról a matematikusok? Nyelvtan órán úgy tanítják, a kijelentő mondat állítást fogalmaz meg. Eszerint minden mondat, aminek a végére pont kerül írásjelként, egy állítást tartalmaz. Nem szoktuk vizsgálni az igazságértéküket, egyszerűen csak kijelentéseket teszünk velük. Matematikai értelemben azonban különbséget teszünk igaz és hamis állítások között, és azt is megtanultuk, hogy nem lehetséges, hogy egyszerre legyen valami igaz és hamis is, a kettő közül maximum az egyik teljesül. Ahogyan azt láttuk néhány eddigi példában, előfordulhat, hogy nem tudjuk meghatározni egy állítás igazságértékét. A matematikai állítás fogalma alapján az ilyen kijelentések nem számítanak állításnak. Ekkor viszont úgy tűnik, hogy a magyar nyelvben használt „állítás” szó nem egyezik meg a logikai értelemben vett állítással. Ez persze nem egyedi eset, a hétköznapi szóhasználatban lévő „vagy” szó sem feltétlenül egyezik meg az általunk matematikában ismert megengedő fajtájával, de ennek egyértelműen tisztázott a jelentése. A mi feladatainkban a mondat és az állítás kapcsolata okozhat félreértéseket. A kérdés továbbra is az, hogy hogyan lehetséges ez, és hol kapcsolódik a két fogalom. Ahhoz, hogy egy kijelentés igazságtartalma ne legyen egyértelmű, nem feltétlenül kell függenie más kijelentésektől is; vannak olyan mondatok, amik önmagukban paradoxonok.

Raymond Smullyan, amerikai matematikus „Mi a címe ennek a könyvnek?” (Smullyan, 1978, fordította: Török, 2016) könyvében hasonló problémákkal foglalkozik az utolsó,

„Logic is a many-splendored thing”, vagyis a könyv magyar fordításában „A logika roppant szórakoztató” című fejezete alatt. Nézzük a következő mondatot:

„Ez a mondat igaz”. Ezzel a kijelentéssel nem ütközünk abba a problémába, hogy nem tudjuk megadni az igazságértékét, sőt, éppen az okozza a gondot, hogy lehet az állítás igaz és hamis is, persze nem egyszerre. Ettől függetlenül, annak a kritériumnak, miszerint egyértelműen eldönthető lenne, hogy melyik kategóriába sorolható, most sem tesz eleget. Akkor lehet, hogy ez a mondat sem állítás? Smullyan (Smullyan, 1978) könyvében arról ír részletesebben, hogy bár nem jutunk ellentmondásra a feladat megoldásában, ennek a mondatnak nincs is jelentése. A könyvben játékosan, inkább népszerűsítő módon, mint elméleti alapon oldja fel az ellentmondásokat. Kiindulási elve, hogy először magát a mondatot kell megértenünk ahhoz, hogy utána meg tudjuk érteni, mi az, hogy az a mondat igaz. Ennek a mondatnak a különlegessége, hogy a jelentése attól függ, hogy mit jelent a mondat igazsága. Smullyan szerint ahhoz, hogy dönteni tudjunk igazságértékről, először meg kell érteni magát a mondatot, de nem tudjuk mi a jelentése: „Pusztán azt, hogy ez a mondat igaz, és én még nem tudom, hogy mit jelent az, hogy ez a mondat igaz, amíg előbb meg nem értettem a mondat jelentését, és nem érthetem meg a mondat jelentését, amíg nem tudom, hogy mit jelent az, hogy ez a mondat igaz.” (Smullyan, 1978). Ezek szerint nem tartalmaz információt a mondat, amit önmagában nehéz kezelni. A helyzetet nehezíti, hogy az író mondatában konkrétan a „mondat” szó szerepelt, vagyis nem is állításról volt szó, és az továbbra is tisztázatlan, hogy milyen kapcsolat van a két fogalom között. Most ott tartunk, hogy ez a mondat állítás sem lehet, ugyanakkor mondatként információt sem hordoz, mégis létezik. Hasonló okokból okoz problémát az „Ez a mondat hamis.” kijelentés is, annyi különbséggel, hogy állításként ez a mondat se igaz, se pedig hamis nem lehet, tehát az ellentmondások miatt paradoxonról beszélhetünk. Tényleges feloldással Smullyan sem állt elő könyvében, az azonban már biztos, hogy a magyar nyelv és a matematika nyelve érdekes, de igen nehezen értelmezhető különbségeket vet fel. A lehetséges elméleti logikai, matematikai feloldásokról a következő fejezetben beszélünk részletesebben. Míg az általunk használt matematikai axiómarendszerek ellentmondásmentesek, a nyelvről ez nem mondható el, ezért találhatunk benne önmaguknak ellentmondó állításokat, paradoxonokat.

A mai nyelvi-logikai kutatások egyik iránya a paradoxonok osztályozása és vizsgálata. Osztályozzák a paradoxonokat aszerint, hogy hogyan lehet feloldani a bennük található ellentmondást. Maguk a nyelvészek és logikusok is vitákba keverednek arról, hogy két paradoxon ugyabba a kategóriába tartozik-e. Ezt a vitát, elméletet folyamatosan figyeli a

Stanford Encyclopedia of Philosophy, számos cikk is megjelent a témában, mi a 2021-es állapotból indultunk ki. Éppen ezért a továbbiakban is igyekszem többféle megoldást adni egy feladatra, amennyiben ez lehetséges. A megoldásokat nem mindig fejezem be maradéktalanul, csak ahol fontos felfedezésre és pontos megoldásra jutottam. Minden feladatra adott legalább egy megoldásom teljes.

Érdekes problémát vetnek fel a szubjektíven értékelhető állítások is, vagy az olyan állítások, amiknek az igazságértéke változhat. Legyen például az egy állítás, hogy „Szeretem a palacsintát.” Valószínűleg a legtöbb ember egyetért abban, hogy ez egy igaz állítás, de biztosan akad olyan is, aki nem szereti a palacsintát, tehát számára ez a kijelentés hamis. Ugyancsak nem dönthető el egyértelműen a válasz, ha olyan kijelentés jelenik meg a mondatban, amiről mindenki maga tud dönten. Persze ha azt mondanánk, hogy „Peti szereti a palacsintát.”, sokkal könnyebb helyzetben lennénk, már ha Peti megmondta nekünk előre a választ. Egy másik érdekes állítás, ha azt mondjuk „Süt a nap”. Lehet, hogy a kijelentés felolvasása közben éppen süt a nap, ekkor az állítás igaz. Ugyanakkor az is lehet, hogy éppen borús az idő odakint, vagy éjszaka van. Egyrészt, ennek az állításnak az igazságtartalma percenként változhat, másrészt attól, mert mi úgy érzékeljük, hogy odakint süt a nap, néhány kilométerrel arrébb nem feltétlen vagy ugyanígy. Mi a helyes válasz tehát arra a kérdésekre, hogy mi ezeknek az állításoknak az igazságértéke? Ezekkel a példákkal még foglalkozunk a későbbiekben.

1.4. Lehetséges feloldások

Térjünk most vissza az eddigi feladatainkhoz, ahol ellentmondásokba ütköztünk. Nézzük a hamis állítások minimális számára vonatkozó példát páratlan darab állítás esetén. A gondot az okozta, hogy egy állítás igazságértékéről nem tudtunk dönten, például 5 állítás esetén a harmadik mondatról nem tudtunk semmit mondani. Ezzel a mondattal önmagában semmi problémánk nem lett volna, hiszen ha egyedül ez az állítás szerepelt volna a lapon, miszerint „Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis”, erről biztosan elmondhatnánk, hogy hamis. A paradoxont az okozta, hogy a kijelentés igazságtartalma függ a másik négy állításától. Azokból két különböző dologra tudunk következtetni, se igaz nem lehet ez a kijelentés, se hamis. Ezek szerint ez a mondat nem lesz matematikai értelemben vett állítás, de erről csak a többi kijelentés tehet, hiába értelmes önmagában az állítás. Mint korábban említettük, ennek a problémának az lesz a feloldása, hogy a nyelv nem ellentmondásmentes.

Egy mondatnak nem lesz feltétlenül igazságértéke, sőt, a mi esetünkben mindig függ egy mondat attól is, hogy milyen környezetben található meg, hiszen maga az állítás egyszerre több állításról szól. Vizsgáljuk meg most úgy ezt a feladatsorozatot, hogy nem tekintjük az összes mondatot állításnak, vagyis elvetjük azt az elképzelést, miszerint minden mondat igazságértékkel bír. Meg tudjuk-e vajon oldani a feladatot, ha eleve így állunk neki?

Nézzük meg most így a problémát egy tetszőleges páratlan számra, egy lehetséges feltevéssel:

Legyen adott egy papírlapon 99 darab állítás:

- 1. Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.*
- 2. Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.*
- 3. Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.*

...

50. Ezen a lapon legalább 50 állítás hamis.

...

99. Ezen a lapon legalább 99 állítás hamis.

Melyik állítás igaz?

Tegyük fel, hogy az 50-edik mondat, ami eddig az akadályt okozta, nem állítás, tehát nincs logikai értéke sem. Az utolsó állítás biztosan hamis, hiszen nincs is 99 állításunk, csupán 98 darab. De akkor az utolsó előtti állítás sem lehet, igaz, hiszen ha igaz lenne, hogy legalább 98 állítás hamis, akkor már nem is lenne mind a 98 hamis. Tehát ez az állítás hamis. Az első kijelentés biztosan igaz, hamis nem is lehet, az ellentmondásra vezet. De nekünk már van két biztosan hamis állításunk, tehát a második kijelentés biztosan igaz lesz. Ekkor a 97-edik állítás is hamis, amitől a harmadik igaz, majd a 96-odik hamis, és a negyedik igaz, és így tovább. Megint elérkeztünk oda, hogy az 1-49. állítások igazak, az 51-99. állítások pedig hamisak. A kérdés az, hogy jó megoldása-e ez a feladatnak. Az, hogy van legalább 49 hamis állítás igaz lesz, éppen ennyi van. Tehát az összes többi, kisebb értékre vonatkozó állítás is igaz ezáltal. Az összes többi állítás onnan kezdve, hogy legalább 51 hamis van pedig hamis, hiszen összesen 49 igaz állítás van. Azzal, hogy az $\frac{n+1}{2}$ -edik állítást nem tekintettük állításnak, megoldhatóvá vált a feladat. Úgy tűnik, megoldásra vezetett a feltevés, miszerint

nem minden mondat állítás, adtunk egy lehetséges feloldást a paradoxonnak. Felmerül a kérdés, hogy vajon az összes hasonló, eredendően ellentmondásos feladat megoldható-e ezzel a csellel. És milyen más módszereket használhatunk még arra, hogy elhagyjunk állításokat?

Most nézzük meg mi történik, ha egyszerre több mondatot nem tekintünk állításnak?

Legyen egy papíron N darab állítás ahol N páratlan szám.

1. *Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.*

2. *Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.*

3. *Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.*

...

N . *Ezen a lapon legalább N állítás hamis.*

Tegyük fel, hogy ezeknek az állításoknak egy részhalmazát nem tekintjük állításnak. Nézzük meg azt az esetet, amikor minden második mondatot nem tekintünk állításnak, tehát az összes páratlan sorszámú mondat állítás, az összes páros sorszámú mondat pedig nem állítás. Nézzünk elsőként néhány konkrét páratlan N -re.

$N = 21$ eset:

1. *Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.*

2. *Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.*

3. *Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.*

4. *Ezen a lapon legalább 4 állítás hamis*

5. *Ezen a lapon legalább 5 állítás hamis.*

...

13. *Ezen a lapon legalább 13 állítás hamis.*

...

21. *Ezen a lapon legalább 21 állítás hamis.*

Ha minden páros sorszámú mondat nem állítás, akkor összesen 11 állítás van a lapunkon, éppen a páratlan sorszámúak. Persze az is lehetne, hogy ennél kevesebb állításunk van csak, ha még így is ellentmondásra jutnánk. Most dolgozzunk ezzel a 11, páratlan

sorszámú kijelentéssel. Ez azt jelenti, hogy a 13-adik állítástól kezdve, miszerint legalább 13 hamis állításunk van, az összes állítás hamis lesz, hiszen nincs is ennyi darab állításunk. (Már 12 darab sem lehetne, de az ehhez tartozó mondat nem is állítás, nem foglalkozunk vele.) Így már kezdetben meg tudtuk mondani, hogy az utolsó öt darab állítás hamis. Emiatt az első három állítás, az 1-es, 3-mas, és 5-ös sorszámú állítások igazak. Tehát már csak a 7, 9 és 11 sorszámokról kell döntenünk. Azt a legelején megmondtuk, hogy 13 darab hamis állítás biztosan nem lehet, mivel nincs is annyi állítás, összesen csak tizenegy van, de közben még három állításról kiderült, hogy igazak, tehát biztos, hogy a tizenegyet sem éri el a hamis állítások száma, sőt, így a kilencet sem. Mivel találtunk még két hamis állítást, a 11-es, illetve 9-es sorszámmal rendelkezőket, így már van hét darab hamis, tehát a 7-es állítás igaz lesz. Most már minden állításnak tudjuk az igazságértékét, az első négy darab, tehát az 1-7. állítások igazak, a maradék hét pedig hamis.

$N = 23$ eset:

A megoldás hasonlóan történik, mint az előző feladatban, $N = 23$ esetén most 12 darab állításunk van. Ez azt jelenti, hogy legalább 13 hamis állítás biztosan nem lehet, így ettől a sorszámtól kezdve az összes maradék állítás hamis, már találtunk hat darab hamis kijelentést. Ekkor az első három állítás, megint az 1-es, 3-mas és 5-ös számúak igazak, van legalább ennyi darab hamis kijelentés. (Igazából ezek alapján hat is lenne, de az ahhoz tartozó mondat nem állítás, nem törődünk vele). Mivel közben találtunk három igaz állítást, így a hamis állítások lehetséges maximum száma kilencre csökkent, tehát biztosan hamis, hogy van legalább 11 darab belőlük. Már csak a 7-es és 9-es sorszámokról kell döntenünk. Mivel már van összesen hét darab hamis állítás, ezért a 7-es kijelentés igaz. De így, négy darab biztosan igaz állítással a hamisak maximális száma tovább csökkent nyolcra, tehát az, hogy van legalább kilenc darab hamisunk, szintén hamis lesz. Tehát az első négy darab állítás, vagyis sorszám szerint az egyes, hármas, ötös és hetes állítások igazak, az összes további állítás hamis.

Lássuk mi történik, ha $N = 25$:

Az eddigiek mentén haladva, a meglévő 13 állításunkból az utolsó hat darab (15-25.) biztosan hamis, mert nincs annyi állításunk összesen, hogy ezek a sorszámok igazak lehessenek. Emiatt az első három (1-5.) igaz. Ekkor a 11. és 13. kijelentések megint hamisak, ezért a 7. állítás igaz. Ennél a pontnál ott tartunk, hogy az utolsó nyolc állítás hamis, az első

négy igaz, tehát már csak egyről kell döntenünk, a 9-es sorszámúról. Igaz nem lehet, hogy van legalább 9 hamis állítás, hiszen ha igaz lenne, akkor csupán nyolc állítás lenne hamis, ez ellentmondás. Ugyanakkor hamis sem lehet, mivel ha hamis lenne, akkor éppen kilenc darab hamis lenne, tehát annak, hogy van legalább kilenc hamis állítás, igaznak kellene lennie, megint ellentmondásra jutottunk. Tehát van egy állítás, amiről nem tudunk dönteni.

Az első két esetben találtunk megoldást az új kikötésünkkel, de $N = 25$ esetre továbbra sem. Azaz $N = 25$ esetében helytelen feltevés volt, hogy csak a páratlan sorszámú mondatok maradjanak állítások, mert ugyanarra a típusú ellentmondásra jutottunk, mint az általános páratlan számú állítások esetében. Látszik tehát, hogy óvatosan kell kezelnünk az ilyen típusú feladatokat, hogyha pontosan szeretnénk őket megoldani.

Ha tovább vizsgáljuk a páratlan darabszámú mondatot, azzal a kikötéssel, hogy minden páratlan sorszámú mondat legyen csak állítás, arra jutunk, hogy az esetek többségében így már lesz megoldása a feladatnak, van azonban néhány kivétel, amikor még így sem megoldható. Ezek az esetek éppen az $N = 7, 13, 19, 25 \dots$ esetek. Az a sejtésünk tehát, hogy a feladat kitűzése csak akkor nem működik, ha N éppen $6k + 1$ alakú. Ezt a sejtést szeretnénk most belátni.

A bizonyításhoz először a következőképpen álltam neki:

Van tehát N darab mondatunk, $1, 2, 3, \dots, N$ sorszámokkal. Minden páros sorszámút „kihúzzunk”, ezeket nem tekintjük állításnak. Maradtak a páratlan sorszámok, tehát $\frac{N+1}{2}$ darab állítás. Mivel csak ennyi maradt, így legkésőbb az $\frac{N+1}{2} + 1$ -edik sorszámtól kezdve az összes állításnak hamisnak kell lennie. A legkésőbb szó itt attól függ, hogy az $\frac{N+1}{2}$ páros, vagy páratlan szám. Ha ugyanis páros, akkor az $\frac{N+1}{2} + 1$ -es sorszámú mondat állítás, és az már biztosan hamis, így minden állítás, ami utána következik is hamis. Ha viszont páratlan, akkor az $\frac{N+1}{2} + 1$ -edik mondat pont nem állítás, így azt nem értékeljük, szóval az $\frac{N+1}{2} + 2$ -es sorszámú a hamis biztosan, majd minden öt követő is ezáltal. Ezekből az állításokból mindig éppen $\left\lfloor \frac{\frac{N+1}{2}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N+1}{4} \right\rfloor$ darab van, tehát ennyi állítás biztosan hamis. Emiatt már biztosan lesz $\left\lceil \frac{\frac{N+1}{4}}{2} \right\rceil$ darab igaz állítás. A bizonyítás itt már kezd nehezen követhetővé válni, az egymásba ágyazott egészrészek miatt bonyolult tovább dolgozni az állítások számával. Próbálkozzunk más úton:

Tudjuk, hogy bármekkora is N , az utolsó állítás biztosan hamis, mivel nincs összesen N darab állítás (csak $\frac{N+1}{2}$ darab), így nem lehet legalább N állítás hamis. Emiatt az első állítás igaz, hiszen van legalább egy hamis kijelentésünk. Maradt $\frac{N+1}{2} - 2$ darab kijelentés, aminek még nem tudjuk az igazságértékét. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb $\frac{N+1}{2} - 1$ darab hamis állítás lehet összesen, az első kijelentés igazsága miatt. Fontos észrevétel, hogy minél több hamis állításunk van, azzal együtt egyre több állítás lesz igaz. Az utolsó állítástól eltekintve, amiről már kezdetben tudtuk, hogy hamis, minden további két hamis állításonként pontosan egy új igaz állítás lesz, hiszen csak a páratlan sorszámú kijelentéseket vesszük figyelembe. Folytatva a leszámolást tehát végig minden két-két újabb hamis állításhoz tartozik egy-egy új igaz állítás.

Így könnyebben eljuthatunk a megoldáshoz, de még mindig nehezen követhető a magyarázat, nézzük meg az eddigieket összefoglalva, egy kicsit szemléletesebb módon. Tegyük két képzeletbeli vonalat a sorszámozott mondatok közé. Az első vonal az alá az állítás alá kerül, ami még biztosan igaz, de a további állításokról még nem tudunk semmit mondani, azok lehetnek állítások és nemállítások is. Legyen ez, a még biztosan igaz állítás a $2t - 1$. sorszámú. Ha ez az állítás igaz, az azt jelenti, hogy van legalább $2t - 1$ darab hamis állítás a sorunk végén. A második vonal kerüljön az elé a legkisebb sorszámú állítás elé, ami már biztosan hamis. Ekkor az előzőek miatt ez, a már biztosan hamis állítás az $n - 4t + 4 = N - 4(t - 1)$ sorszámú mondat lesz. Így néz ki tehát a jelenlegi állás:

1. Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.

2. ~~Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.~~

3. Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.

...

2t-2. ~~Ezen a lapon legalább 2t - 2 állítás hamis.~~

2t-1. Ezen a lapon legalább 2t - 1 állítás hamis.

2t. ~~Ezen a lapon legalább 2t állítás hamis.~~

2t+1. Ezen a lapon legalább 2t + 1 állítás hamis.

...

~~$N-4t+3$. Ezen a lapon legalább $N-4t+3$ állítás hamis.~~

$N-4t+4$. Ezen a lapon legalább $N-4t+4$ állítás hamis.

~~$N-4t+5$. Ezen a lapon legalább $N-4t+5$ állítás hamis.~~

...

N . Ezen a lapon legalább N állítás hamis.

Ha a $2t-1$. sorszámú állítással bezárólag biztosan hamis minden előtte álló állítás, akkor a hamis állítások jelenlegi száma éppen t . Mivel összesen $\frac{N+1}{2}$ darab állításunk van, így most a hamis állítások lehetséges maximális száma éppen $\frac{N+1}{2} - t$. Két eset van tehát a továbbiakban:

1. Az $\frac{N+1}{2} - t$ állítás nem mindegyike hamis, tehát van még több igaz állítás is. Így az, hogy van legalább $2t+1$ hamis állítás is igaz lesz még biztosan. Ez újabb két hamis állítást eredményez, a korábbiak szerint.
2. A $\frac{N+1}{2} - t$ darab állításnak valóban mindegyike hamis. Ez éppen azt jelenti, hogy létezik $2t-1$ darab igaz állítás, $2t+1$ darab azonban már nem.

$$\text{Ekkor } 2t-1 \leq \frac{N+1}{2} - t < 2t+1.$$

Az egyenlőtlenséget rendezve: $6t-3 \leq N < 6t+1$, vagyis $N = 6t-3$ és $N = 6t-1$ megoldásokat kaptuk. Tehát $N \equiv 3 \pmod{6}$, valamint $N \equiv 5 \pmod{6}$ esetekben lesz megoldása a feladatnak, $N \equiv 1 \pmod{6}$ esetben azonban nem. Éppen ezt szerettük volna bizonyítani.

2. Rokonfeladatok

Mint korábban említésre került már, számos verziója elkészíthető ennek a feladatnak, ha változtatunk kicsit a feladatban szereplő mondatokon. Dolgozatom második részében az eddigiekhez hasonló rokonpéldákat és megoldásaikat szeretném tárgyalni, nem megfeledkezve az eddig tett felfedezésekről.

Az első részben körbejártuk annak problémáját, hogy a hamis állítások minimális számára vonatkozóan páros sok állítás esetén találtunk megoldást a feladatra, páratlan daraszám esetén viszont nem. Először megnézzük meg ezt a kiindulási feladatot újra, de ezúttal az igaz állítások maximális számával. Kíváncsiak vagyunk ugyanis, hogy ha hamis állítások helyett igaz állításokkal dolgozunk, kapunk-e minden esetben megoldást, vagy most is lesznek olyan esetek, ahol akadályba ütközünk. Ehhez először megnézzük a feladatot öt darab állítás esetére, ami az első olyan példa volt dolgozatom első részében, ahol nem találtunk megoldást a hamis állítások minimális számára vonatkozóan. Ezután, hogy általános következtetést vonjunk le és teljes megoldást kapjunk, kiterjesztjük a feladat tetszőleges N számú kijelentés esetére. Végezetül pedig két olyan példával fogunk dolgozni, ahol már nagymértékben felhasználjuk eddigi felfedezéseinket, és ezek által más szemszögből közelítjük meg feladatainkat.

2.1. Igaz állítások maximális száma

Az első feladat tehát a következő:

Egy papírlapon az alábbi öt állítás olvasható.

1. *Ezen a lapon legfeljebb 1 állítás igaz.*
2. *Ezen a lapon legfeljebb 2 állítás igaz.*
3. *Ezen a lapon legfeljebb 3 állítás igaz.*
4. *Ezen a lapon legfeljebb 4 állítás igaz.*
5. *Ezen a lapon legfeljebb 5 állítás igaz.*

Kérdés: Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis? (Róka, 2010, 17. o. 76.)

Az utolsó állításról biztosan meg tudjuk mondani, hogy igaz, mivel öt állításunk van a lapon, az igazak száma nyilvánvalóan maximum öt lehet. Az első kijelentés ugyanakkor csak

hamis lehet, mivel ha igaz lenne, már két igaz állításunk is lenne, ez pedig ellentmond az állításunknak. Ekkor az is igaz, hogy legfeljebb már csak 4 igaz lehet, tehát a negyedik kijelentés is igaz. Ezután a második állítás megint hamis, hiszen ha nem így lenne, a már három igaz állítás újból ellentmondana a kijelentésünknek. Megint utoljára maradt a hármas számú állítás. Hamis nem lehet, mert az azt jelentené, hogy több mint 3 igaz állítás van, pedig ebben az esetben csupán kettő lenne. Igaz azonban lehet, hiszen ekkor éppen három, a 3., 4. és 5. kijelentések igazak, és az első két kijelentés hamis. Ez tehát a feladat megoldása.

Ha jobban belegondolunk, nagyon hasonló módon jártunk el, mind a „legalább hamisos” feladatnál. Akkor úgy indultunk, hogy az ötödik állítás biztosan hamis, ami miatt az első igaz, így a negyedik hamis, majd a második igaz, és végül a 3. állítással nem jutottunk semmire. Az érvelés ebben a feladatban is ugyanaz, csak pont fordítva járunk el, az ötödik biztosan igaz, aminek következtében az első hamis, majd a negyedik is igaz, és a második is hamis. A hasonlóság abban rejlik, hogy a hamis állítások minimális száma összefüggésben áll az igaz kijelentések maximális számával, hiszen a kettejük összege éppen kiadja az összes állítást. Az a kijelentés, hogy legfeljebb öt igaz állítás van, biztosan igaz, ahogy ezt korábban is említettük. Abból, hogy legalább 1 állítás hamis, következik, hogy legfeljebb 4 állítás lehet igaz. Ha legalább 2 állítás hamis, akkor legfeljebb 3 kijelentés lesz igaz, és így tovább. Így annak, hogy legalább 5 hamis állítás van, nincsen „párja”, mivel az ennek megfelelő kijelentés az lenne, hogy legfeljebb 0 darab igaz állítás van. Emiatt lehetséges, hogy az előbbi feladatnak nincs egyértelmű megoldása, míg az utóbbinak van.

Láthattuk, hogy mind az előző feladatban mind az öt állításról eldönthető az igazságértéke. Próbáljuk meg megint kiterjeszteni az alap problémát, N darab állítás esetére. Az eddigiek alapján az a sejtésünk, hogy ebben a feladatban éppen páratlan számú állítás esetén lelünk megoldásra, páros sokra nem.

1. *Ezen a lapon legfeljebb 1 állítás igaz.*
2. *Ezen a lapon legfeljebb 2 állítás igaz.*
3. *Ezen a lapon legfeljebb 3 állítás igaz.*

...

- N . *Ezen a lapon legfeljebb N állítás igaz.*

Páratlan n esetén az előző feladat eszköze működik, megint tudjuk, az utolsó állítás igaz, az első hamis, az $N - 1$ -edik igaz, a második hamis, az $N - 2$ -edik igaz, és így tovább, amíg

elérkezünk az $\frac{N+1}{2}$ -edik taghoz. Ennek igaznak kell lennie, hiszen ha hamis lenne, akkor lenne legalább $\frac{N+1}{2} + 1$ igaz állításunk, így összesen $\frac{N+1}{2} + \frac{N+1}{2} + 1 = N + 2$ darab állításunk lenne, de nekünk pontosan N darab van. Tehát éppen az első $\frac{N-1}{2}$ darab állítás hamis, a többi pedig igaz.

Páros N esetén újra probléma merül fel. Az eddigi logika mentén biztosan tudjuk, hogy az első $\frac{N-2}{2}$ darab állítás hamis, valamint azt is, hogy az $\frac{N+2}{2}$ -edik állítástól kezdve minden további igaz. Az $\frac{N}{2}$ -edik tagról azonban megint nem tudunk dönteni. Ha igaz lenne, az azt jelentené, hogy legfeljebb $\frac{N}{2}$ igaz állításunk van. De ekkor maga az $\frac{N}{2}$ -edik állítás miatt már $\frac{N}{2} + 1$ darab igaz állítás lenne, ez ellentmond a kijelentésünknek. Ha hamis lenne, tagadnánk, hogy legfeljebb $\frac{N}{2}$ van, vagyis azt állítanánk, hogy van legalább $\frac{N}{2} + 1$ igaz állítás. Így a hamis és igaz állítások száma összesen $\frac{N}{2} + \frac{N}{2} + 1 = N + 1$ lenne, nekünk viszont pontosan N állításunk van. A sejtésünk tehát beigazolódott.

2.2. Többértékű rendszerek

Az ilyen típusú feladatokból rengeteg különbözőt lehetne készíteni. Szó esett korábban arról, hogy mi történik, ha bizonyos mondatokat nem tekintünk állításnak. Akkor tetszőleges kikötésekkel megoldhatóvá vált néhány feladat, eddig azonban részletesebben nem beszéltünk arról, mit jelent az, hogy egy mondatnak nincs igazságértéke. A többértékű logika ötletét már 1920-ban felvetette Łukasiewicz, lengyel logikus, és még a század első felében két másik matematikus, illetve természettudós, Bochvar és Kleene is megalkották a saját többértékű rendszerüket (Bruni, Cantini, 2021). Kisebb különbségekkel, a rendszerek mind háromértékű logikák voltak, ahol az igaz és a hamis érték mellett létezett egy úgynevezett „jelentéstelen”, vagy eldönthetetlen” érték is. Ezek azonban tisztán természettudományi kérdéseket kiszolgáló, sajátos műveleteket tartalmazó rendszerek voltak. Mint említettük, a mi esetünkben az ellentmondásokat a matematikai és a hétköznapi nyelvezet különbségei adják, szemantikai vonatkozásban pedig csak jóval később készült olyan elképzelés, ami valamilyen feloldással szolgálhatna az említett paradoxonok számára. A Stanfordi Filozófia Enciklopédia egyik publikált anyagában éppen olyan állításokkal foglalkoznak nyelvi és filozófiai szempontból, amelyek saját magukról állítanak valamit, mint például a már korábban említett hazug paradoxon, ami azt állítja, hogy „Ez a mondat hamis” (Bolander,

2017). A tanulmány szerint az ilyen jellegű paradoxonokat háromféle kategóriába sorolhatjuk: jelentéstani, halmazelméleti és ismeretelméleti paradoxonok, vonatkozástól függően. Bár úgy tűnik, ezek alapvető felépítése megegyezik, az továbbra is vitatott, hogy vajon azonos módszerrel oldhatók-e fel ezek az ellentmondásosságok.

Ezeket a paradoxonokat többféleképpen igyekeztek feloldani, így alakultak ki például a típuselméletek, valamint a hierarchia elméletek. Előbbi Bertrand Russell, utóbbi Alfred Tarski nevéhez fűződik, és mindkét elmélet azon az elgondoláson alapszik, hogy a társalgás, vagyis a beszéd és a nyelv világát „rétegekben” építik fel, tehát a különböző nyelvi egységek különböző szinteken foglalnak helyet. A típuselmélet lényege, hogy egy adott típus (vagyis szint) csak olyan elemek csoportját tartalmazza, amik alsóbb szinteken helyezkednek el. Ez azonban nem fog feloldást adni azokra a paradoxonokra, amelyekben az állítások saját magukra vonatkoznak, mivel egyik szint sem tartalmazhat olyan elemeket, amelyek az adott szinten tűntek fel először, hiszen egy magasabb réteg mindig az alatta elhelyezkedő rétegek elemeinek csoportjából tevődik össze (Bolander, 2017).

Tarski elméletének lényege, hogy különböző szinteken különböző „nyelvek” helyezkednek el úgy, hogy minden szinten csak a lentebbi szintekre vonatkozóan adhatunk igazságértéket, azok mondatainak dönthetünk az igazságáról. Ebben a hierarchikus rendszerben a nulladik szinten elhelyezkedő nyelv az úgynevezett objektumnyelv, és minden szintnek az eggyel felette helyet foglaló szint az úgynevezett metanyelv. (Bolander, 2017). Ez az elmélet szintén nem ad megfelelő feloldást a paradoxonjainkra, mivel minden mondat csak az felépítésben alatta elhelyezkedő mondatok igazságértékéről dönthet, saját magára, mint a saját szintjén elhelyezkedő állításra nem. Ebben a két elképzelésben az általunk vizsgált mondatok nem létezhetnek, tehát nem választhatunk efféle formális nyelvi megoldást, mivel ezek az állítások ugyanakkor léteznek.

Számunkra most Saul Kripke feloldása lesz Az elképzeléseinknek megfelelő. Kripke 1975-ben, tehát csak a század második felének közepén publikálta írását, ami nagyban meghatározta az igazságelmélet és a paradoxonok szemléletét a későbbiekben. Kripke (Kripke, 1975) elmélete továbbra is azon az elképzelésen alapul, miszerint különböző szintek léteznek, de ezek a szintek már nem élesen elhatárolódó részeit alkotják a mondattannak. (Bolander, 2017). A konstrukcióban minden szinten maga az igazság csak részben definiált, vagyis csak néhány mondatra vonatkozik, tehát megint egy háromértékű rendszerről beszélhetünk, ahol az igaz és hamis értékeken kívül megjelenik a „nem

meghatározott”, vagy másnéven „eldöntetlen” érték is (Bolander, 2017). Ezzel az elképzeléssel, vagyis a nemállítások létezésével már dolgoztunk mi is, azonban egy probléma teljeskörű megoldásához úgy tűnik, nem ad eléggé kielégítő válaszokat. Azzal ugyanis, hogy tetszőlegesen megengedhetjük mondatoknak, hogy ne rendelkezzenek igazságértékkel, a nyelv kifejezőképességét gyengítjük. Ezzel együtt újabb paradoxonokat generálhatunk, mivel (ahogy a későbbiekben is látni fogjuk) egy feladatnak számos megoldása keletkezik, és néhány esetben nehezen lekövethető megoldásokról beszélhetünk. Eddig azonban úgy tűnik, hogy ez az egyetlen olyan felépített konstrukció, ahol a paradoxonokat okozó állításaink léteznek, és valamilyen féle feloldását kaphatjuk a problémának.

Felmerült az ötlet, hogy mi lenne, ha az állítások arra vonatkoznának, hogy egyáltalán állítások-e ők.

2.3. Egy érdekes példa

Tekintsük a következő, különösen hangzó feladat:

Egy papírlapon az alábbi hét állítás olvasható.

1. *Ezen a lapon legalább 1 mondat nem állítás.*
2. *Ezen a lapon legalább 2 mondat nem állítás.*
3. *Ezen a lapon legalább 3 mondat nem állítás.*
4. *Ezen a lapon legalább 4 mondat nem állítás.*
5. *Ezen a lapon legalább 5 mondat nem állítás.*
6. *Ezen a lapon legalább 6 mondat nem állítás.*
7. *Ezen a lapon legalább 7 mondat nem állítás.*

Kérdés: Melyik állításnak mi az igazságértéke?

Most már az is kérdéses, hogy hogyan álljunk neki a feladatnak. Az itt szereplő mondatok lehetnek igaz állítások, hamis állítások, de igazságérték nélküli „nemállítások” is. Egyik mondatról sem tudjuk kezdetben megállapítani, hogy melyik kategóriába tartozik.

Nézzünk meg egy lehetséges példát, induljunk el úgy, hogy megválasztjuk az igaz állításokat. Annyit biztosan tudunk, hogy az utolsó mondat nem lehet igaz állítás, hiszen saját magának mondana ellent.

Legyenek például az első, második és harmadik mondatok igaz állítások. Ez azt jelenti, hogy van legalább három olyan mondat, amik nem állítások. Legyenek ezek például a negyedik, az ötödik és a hetedik mondatok. Ekkor a 6. állítás vagy hamis, vagy az sem állítás. Válasszuk most ki a második és a negyedik mondatokat, mint igaz állítások. Ekkor az első és a harmadik mondatok biztosan nem lesznek állítások, hiszen hamisak nem lehetnek a negyedik kijelentés igazsága miatt. A maradék három mondat továbbra is lehet hamis állítás, vagy pedig igazságérték nélküli mondat is. Ezzel a próbálkozással, miszerint először az igaz állításokat próbáljuk kiválasztani, nagyon sok megoldása lehet a feladatnak, és nagyon körülményesnek tűnik megtalálni az összes létező megoldást.

Triviális eseteket persze felfedezhetünk, minthogy ha a hatodik állítás igaz, akkor az összes többi mondat nem lesz állítás, vagy ha például az első kijelentés hamis, és feltesszük, hogy mindegyik mondat állítás, akkor az összes többi kijelentés is biztosan hamis lesz. Egy harmadik ilyen példa, ha az első hat darab mondatot kijelöljük, mint nem állítások, így a hetedik kijelentés biztosan hamis. A három különböző példában három különböző stratégiával jártunk el. Az első kettővel ellentétben, az utolsó példában az igazságértékkel nem rendelkező mondatokat választottuk ki először, majd ebből következtettünk az állítások igazságtartalmára.

Próbáljuk meg így megközelíteni a feladatot. Jelöljük ki először azokat a mondatokat, amik nem lesznek állítások. Legyenek ezek a harmadik és a hatodik mondatok, a többi mondat pedig állítás lesz. Ekkor van két darab nemállításunk, vagyis a második állítás, miszerint van legalább két nemállítás, egy igaz állítás lesz. Emiatt az első állítás is biztos, hogy igaz lesz, hiszen legalább egy nemállítás is biztosan van. Maradtak a harmadik, ötödik és hetedik sorszámmal rendelkező állítások. Ezek mindegyike hamis, hiszen nincs három darab nemállítás sem, így négy, öt, vagy hét darab sincs. Úgy tűnik, hogy azzal, hogy eleve megadtuk melyik mondatokat nem tekintjük állításnak, nagyon egyszerű lett a feladat megoldásának folytatása, és így mindig lesz megoldása a feladatnak.

Hogyan működik ez általános, N számú mondatnál? Legyen a nemállítások száma M darab. Ha kiválasztottuk az összes nemállítást, akkor az összes többi mondat állítás lesz, és egyértelmű igazságértékkel rendelkeznek. Tudjuk, hogy van M darab nemállításunk, így azok a mondatok, amikben az szerepel, hogy legalább k darab nemállítás van, és $k \leq M$, azok igaz állítások lesznek, ha pedig $k > M$, akkor azok az állítások hamis állítások. Tudjuk tehát, hogy az M -edik sorszámu állítás igaz, amennyiben állítás egyáltalán. Mivel igaz az,

hogyan van legalább M darab mondat, ami nem állítás, így az is biztos, hogy van legalább 1, legalább 2, és így tovább, legalább $M - 1$ darab is, hiszen ha egy állítás igaz, akkor minden őt megelőző állítás is igaz lesz. Vagyis a sorszámokat tekintve az 1.-től az M -ig minden olyan mondat, ami állítás, egy igaz állítás lesz. Az M . sorszám után azonban minden további állítás egy hamis kijelentés, mivel pontosan M darab nemállításunk van.

Arra jutottunk, hogy csak az számít, hogy hogyan választjuk meg a nemállításokat, ez már egyértelműen eldönti az állítások igazságértékét. Az, hogy hány mondatot jelölünk ki nemállításnak, és pontosan melyik mondatokkal tesszük ezt, sokféleképpen történhet, de a lehetséges esetek száma pontosan megadható. Tetszőleges N darab mondat esetén ez éppen annyi esetet jelent, amennyi az N elemű halmaz összes részhalmazának száma, vagyis a feladat 2^N -féleképpen oldható meg.

2.4. Igaz, hamis vagy nem állítás?- régi feladat újragondolása

Tekintsük most az egyik eredeti feladatot úgy, hogy már tudjuk, hogy lehetnek köztük nemállítások is. Mivel a megoldás során olyan bonyolult gondolatmenetek fogalmazódtak meg, illetve keveredtek össze, ami már nehezebben volt követhető számomra, először ezt a feladatot is egy konkrét példára nézzük meg, mégpedig úgy választottam meg ezt a konkrét példát, vagyis az állítások konkrét számát, hogy a példa tanulságos legyen, de még könnyen számolható. Ezután vezetjük le a feladatot általános N számú állítás esetére. Nézzük tehát, hogy mik a lehetséges megoldások, először kilenc állítással:

Egy papírlapon az alábbi kilenc állítás olvasható.

1. *Ezen a lapon legalább 1 állítás igaz.*
2. *Ezen a lapon legalább 2 állítás igaz.*
3. *Ezen a lapon legalább 3 állítás igaz.*
4. *Ezen a lapon legalább 4 állítás igaz.*
5. *Ezen a lapon legalább 5 állítás igaz.*
6. *Ezen a lapon legalább 6 állítás igaz.*
7. *Ezen a lapon legalább 7 állítás igaz.*
8. *Ezen a lapon legalább 8 állítás igaz.*
9. *Ezen a lapon legalább 9 állítás igaz.*

Induljunk ki például abból, hogy a negyedik és a hetedik mondatok nem állítások. Tegyük fel először, hogy az 5-ös sorszámú állítás igaz. Az ötödik állításig legfeljebb négy igaz állításunk van, sőt, mivel a negyedik mondat nem is állítás, ezért csak három igaz állításunk lehet az ötödik kijelentésig. Legyenek tehát ezek is (1-3.) igaz állítások. Ekkor az ötödik állítás igazsága miatt kell találnunk még egy igaz kijelentést. Ha a fennmaradók közül bármelyik állítást igazzá tesszük, annak igazságértéke miatt még több igaz állítást kell találnunk. Minden egyes igaz állítás újabb igaz állításokat követel, ez a kijelentések véges száma miatt nem teljesíthető, ellentmondásra jutunk a feladatban. Az ötödik mondat tehát mindenképpen hamis állítás lesz, sőt, az előzőek miatt a nyolcadik és kilencedik mondatok is biztosan hamis kijelentések. Térjünk vissza kicsit az első három állításra. Az előbbi példában ezek igaz állítások voltak, de nézzük meg, milyen más megoldásokat kaphatunk még az eddigi feltételek mellett, miszerint a negyedik és a hetedik mondatok nem állítások. Ha már a legelső kijelentés hamis, miszerint van legalább 1 igaz állítás, akkor a második és a harmadik állítás is hamis, és minden további kijelentés is az. Ha az első állítás igaz, a második kijelentésről ettől függetlenül dönthetünk. Lehet, hogy a második már hamis, ekkor ebből következik, hogy a harmadik is hamis lesz, és az összes többi, őket követő állítás is. Ha viszont a második állítás igaz, még mindig tetszőlegesen dönthetünk a harmadik kijelentésről, lehet igaz, de lehet hamis is. Tehát négyféle megoldást kaphatunk erre a feladatra.

Három könnyen felismerhető eset még, amikor mind a kilenc állítás igaz, vagy mind hamis, vagy ha egyik mondat sem állítás. Érdekes eset, amikor feltesszük, hogy nincs igaz állítás a 9 mondat között. Mivel a kijelentések az igaz állítások számára vonatkoznak, mi pedig azt mondtuk, hogy egyáltalán nincs közöttük igaz állítás, tetszőlegesen lehet az összes mondat hamis állítás, vagy nemállítás is. A nemállítások száma nem befolyásolja a hamis állítások számát, és fordítva. Az ilyen esetek száma 2^9 , és ebben benne van az a két eset, amit már említettünk: ha az összes mondat nemállítás, vagy ha az összes mondat hamis állítás. Fontos még megjegyezni, hogy az alap feladatban, ha egy állítás igaz, a sorban előtte lévő állítások is mind igazak, illetve ha egy kijelentés hamis, a sorban utána következőknek is hamisaknak kell lenniük. Mivel azonban most nem feltétlenül tekintünk minden mondatot állításnak, azt mondhatjuk el, hogy ha egy állítás igaz, akkor minden sorban azt megelőző mondat is igaz állítás lesz, ha pedig egy kijelentés hamis, akkor a sorban utána következő mondatok tetszőlegesen lehetnek hamis állítások, vagy nemállítások.

Összefoglalva tehát a lapon látható kilenc mondat között az elsőtől kezdve (persze csak ha van egyáltalán igaz, de ezt az előbb tárgyaltuk) egy darabig igaz kijelentéseket láthatunk, utána pedig váltakozva fordulhatnak elő hamis kijelentések, és igazságérték nélküli mondatok.

Vizsgáljuk meg ez alapján a további lehetséges megoldások számát. Ha csak az első kijelentés igaz, az 2^8 darab esetet ad, ha csak az első kettő igaz, az 2^7 darab esetet, és így tovább. Az összes ilyen eset száma $2^8 + 2^7 + 2^6 + \dots + 2 = 510$.

Ha tehát meg szeretnénk találni a feladatnak minden lehetséges megoldását, azt éppen $3 + (2^9 - 2) + 510 = 1023$ féleképpen tehetjük meg.

Nézzük meg, hány megoldása lehet a feladatnak, ha tetszőleges N számú mondattal indulunk neki.

1. Ezen a lapon legalább 1 állítás igaz.

2. Ezen a lapon legalább 2 állítás igaz.

3. Ezen a lapon legalább 3 állítás igaz.

...

N . Ezen a lapon legalább N állítás igaz.

Megint jelöljük ki azokat a mondatokat, amik nem lesznek állítások. Az biztos, hogy ha kijelöltük az összes ilyen mondatot, akkor a legelső ilyen „nemállítás” után, sorban a fennmaradó állítások mindegyike hamis lesz. Hiszen ha a k -adik mondat nem állítás, biztosan nem lehet már legalább $k + 2$ darab igaz állítás. Meg kell még vizsgálnunk az első nemállítás előtti állítások igazságértékét. Ezek lehetnek igazak és hamisak is, de a logikai értékük függ egymástól. Ha egy állítás igaz lesz, abból következik, hogy az összes sorban előtte lévő állításnak is igaznak kell lennie, és ha egy állítás hamis, akkor ez által az összes sorban utána következő állítás is hamis. Tehát ha az első igazságérték nélküli mondat előtti állításokat tekintjük, egy bizonyos sorszámú állításig mind igazak lesznek, utána pedig mind hamisak. Összefoglalva:

Tegyük fel, hogy van legalább egy olyan mondat, ami nem állítás. Legyen az első ilyen mondat a k -adik sorszámú. Nézzük a sorban utána következő mondatokat. Ezek mindegyike lehet hamis állítás, vagy „nemállítás” is. Ezen esetek száma 2^{N-k} . Nézzük most az első $k - 1$ darab állítást, ezen mindegyike állítás lesz, hiszen a k -adik mondatot jelöltük ki az első olyannak, ami nem lesz állítás. Az előzőek alapján képzeletben egy vonallal

pontosan szét tudjuk választani az igaz állításokat a hamisaktól. A vonalunk előtt csak igaz, utána pedig csak hamis állítások szerepelnek. Ezt a szétválasztást éppen k -féleképpen tehetjük meg. Ha tehát az alapján indulunk el, hogy melyik az első nemállításunk, ettől függeni fog az összes többi igazságérték. Az így kapott lehetséges esetek száma $\sum_{k=1}^N k \cdot 2^{N-k}$. Számolnunk kell azzal is, hogy mi történik, ha az összes mondat állítás, tehát nem jelölünk ki előzetesen semmit. Ekkorra továbbra is az érvényes, hogy egy bizonyos állításig az összes állítás igaz, utána pedig mind hamis. Vagyis lehetséges, hogy az összes állítás hamis, ahogyan az is, hogy az első állítás igaz csak, és a többi hamis, vagy az első kettő igaz, és a többi hamis, és így tovább. Ez még éppen $n + 1$ darab esetet jelent. Az összes lehetséges eset száma tehát pontosan $(N + 1) + \sum_{k=1}^N k \cdot 2^{N-k}$, ami egyszerűbben kifejezve éppen $\sum_{k=0}^N 2^{N-k}$.

Nézzük meg, vajon ugyanezt a számot kapjuk-e akkor is, ha abból indulunk ki, hogy melyik az utolsó igaz állításunk a felsorolt N darab mondat közül. Az eddigiek alapján már tudjuk, hogy egy lehetséges eset úgy néz ki, hogy az első T darab állítás igaz, utána pedig hamisak és nemállítások vegyesen fordulhatnak elő. Akárhogy is választjuk meg T -t, vagyis az utolsó olyan kijelentést, ami még igaz (és persze ilyenkor az előtte lévő $T - 1$ darab állítás is igaz), a további mondatok tetszőlegesen lehetnek igazságérték nélküli mondatok és hamis állítások is. Természetesen azt az esetet is bele kell számolnunk, hogy egyáltalán nincs igaz állítás. Így a lehetséges esetek száma éppen $\sum_{T=0}^N 2^{N-T}$.

Ugyanazt az eredményt kaptuk, sőt, ha az lenne a kiindulási pontunk, hogy melyik az első hamis állítás az N darab mondat között, szintén erre az összegre jutnánk. Ennek a feladatnak tehát $2^{N+1} - 1$ darab megoldása van.

Ezzel a képlettel most ellenőrizni is tudjuk az előző, $N = 9$ esetre vonatkozó példánkat. Kilenc mondat esetén éppen $2^{9+1} - 1 = 1023$ megoldása lesz a feladatnak, és mi pontosan ezt az értéket kaptuk, mikor körbejártuk az összes lehetséges megoldást.

3. Logika az osztályteremben

Ahogy azt dolgozatomban legelejtén is említettem, a logikai feladatok nagyon változatosak és sokszínűek lehetnek, éppen ezért a diákok számára is számos élvezetes példát tudunk felsorakoztatni. A harmadik részben először arra térek ki, hogyan épül fel a Nemzeti alaptantervben a matematikai logika, mint témakör az egyes évfolyamokon át, majd a tankönyvek által tartalmazott, ehhez kapcsolódó leckéket vizsgálom alaposabban. Végül pedig arra voltam kíváncsi, hogy egy általam tanított csoport diákjai hogyan reagálnak a dolgozat első és második részében található logikai feladatokra, hogyan gondolkodnak, és milyen válaszokat adnak a feltett kérdésekre.

3.1. Az alaptantervek a logikáról

A 2012-ben elkészült Nemzeti Alaptantervben a matematika logika először a fejlesztési feladatok megismerés, azon belül is a gondolkodás alcíme alatt jelenik meg. A következtetés, mint fogalom, illetve példák és ellenpéldák keresése és alkotása már egészen kisiskolás korban része a matematikaóráknak, azonban középiskolás korig csak olyan egyszerű, intuitív következtetésekről beszélhetünk, amelyhez nem kapcsolódik tudatos nyelvi megfogalmazás. (Nemzeti Alaptanterv, 2012). Csak az általános iskola után jelenik meg ezen következtetések bizonyítása, alátámasztása. Szintén kisiskolás korban kezdődik az értő-elemző olvasás fejlesztése, ami fontos alapjául szolgál a logika feladatok szövegezésének feldolgozásának, a lényegi információk kiszűréséhez szükséges képességnek. Az alaptantervben foglaltak szerint a matematikai logika nyelvének megismerése az általános iskola felső tagozataiban kezdődik, ami magában foglalja a matematikai és a köznyelvi szavak, kötőszavak közötti különbségek megértését. A hetedik és nyolcadik évfolyamokon pedig már részletesebben foglalkozunk a gondolatmenet leírásával, tagolásával (Nemzeti Alaptanterv, 2012).

A következő fejlesztési feladat, amiben jelentős szerepet kap a logika témaköre az *„Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek”* (Nemzeti Alaptanterv, 2012). A kommunikációhoz szorosan kapcsolódva, az általános iskola felső tagozatától kezdve újra megjelenik a nyelvi-logikai szerkezetek megismerése, a köznyelv és matematika nyelv különbségeinek megértésének fejlesztése. Fontos kiemelni az érvelést, mind szóbeli, mind írásbeli szinten a bizonyítás eszközével.

Ezután az alaptanterv a közműveltségi tartalmak fejezet alatt tárgyalja részletesebben, mik azok a konkrét témakörök és tananyagok, amiket a diákoknak el kell sajátítaniuk, továbbra is életkor szerint tagolva. Kisiskolás évfolyamokon a matematikai logika témaköre mindössze két pontot tartalmaz: „A változás értelmezése egyszerű matematikai tartalmú szövegben. Állítások igazságának eldöntése.” (Nemzeti Alaptanterv, 2012). Megjelennek az állítások, és azok igazságértéke, de még intuitív és burkolt módon, a matematika nyelvezetének használata nélkül. A szövegértelmezés, illetve az állítások igazságtartalmáról való döntés mellett felső tagozatokban a definíciók, tételek kimondásával bővül a tartalom. Ekkor tehát már megjelenik a sajátos nyelvezet, állítások és fogalmak pontos megfogalmazásának igénye. A legjelentősebb szerepet természetesen középiskolában kapja a logika témaköre, amikor a hétköznapi szövegek értelmezésén túl sor kerül a matematikai tartalmú szövegekre is. A diákok megtanulják a „minden” és „létezik”, vagy „van olyan” kifejezések helyes használatát, képesek lesznek megadni az állítások logikai értékét, illetve állítások tagadását megfogalmazni. Megjelennek a logikai műveletek is, az „és”, a „vagy” és a következtetést jelző, vagyis a „ha..., akkor” szókapcsolatok is. A tételek kimondásán felül pedig előkerül a bizonyítás és annak módszerei is (Nemzeti Alaptanterv, 2012). A logika egyébként talán az egyetlen olyan fogalom, ami bár más megközelítésben, de a matematikán kívül több más tantárgy oktatásában is megjelenik. Fontos szerepet játszik az informatikában, a magyar nyelv és irodalom tárgyában, idegen nyelvekben, a filozófiában, de még a földrajzban is.

Az új, 2020-as évi Nemzeti alaptanterv kissé más megközelítésből foglalja össze a tanítandó és tanulandó anyagrészeket az egyes oktatási szakaszokon át, abban azonban hasonló a régihez, hogy kis- és nagyiskolás, valamint középiskolás korban is fő témakört alkotnak a gondolkodási módszerek, azon belül is a matematikai logika. A tanterv szerint 4. osztály végére a tanuló megtanulja helyesen használni a logikai „nem”, illetve „és” szavakat, és az ezekkel rokon értelmű kifejezéseket is, miközben a 2012-es változatban még tudatos nyelvi megfogalmazásról nem beszéltünk. Itt is megjelenik az állítás igazságértéke, amit a diák ekkora képes megítélni adott halmazra vonatkozóan, valamint hiányos állításokat igazzá tenni tetszőleges elemekkel, megadott alaphalmazból. Az „Ismeretek felhasználása” címke alatt említésre kerülnek a logikai játékok, amikben a tanuló képes a saját döntéseit mérlegelve előre gondolkodni. Továbbra is a matematikai kommunikáció fontos része marad, hogy a diák önállóan tudja értelmezni a hallott vagy olvasott matematikai tartalmú

szövegeket, amik az első lépést jelentik a logikai feladatok megoldásának folyamatában (Nemzeti Alaptanterv, 2020).

Az általános iskola felsőbb évfolyamainak elvégzésével az állítások logikai értékének megállapításán túl már önállóan tudnak a tanulók igaz és hamis állításokat megfogalmazni, egyszerűbb bizonyítási gondolatsort megérteni és összeállítani, valamint a matematikai szaknyelvet következetesen használni logikai érvelés során. A középiskolában elsajátított képességek szinte majdnem teljesen megegyeznek az új alaptantervben a régihez képest, de a logikát szorosan a halmazok témaköréhez kapcsolva, a 12. évfolyam végére a diák képes átlátni a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat is (Nemzeti Alaptanterv, 2020).

3.2. Tankönyvi tartalmak

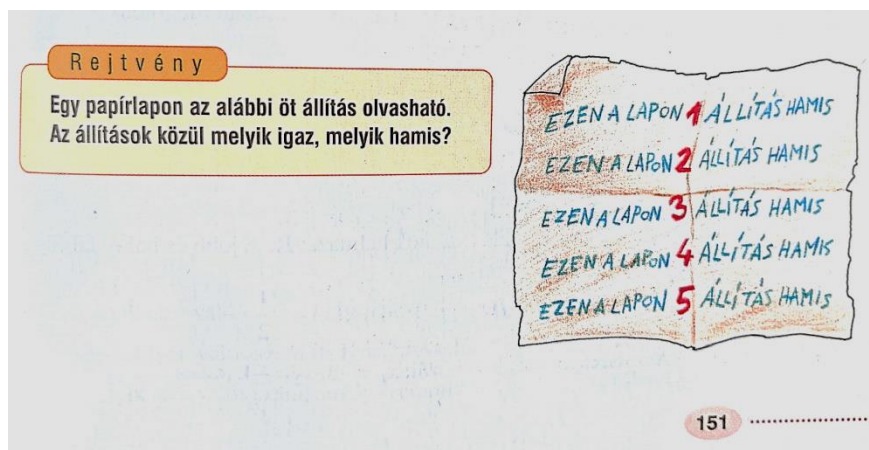
A matematika tankönyvek közül igyekeztem a legismertebb, leggyakrabban előforduló könyveket alapul venni. Az egyik típus a Mozaik Kiadó által létrehozott Sokszínű matematika tankönyv, ezen kívül talán a második legtöbbet használt az Eszterházy Károly Egyetem Oktatókutató és Fejlesztő Intézet kiadványa, de figyelembe vettem az Oktatási Hivatal új, 2020-as Nemzeti alaptantervhez hangolt kiadást is. Az elsőt tekintve, a logika témaköre először a 10. évfolyamos tankönyvben jelenik meg, akkor is csak a szükséges és elégséges feltételek témakörét tárgyalva, egy-két kiegészítő feladattal, ahol állítások és állítások megfordításának igazságértékét szükséges vizsgálni. Ezután a kiadvány a skatulyaelvvel, valamint sorba rendezéses feladatokkal halad tovább (Sokszínű matematika 10, 2011). Részletesebben csupán a 12.-es tankönyvben foglalkozhatunk újra a logikával, itt már szerepet kapnak a logikai kijelentések, a logikai műveletek (negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia), és bár emelt szintű tananyagként megjelölve, de a teljes indukció, mint bizonyítási módszer is. Ebben a leckében felfedezhető néhány híres, Róka Sándor-féle példatárban is megjelenő lovag-lóköltő, avagy *Ki hazudik?* és *Ki mond igazat?* típusú feladat, és további, logikai kijelentésekkel kapcsolatos feladatok, amik már nagyon hasonlóan működnek, mint az általam korábban vizsgált példák. (Sokszínű matematika 12, 2011). A logikai műveletek fejezetekben leginkább csak olyan feladatok szerepelnek, amelyek klasszikus, repetitív módon gyakoroltatják a kijelentések közötti műveleteket, jelölésüket és megfogalmazásokat.

Ezzel szemben az Oktatókutató és Fejlesztő Intézet már a 7. évfolyamon megjelenteti a matematikai logikát. Az itt szereplő példák ugyan még jóval egyszerűbbek, mint a középiskolai tananyagban, de előkerül az állítás, az állítás megfordítása, és ezek igazságértéke is, egyelőre implicit módon (Matematika 7, 2017). A 10. évfolyamon is jóval több ismeretet fed le a tankönyv, mint a Mozaik kiadványa. Az állítások igazságértékének meghatározásán túl már megjelenik a közöttük lévő logikai kapcsolat, a feltétel fogalma és a következtetés, túlnyomórészt táblázatok használatával. Tárgyalja a konjunkció és diszjunkció műveleteket, és igazságtáblázat segítségével szemlélteti azokat, végül nyitott mondatokon keresztül is gyakoroltatja a szükséges tananyagot. Nagyon röviden kerülnek említésre a „ha ..., akkor” és az „akkor és csak akkor” kifejezések, és csak ráadásként jelenik meg részletesebben az implikáció, ekvivalencia és a kizáró vagy fogalma (Matematika 10, 2017). A 12. évfolyamos tankönyvben már csak ismétlésként, az érettségire való gyakorlás alatt jelenik meg a logika témaköre, az előző évek feladatainak összefoglalásával (Matematika 12, 2017).

Végezetül pedig tegyünk említést az Oktatási Hivatal 10. évfolyamos tankönyvéről, ami az eddigiekkel szemben a 2020-as Nemzeti alaptanterv alapján készült el. A tananyag tartalma nagyon hasonló, mint az előbb említett kiadásban, de az elméleti háttér részletesebben tárgyal, ezáltal könnyebben követhető és érthető, míg a gyakorlati feladatok száma jóval kevesebb, mint az Oktatókutató és Fejlesztő Intézet könyvében, ezzel kisebb hangsúlyt fektetve a gyakoroltatásra (Matematika 10, 2021).

3.3. Kísérlet a középiskolásokkal

Eddig a tankönyvek azon konkrét leckéit, moduljait vizsgáltam, amelyek kifejezetten a matematikai logika témaköré köré épültek, azonban az ilyen típusú feladatok megtalálhatóak más témakörökhöz kapcsolódóan is ezekben a kiadványokban. A tanárképzéshez tartozó hosszú tanítási gyakorlatomat végezve, a kilencedikes csoportommal éppen az egyenletek témakörét tárgyaltuk, amikor egy ismerős feladatra találtam a nekik készült Sokszínű matematika tankönyvben.



(Sokszínű matematika 9, 2011, 151.o.)

Ugyanazzal a feladattal találkoztam, ami Róka Sándor példatárában is szerepel, és aminek mentén elkezdtem írni a szakdolgozatomat. Adódott az ötlet, hogy néhány feladatot az eddig felsoroltak közül, feladhatnék a csoportnak is, megfigyelve és lejegyezve válaszaikat. Mielőtt ezekről az eredményekről részletesebben beszámolnék, szeretném bemutatni a gimnáziumot és a csoportokat, amelyekben végül elvégeztem a megfigyelést.

Az iskola Újbuda központjában helyezkedik el, Budapest kiemelt, erősen infrastrukturált területén. Az iskola 1984-ben alakult, és először külvárosi gimnáziumként működött. Később, 2000 elején, az akkori kerületi fenntartó úgy döntött, hogy elveszi az épületet az iskolától, és felosztatja a gimnáziumot. Végül sikerült új helyszínt találni, így az iskola a korábbiakhoz hasonlóan Kelenföld környékén várta a diákokat. A vezetőség elmondása alapján, mivel az új épület meglehetősen nagy volt, de még mindig a külvárosban helyezkedett el, a megtöltése igen nehéz feladat volt, így nem tudták megválasztani az odajáró diákokat, bármilyen felvételi rendszer nélkül kerültek be a középiskolába. Végül 2015-ben kapták meg a jelenlegi épületet. A kerületi adottságoknak köszönhetően minden adott a megfelelő iskolai környezet kiépítéséhez, illetve ma már olyan sok, nagyon jó képességű tanuló jelentkezik a gimnáziumba évről évre, hogy komoly feladatot okoz kiválasztani azokat, akik valamelyik osztályban folytathatják tanulmányaikat. A diákok eltökéltségének köszönhetően így jelentős mértékben növekedtek például az érettségi vizsgák átlagai is, a korábbiakhoz képest. Az iskolában jelenleg 454 diák, és 56 alkalmazott van, amiből körülbelül 40 fő jelenti a tanári kar létszámát. A fenntartó jelenleg a Dél-Budai Tankerületi Központ, tehát állami fenntartású gimnáziumról van szó.

Az iskolába jelentkezők többféle osztály közül választhatnak; létezik nyelvi előkészítő osztály, általános tagozat, média, művészeti, ami ének-zene, valamint rajz szakos diákokból

áll össze, illetve a biológia tagozatot nemrég felváltó informatika tagozat is. Minden tagozat a hozzá kapcsolódó tárgyakból nyújt emelt óraszámot, valamint minden tanulónak lehetősége van az utolsó két évben általa választott fakultációs órákon is részt venni. A felvételi rendszer minden osztályban legalább egylépcsős, ami az alap központi felvételit jelenti, ennek pontszáma alapján kerülhetnek az iskolába a gyermekek. Ezen kívül három tagozaton, a nyelvi, a művészeti és a média tagozaton szóbeli felvételre is sor kerül. Az elmúlt években az iskolába való túljelentkezés olyan mértéket ért el, hogy az általános tagozaton például már képtelenség lenne szóbeli vizsgát lefolytatni a nagyjából ezer jelentkező között.

A 2021/2022-es tanév szeptemberében kerültem az iskolába tanítási gyakorlatra. Az első csoport, amellyel elvégeztem a vizsgálatot a logikai feladatokkal kapcsolatban az a csoport, akiket matematikából tanítok a tanév eleje óta. Ez 24 főt jelent, a csapat pedig a következőképpen állt össze: a kilencedik évfolyam két osztályát „összevonták” a matematika órák csoportosítására, mindkét osztály eredendően két szakra bontott. Az egyik osztályt a média és művészeti szakosok alkotják, a másik pedig az általános, illetve informatika tagozatosokból áll össze. A két osztályt (és ezzel négy szakot) összevonva, három csoportra osztották az összesen nagyjából 65 főt, a felvételi eredményeik alapján. Abba a csoportba, amiben a gyakorlatomat végzem azok a tanulók kerültek, akik a matematika felvételin legalább 40 pontot értek el a maximálisan megszerezhető 50 pontból, tehát teljesítmény szerint a legerősebb csapatot kaptam magam mellé, a négy szakról vegyesen kiválasztva. Az elmúlt hónapok tapasztalatai alapján ezek a tanulók valóban jó matematikai érzékkel rendelkeznek, kifejezetten érdeklődők és lelkesek a tantárgy iránt, nagyon jól látják az összefüggéseket és könnyen tanulnak. Több diák is rendszeres látogatója az iskolában kihirdetett matematikaversenyeknek. Először tehát ezzel a csoporttal dolgoztam az általam kigyűjtött feladatokon, rájuk a későbbiekben „első csoport”-ként fogok hivatkozni. Annak érdekében, hogy minél többféle gondolkodásmódot ismerjek meg, illetve olyan diákok is megszólaljanak, akiknek nem a matematika az egyik fő érdeklődési körük, úgy döntöttem, az általam angol nyelvből tanított, nyelvi előkészítő csoporttal is átbeszéljük a logikai feladatokat. Ez a csoport 14 főből áll, és a nulladik évfolyamuk miatt már második évüket töltik az iskolában. Bár matematikából nem én tanítom ezeket a diákokat, korábban már jártam bent órájukon hospitálás céljából, így volt egy előzetes képem arról, hogy kik azok, akik jobban érdeklődnek a matematika iránt, aktívabbak az órákon. Ettől függetlenül továbbra is jóval kevesebb információ állt rendelkezésemre velük kapcsolatban, hiszen nem

vagyok ott rendszeresen a matematika óráikon, és sosem tanítottam az angolon kívül más tantárgyból őket. Ezt a csoportot a továbbiakban második csoportként fogom említeni. Egyik csapat tanulói sem foglalkoztak még az iskolában a matematikai logikával, mint önálló témakörrel, tehát nem ismernek konkrét definíciókat, tételeket, azonban képesek döntést hozni állítások igazságértékéről, és oldottak már meg logikai feladatokat több tantárgy keretein belül is.

Először mindkét csoporttal ismertettem a szakdolgozatom témáját, illetve elmagyaráztam számukra, miért fontos az aktív részvételük a feladatokban (ami egyébként jelen van minden óránkon, mindkét csoportban), valamint hogy különösen kiemelt szerepe van annak, hogy milyen ötleteik vannak, hogyan gondolkodnak, milyen következtetésekre jutnak akár egymás válaszaiból kiindulva. Bár jeleztem előre, hogy a cél érdekében ideális lenne, ha mindenki a keze feltartásával jelezné, ha szólni szeretne, és csak azután fűzne gondolatot az órához, ha erre engedélyt kapott, ezt a szabályt – a két csoportnál különböző okból kifolyólag – nehéz volt tartani. Most egyesével, sorrendben szeretném bemutatni azokat a feladatokat, amikkel dolgoztunk, és minden feladatnál kitérni arra, hogy milyen válaszok érkeztek a két csoport tanulóitól. A tanulókat a saját nevük kezdőbetűjétől eltérő, tetszőleges betűvel fogom jelölni, az azonos betűk azonos tanulókat takarnak. Az első feladat így szólt:

(1) Egy papírlapon az alábbi öt állítás olvasható:

- 1. Ezen a lapon 1 állítás igaz.*
- 2. Ezen a lapon 2 állítás igaz.*
- 3. Ezen a lapon 3 állítás igaz.*
- 4. Ezen a lapon 4 állítás igaz.*
- 5. Ezen a lapon 5 állítás igaz.*

Kérdés: Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

Az első csoportban rögtön a következő válaszok érkeztek:

A: De nincs ott, hogy „csak” ennyi van.

Én: Vonatkozzanak most ezek az állítások az igaz állítások pontos számára, tehát pontosan 1 állítás igaz, pontosan 2 állítás igaz, és így tovább...

B: Akkor ez könnyű. Az első állítás igaz, amin az van, hogy az 1 darab igaz állítás, és az igaz állítás az első.

Én: Ez most kicsit kusza volt, mit is mondott pontosan B?

B: Nem lehet egynél több állítás igaz, mert kizárja egymást az összes állítás. Ha azt mondjuk, hogy a lapon 4 állítás igaz, akkor nem lehet az, hogy 3 állítás igaz, mert nem 3, hanem 4. Tehát kizárják egymást az összes többi. Tehát csak 1 darab igaz állítás lehet, és ez az első lesz.

C: Én B-re (az ő megoldására) szavazok.

D: De amúgy két állítás igaz!

Valaki: Miért, melyik a másik?

D: Az, hogy egy papírlapon az alábbi öt állítás olvasható!

Mivel itt még nem szerettem volna kitérni a „Minden mondat állítás?” kérdésre, javasoltam, foglalkozzunk csak a sorszámozott állításokkal, de érdekes volt a gondolat, hogy lényegében a feladat szövegezésében is szerepel(hetnek) kijelentő mondatok, amiket, mint állításokat figyelembe vehetnek a diákok. Láthatóan a tanulók nem mentek el olyan, számukra tisztázatlan kérdések mellett, mint hogy mi vehető a feladatban állításnak, sőt, az sem volt egyértelmű, hogy ha nem szerepel az egyes mondatokban a „pontosan” vagy a „legalább/legfeljebb” kifejezés, mit jelent valójában a kijelentés. A feladat megoldása egyébként nem okozott gondot a diákok számára, bár természetesen volt, aki annál lassabban jutott következtetésekre, mint a választ egyébként bekiabáló társai.

A másik csoport ugyanerre a feladatra a következőképpen reagált:

X: Négy hamis lesz, az első négy, és az ötös igaz, mert ugye minden állítás igaz, mert oda van írva.

Én: De ha mindegyik hamis, és az csak az ötödik igaz...

X: Akkor egy állítás is igaz, tehát mindegyik igaz!

Y: De ha egy állítás igaz, és az összes többi nem, akkor csak egy állítás igaz.

Z: Igen. Akkor csak az első lehet igaz. Az öt közül egy igaz, és az az első.

Én: De miért csak egy lehet igaz? Mert ezek az állítás egymást...

Y: „Conflictolják!”

Én: Mondjuk inkább, hogy kizárják, de igazad van.

Ebben a csoportban hamarabb felmerült téves gondolatmenet, de a továbbiakban ennek nyomán elindulva végül kikötöttünk a jó megoldáshoz. Ami szintén különbözött, hogy nem volt különösebb igény a feladat tisztázására és egyértelműsítésére, nem merültek fel azok a kérdések, amik az első csoportban külön gondolkodást igényeltek. A precíz megfogalmazások, a pontos következtetések, ok-okozati összefüggések korrekt leírása is hiányos, de a gondolatmenetet sikerült végül mindenki számára érthetővé tenni.

(2) *Egy papírlapon az alábbi öt állítás olvasható:*

1. *Ezen a lapon 1 állítás hamis.*
2. *Ezen a lapon 2 állítás hamis.*
3. *Ezen a lapon 3 állítás hamis.*
4. *Ezen a lapon 4 állítás hamis.*
5. *Ezen a lapon 5 állítás hamis.*

Kérdés: Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis? (Róka, 2010, 17. o. 75.)

E: Ez ugyanaz, mint az előző, hogy ha egy állítás igaz, akkor négy hamis lesz. Az az egy igaz, akkor a többi hamis.

B: Igen! Pontosan!

Én: Oké, és nem lehet, hogy mindegyik hamis?

C: Nem. Amúgy de!

D: Nem, mert ha az öt állítás hamis, akkor az igaz, hogy öt állítás hamis.

A: Akkor négy állítás hamis, és akkor pont a négyes lesz igaz.

Én: Miért lesz a többi négy hamis, ha az egyik igaz?

C: Mert megint kizárják egymást az állítások.

Az első csoportban szinte azonnal érkezett a felismerés, hogy ez a feladat szoros összefüggésben áll az előzővel, és azt is könnyedén tisztáztuk, miért biztos, hogy van legalább egy igaz állítás a felsorolt öt kijelentés között.

A második csoportban nagyon hasonló beszélgetés zajlott le, ott is hamar arra a válaszra jutottunk, hogy nem lehet mind az öt megoldás hamis, és megint csak egy lehet igaz, ami így a negyedik kijelentés lesz. Az egyetlen különbség az volt, hogy itt hiányzott, illetve nem került kimondásra, hogy ez a feladat lényegében ugyanúgy működik, mint az előző, pedig annak mintáján elindulva sikerült szinte azonnal megoldásra jutni ebben a példában is. Ezután áttértünk a kicsit komplikáltabb feladatokra:

(3) Egy papírlapon az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.
2. Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.
3. Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.
4. Ezen a lapon legalább 4 állítás hamis.
5. Ezen a lapon legalább 5 állítás hamis.
6. Ezen a lapon legalább 6 állítás hamis.

Kérdés: Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

F: Az ötödik lesz igaz. Hogy ezen a lapon legalább 5 állítás igaz. Mert a 6-os nem lehet igaz.

G: Jó, de akkor a negyedik meg a harmadik állítással mi van?

B: Igen, tehát hogy legalább egy állítás hamis, az lesz igaz. Mert teljesen mindegy akkor, hogy mennyi hamis van, biztosan van legalább 1, és akkor az igaz. Mert nincs olyan opció, hogy mindegyik igaz.

Én: Miért nincs olyan opció?

C: Mert ha legalább 6 állítás hamis, akkor csak hat állítás van, és így mindegyik hamis lenne. De ha mindegyik hamis, akkor a hatodik az igaz lenne. Ami paradoxon.

Én: Mit jelent az, hogy paradoxon?

Erre a kérdésre a következő válaszok érkeztek: „Nincs megoldása.” „A logika menete visszajut az elejére.” „Mint amikor a papírra ráírjuk, hogy a másik oldal hamis, és a másik oldalra meg azt írjuk, hogy az első oldal igaz.”

Én: Foglalkozunk kicsit össze akkor a feladat megoldását.

H: Szerintem az ötös...tehát egytől ötig az összes igaz. Vagy több válasz van.

A: Nem! A hármas lesz igaz...És ha egy igaz, akkor a fölötte lévő többi is igaz lesz.

B: Nem lehet igaz mindegyik, mert ha azt mondod, hogy legalább három hamis, akkor az, hogy legalább egy állítás hamis nem lehet igaz, mert magában foglalja azt, hogy kettő darab hamis is lehet.

D: De a legalább 3 igaz, nem? Ennek több megoldása van.

Én: Próbáljunk meg elindulni egy fix pontról, és szépen lépésenként haladjunk, mert megint káosz van. Azt beszéltük, hogy az összes állítás nem lehet igaz. Lehet mindegyik hamis?

B: Nem, mert akkor a hatodik állítás igaz lenne.

Én: Tehát akkor az utolsó állítás biztosan...

C: Hamis. Akkor az első állítás meg biztosan igaz.

A: Akkor az ötös állítás meg biztosan hamis.

Én: Mert ha igaz lenne, akkor már csak hány hamis állításunk lehetne összesen?

Együtt: Négy.

A: És akkor már van kettő hamis, tehát igaz a második állítás.

Innen már könnyen befejeztük a feladatot, egyértelművé vált a megoldás, aminek helyességét ellenőriztük is. Felmerült a paradoxon fogalma, bár pont egy olyan feladatnál, ami önmagában még megoldható, a végleges megoldás nem ad paradoxont. Azzal azonban már nem voltak teljesen tisztában, mit is jelent a paradoxon szó pontosan. A diákok felfedeztek olyan kulcsfontosságú észrevételeket, minthogy ha ebben a sorban egy állítás igaz, akkor az összes sorban előtte lévő állítás is igaz, és bár igyekeztem rávezetni őket, az a felismerés, hogy hamis kijelentés után pedig minden soron következő is hamis, nem került kimondásra. Érdekes felszólalás volt még ez előtt, miszerint „ha legalább három állítás hamis, akkor az, hogy legalább egy állítás hamis nem lehet igaz, mert magában foglalja azt, hogy kettő darab hamis is lehet.” Ez a meglátás természetesen téves, ahogy ezt az előző észrevétellel cáfoltuk is, de a tanuló úgy gondolkodott, hogy ha egy kijelentésről tudjuk, hogy igaz, akkor az már indikálja, hogy a soron következő is az lesz, mert „megengedi” neki, hogy az is igaz legyen. A másik téves gondolat ebben a megjegyzésben a „legalább” szó alapvetően helytelen interpretációja, ezeket tehát érdemes lett volna letisztázni a feladat megoldása előtt. Nézzük meg a második csoportot:

V: Ha legalább, akkor az minimum valami. Itt biztosan van igaz.

Y: Ezek most így megengedik egymást, nem kizárják.

A feladat megoldása nehezen indult el, ezért igyekeztem rávezetni őket arra, hogy biztosan lesz az állítások között igaz kijelentés, azonban az indoklással így sem jutottunk előre:

Én: Mi indokolja, hogy biztosan van közöttük igaz állítás?

Z: Hogy legalább az egyik hamis.

Y: Az, hogy ha mindegyik hamis lenne, akkor lenne közöttük hamis.

Nagyjából egy perces további gondolkodás után jutottunk arra a következtetésre, hogy ha mindegyik állítás hamis lenne, akkor valamelyiknek igaznak kell lennie, ami nem más, mint a legutolsó állítás. A kételkedő tekintetek kedvéért azért tisztáztuk még egyszer, hogy miért is van ez így. Közben kitértünk arra is, hogy miért nem lehet az összes kijelentés igaz, visszacsatolva a legelső tanuló felszólalására. Innen viszonylag könnyen tették meg a felfedezést, miszerint ha az összes állítás nem lehet igaz, akkor biztosan van hamis állítás, tehát az első sorszámú kijelentés már biztosan igaz lesz.

X: Ha az első kijelentés igaz, akkor két igaz állítás is lehet, a második is az lesz, mert az első megengedi neki.

Ugyanaz az értelmezési probléma merült fel tehát, mint az első csoportnál. A legalább szóból ugyanis a tanuló arra következtetett, hogy ha igaz az, hogy van legalább N hamis állítás, akkor $N + 1$ is lehet, sőt lesz is ennyi, mert már nem diszjunkt állításokról beszélünk. Ez persze igaz, hiszen a „legalább” kifejezés magában foglalja, hogy ennél több is lehet, ugyanakkor fontos velük tisztázni, hogy a használt szó akkor is megállja a helyét, amikor pontosan annyi darab adott tulajdonságú állítás van, amiről a kijelentésünk szól, és lehetséges, hogy nincs is több. Ennél a pontnál az egyik diáknak új ötlete támadt:

Y: Itt kapunk egy kör szerűséget. Az egyesnek a párja a hatos, a kettesnek a párja az ötös, a hármasnak pedig a négyes.

Ez a komment azért volt meglepő, mert az eddigi észrevételeket tekintve még igen messze jártunk a megoldástól, egészen pontosan egy állításnak tudtuk az igazságértékét, a tanuló pedig egyik pillanatról a másikra felfedezte a feladat megoldásának kulcsgondolatát, precíz és matematikailag helyes magyarázat nélkül. Onnantól viszont, hogy megsejtettük, hogy a kijelentések valamilyen módon párban állnak egymással, további rávezető kérdésekkel meg tudták oldani a diákok a feladatot, bár azzal továbbra sem birkóztunk meg könnyen, hogy az adott párokban melyik állításról tudjuk először megállapítani az igazságát, és melyik igazságérték következik a másikból.

Mielőtt rátértünk volna a megoldhatatlan feladat problémájára, még egy utolsó példát vetítettem ki a diákok számára, amiről előzetesen azt gondoltam, hogy a megoldása több gondolkodást fog igényelni, mint az eddig tárgyalt feladatoké.

(4) Egy papírlapon az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.

2. *Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.*
3. *Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.*
4. *Ezen a lapon legalább 4 állítás hamis.*
5. *Ezen a lapon legalább 5 állítás hamis.*
6. *Ezen a lapon legalább 6 állítás hamis.*
7. *Ezen a lapon legalább 7 állítás hamis.*
8. ...

Sajnos a 8. állítás olvashatatlan. Kérdés: A 8. állítás igaz vagy hamis? (Róka 2013, 88.o. 3.)

A legizgalmasabb válaszokat kétség kívül ez a példa hozta:

F: De olvasható a nyolcadik állítás. Valószínűleg az van alatta, hogy „Ezen a lapon legalább 8 állítás hamis.”

I: Ennek így nem lesz majd megoldása.

C: Két megoldás is lehet, mert bármi lehet az a hiányzó mondat. Az első hét állítás feltétlenül igaz?

Érdekes felvetés, miszerint a példa csak a nyolcadik állítás igazságértékére kérdez rá, akkor vajon feltételezhető-e, hogy az első hét állítást biztosan igaznak veszi a feladat. Rövid gondolkodás után persze rájöttünk, hogy ez nem is lenne lehetséges. Több tanulónál is felmerült a gondolat, hogy a megoldás csak attól függ, hogy mit adunk meg nyolcadik állításnak, hiszen meg tudunk adni olyan kijelentést, ami biztosan igaz, és olyat is, ami biztosan hamis. Például ha a nyolcadik állítás az, hogy az ég zöld, akkor ez az állítás eleve biztosan hamis lesz. Itt némi tisztázásra szorult, hogy nem mi adjuk meg az utolsó kijelentést, hanem az bár nem látjuk, de már ott van, és nekünk úgy kell megoldani ezt a feladatot, hogy akármi is áll ott, biztosan meg tudjuk adni az igazságértékét. Végül egy célzott kérdéssel sikerül elindulni a megoldás útján, mert a fókusz (hibásan) az utolsó állítás köré csoportosult. A másik ötlet, ami alapján a diákok igyekeztek a feladat végére jutni az volt, hogy feltételezzük egyes kijelentésekről (például rögtön a negyedikről, vagy a hetedikről), hogy igazak, vagy hamisak, és ebből kiindulva következtessünk a többi állítás igazságára. Ilyenkor rendszeresen emlékeztetni kellett őket, hogy fontos logikailag helyesen felépíteni a megoldást.

Ahogy ez már korábban is megtörtént, végül megint hamarabb találták meg a tanulók a teljes megoldást, mint hogy bizonyítani tudták volna helyességét, vagy fel tudták volna építeni az oda vezető több lépésből álló utat. A megoldás megsejtése sokat segíthet a levezetésben, de még nem teljesen érthető számukra, hogy a bizonyítás mentén juthatunk el a végső konklúzióhoz, nem pedig a végeredmény helyességét igazoljuk ellenőrzéssel.

A második csoport első reakciói nagyon hasonlóak voltak az első csoportéhoz, sőt, ugyanazzal a példával is éltek. „Ha azt mondjuk nyolcadik állításként, hogy az ég kék, akkor például ez igaz lesz.” Itt újra tisztázni kellett a feladatot, elmagyarázni mindazt, amit az előző csoportban is tettem, ezután viszont gördülékenyen tudtunk tovább haladni, elfogadták a magyarázatom, nem is kételkedtek benne a továbbiakban. A megoldás lépéseit az előző feladat mintájára már könnyebben megalkották, olyan diákok is bekapcsolódtak a beszélgetésbe, akik eddig csendben figyelték a történeteket. Ez remek visszajelzés volt arra, hogy az előzőekben bemutatott megoldásmenetet megértették, és tudják alkalmazni a továbbiakban, más feladatokban is.

Végezetül a következő példával álltak szemben a csoportok:

(5) Egy papírlapon az alábbi állítások olvashatók:

- 1. Ezen a lapon legalább 1 állítás hamis.*
- 2. Ezen a lapon legalább 2 állítás hamis.*
- 3. Ezen a lapon legalább 3 állítás hamis.*
- 4. Ezen a lapon legalább 4 állítás hamis.*
- 5. Ezen a lapon legalább 5 állítás hamis*

Mint tudjuk, ennek a feladatnak nincs egyértelmű megoldása, és az előző példának köszönhetően mindkét csoport hamar felismerte, hogy az eddigiekhez hasonlóan nem tudjuk „párba állítani” az állításokat, a „középső” kijelentés egyedül fog maradni, és nem okozott nehézséget belátniuk, hogy miért jutunk ellentmondásra igaz és hamis igazságértékkel egyaránt. Megnéztük még néhány páratlan számú állításra, hogy vajon minden esetben paradoxont kapunk-e, és bár hétköznapi nyelvezettel, de sikerült tetszőleges kijelentésre általánosítani a problémát. Azt, hogy ez hogyan lehetséges, részletesebben nem tárgyaltuk, mindenesetre úgy tűnik, a megfelelő felvezető feladatokkal nem okozott különösebb gondot ez a paradoxon.

Az óra végéhez érve olyan állításokat igyekeztem mutatni számukra, amiknek szintén nem tudjuk egyértelműen megadni az igazságértékét. Ezeket a kijelentések a „Süt a nap”, vagy az „Elmúlt háromnegyed tizenkettő”, illetve a „Szeretem a palacsintát” voltak. Különféle indoklások merültek fel a kérdés megválaszolása közben, például, hogy a Nap mindig süt, csak éppen eltakarják a felhők, vagy a Föld másik oldalát világítja éppen, vagy, hogy nem mindegy, hogy a tegnapi háromnegyed tizenkettőről beszélünk, vagy a mai napról, de végezetül arra megállapításra jutottunk, hogy ezek olyan kijelentések, amiknek változhat az igazságértéke, akár egyénenként, akár rajtunk kívül álló okok miatt. Mivel egyik csoport sem dolgozott még kifejezetten a logika témakörével matematika órán, nem merültünk el jobban az állítás definíciójában, vagy abban a kérdéskörben, hogy hogyan lehetséges ez a változás. Mindenesre ezek az ellentmondásosságok még nem indítanak el új kérdéseket a tanulóknál.

Mint azt korábban említettem, szerettem volna, ha a csoportokban mindenkinek egyenlő esélye van felszólalni és érvényesíteni a gondolatait, ez nem igazán teljesült. Az első csoportban a matematikai iránt erősen érdeklődő, lelkes diákok vannak, akik nehezen tudják magukban tartani, ha új ötletük támad. Utólag egyáltalán nem bánom, hogy nem sikerült a bekiabálásokban visszafogni őket, mert lehet, hogy sok érdekes és ösztönösen jövő kommenttől fosztottuk volna meg a megfigyelést, ha mindenki a jelentkezésre koncentrál és a felszólalás engedélyére vár, valamint azt gondolom, ekkora létszám esetén nem is lenne igazságos ezt elvárni 15 éves tanulóktól. Így azonnal tudtak egymás válaszaikra is reagálni, egymás gondolatait tovább fűzni. A második csoportban még inkább kiéleződött a helyzet, miszerint ugyanaz a 2-3 fő vette ki aktívan részét az órából. Ez véleményem szerint annak tudható be, hogy a csapat összlétszáma eleve jóval kisebb, illetve különbözőképpen érdeklődnek a matematika iránt, nagyobb szintbeli eltérések vannak jelen. Érdekes lett volna meghallgatni, akár privát beszélgetésben a többiek gondolatait is, erre azonban már nem volt lehetőségem az iskolai falain belül, sem kívül.

Összességében az mondható el a vizsgálatról, hogy a diákok bátran megoldották a feladatokat, és mindig képesek voltak megmondani, hogy egy adott feladatnak volt-e megoldása, vagy sem. Bár az indoklás néha igényelt némi korrekciót, de azt is meg tudták fogalmazni, hogy mi volt a megoldás, azonban azon már nem gondolkoztak el, hogy mit jelent az, hogy valami állítás, vagy esetleg nem állítás, amennyiben nem tudtak egyértelmű igazságértéket csatolni egy állításhoz. Tehát bár lelkes és a matematika szempontjából tehetséges tanulókról van szó, a matematikai tudásuk még nem volt elég ahhoz, hogy

felmérjék a pontos matematikai helyzetet. Bármilyen megkérdőjelezés nélkül elfogadták azt, hogy vannak feladatok, amiknek nincs megoldása, anélkül, hogy belemerültünk volna a gondolatba, hogy vajon hogyan lehetséges ez, miközben teljesen azonos állításokról beszéltünk. Amiatt, hogy ezen nem kellett elgondolkodniuk, gyorsan és helyesen tudtak gondolkodni a maguk szintjén. Legalább annyira gyorsan, ahogyan a doktoranduszok is tették korábban a kutatás azon részében, ahol az általuk formált csoportnak adtak ki logikai feladatokat (Szabó, Bereczky-Zámbó, Szenderák, Szeibert, 2021). A különbség egyértelműen kirajzolódik azonban abban, hogy a doktori fokozat megszerzésére készülő doktoranduszok már sokkal inkább megrekedtek azokban a felmerülő kérdésekben, bizonytalanságokban, amik a gimnáziumi diákokban még fel sem merülnek. Ez persze egy teljesen természetes folyamat. A magyarországi matematikaoktatás felépítése spirális, ezért ahogy a vizsgálatok során is tapasztaltuk, amíg kevesebb tudással rendelkezünk, sokkal bátrabban oldunk meg feladatokat, kevesebb kétség merül fel bennünk. Minél többet tanultunk és tapasztaltunk, minél inkább tágultak nézeteink, annál kritikusabbak vagyunk magunkkal szemben is, annál inkább elvárjuk a precizitást saját magunktól, és annál inkább képes elgondolkodtatni akár egy első látásra eleminek tűnő matematikai példa is.

Irodalomjegyzék

- [1] **Andrea Cantini, Riccardo Bruni:** *Paradoxes and Contemporary Logic*. [Paradoxes and Contemporary Logic \(Stanford Encyclopedia of Philosophy/Fall 2021 Edition\)](#), Stanford University, 2021.
- [2] **Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna:** *Matematika 10*. Első kötet. Eszterházy Károly Egyetem, 2017.
- [3] **Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné:** *Matematika 12*. Eszterházy Károly Egyetem, 2017.
- [4] **Gedeon Veronika, Paróczay Eszter, Számadó László, Tamás Beáta, dr. Wintsche Gergely:** *Matematika 7*. Eszterházy Károly Egyetem, 2017.
- [5] **Juhász István, Orosz Gyula:** *Matematika 10. Az érthető matematika*. Oktatási Hivatal, 2021.
- [6] **Dr. Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Dr. Urbán János, Vincze István:** *Sokszínű matematika 9*. Tizenegyedik kiadás. Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
- [7] **Dr. Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Dr. Urbán János, Vincze István:** *Sokszínű matematika 10*. Tizedik kiadás. Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
- [8] **Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Dr. Urbán János, Vincze István:** *Sokszínű matematika 10*. Tizedik kiadás. Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
- [9] **Nemzeti Alaptanterv 2012.**
https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf, 2012. június 4.
- [10] **Nemzeti Alaptanterv 2020.** Magyar Közlöny, 2020. január 31.
- [11] **Raymond Smullyan:** *Mi a címe ennek a könyvnek? – Drakula rejtélye és más logikai feladatok*. Typotex Kiadó, Budapest, 2016.
- [12] **Róka Sándor:** *2000 feladat az elemi matematika köréből*. Typotex Kiadó, Budapest, 2010.
- [13] **Róka Sándor:** *Logika-land*. Typotex Kiadó, Budapest, 2013.
- [14] **Szabó Csaba, Bereczky-Zámbó Csilla, Szenderák Júlia, Szeibert Janka:** *On a metamathematical question in talent care*. https://ami.uni-eszterhazy.hu/uploads/papers/finalpdf/AMI_54_from215to230.pdf, 2021.

- [15] **Thomas Bolander:** *Self-Reference*. [Self-Reference \(Stanford Encyclopedia of Philosophy\)](#), Stanford University, 2017.