

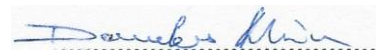
Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Domokos Klára (U8J6KY) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE matematika – német nyelv s kultúra osztatlan tanári mesterszakján

írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2022. 11.24.



a hallgató aláírása

Szakdolgozat

Domokos Klára

matematikatanár – német nyelv és kultúra tanára
osztatlan tanári mesterszak

2022. Budapest

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Bölcsészettudományi Kar

Szakdolgozat

*Irracionális algebrai számok szemléltetésének
lehetőségei középiskolában*

Témavezető:

Dr. Szabó Csaba
egyetemi tanár

Készítette:

Domokos Klára
matematikatanár – német
nyelv és kultúra tanára
osztatlan tanári mesterszak

2022. Budapest

Tartalom

1. Bevezetés	4
2. A szabályos hétszög középponti szögének koszinusza	5
2.1. Trigonometrikus megközelítés.....	7
2.2. Megközelítés komplex számokkal	11
2.3. Körosztási polinomokkal.....	12
2.4. A gyökök megkeresése	14
3. A szabályos kilencszög középponti szögének koszinusza.....	16
3.1. Trigonometrikus módszer	16
3.2. Megközelítés komplex számokkal	19
3.3. Megközelítés a körosztási polinommal	20
3.4. A gyökök megkeresése	20
4. A szabályos 14-szög középponti szögének koszinusza	21
4.1. Megközelítés a körosztási polinommal	21
4.2. Komplex számokkal	22
4.3. A gyökök megkeresése	24
5. A szabályos 18-szög középponti szögének koszinusza	25
5.1. Megközelítés a körosztási polinommal	25
5.2. A tizenhatalmadfokú polinom.....	27
5.3. A gyökök meghatározása	27
6. Feladatkezelési készség vizsgálata középiskolában	27
6.1. Bevezetés	27
6.3. Értékelés	30
6.4. Eredmények.....	35
7. Irodalomjegyzék	37
8. Mellékletek	38
8.1. Feladatok	38
8.2. Ábrajegyzék	39

1. Bevezetés

Egyetemi tanulmányaim során részt vettem számos olyan kísérletben, amelyeket évfolyamtársaim végeztek TDK munka és publikációk keretein belül. Ezek elkezdtek érdekelni és szerettem volna a szakdolgozati munka írása alatt részt venni ezen kutatásokban. Végül két különböző kutatáshoz csatlakoztam és jelen dolgozatban az ezekkel kapcsolatos eredményeimet szeretném bemutatni. Az egyik az algebrai irracionális számok bevezethetőségének lehetősége középiskolában, a másik a problémafelvetési képesség kutatása. Az első témát két ok miatt választottam: egyrészt nagyon érdekes, másrészt egyetemi tananyagnak is meg kell jelennie a szakdolgozati munkámban. Ebben a témában úgy tűnt, mintha már szinte mindent megoldottak volna, mert rögzítették, hogy melyek azok az algebrailag szerkeszthető számok, amelyek bevezethetőek középiskolában. Azonban vannak euklideszi értelemben nem szerkeszthető számok is. Felmerül a kérdés, hogy ezekkel ki lehet-e egészíteni a középiskolai tananyagot. Ismeretes, hogy a köbgyök fogalma szerepel a középiskolai tananyagban és azt is tudjuk, hogy a legkisebb nem szerkeszthető szám algebrai foka három. Tehát a diákok találkoznak az algebra területén olyan számokkal, amelyek nem szerkeszthetőek. Szakdolgozatomban azt fogom végiggondolni, hogy a harmadfokú algebrai irracionális számok hogyan szemléltethetőek. A dolgozatom első részében ezzel foglalkozom. A problémafelvetéssel kapcsolatos kutatásban világos kutatási feladatok és kérdések vannak megfogalmazva, ezért ehhez egyszerűen tudtam csatlakozni egy saját kísérlettel. A munkámmal hozzá tudtam járulni, hogy a kutatás egésze tovább lépjen, az én eredményeimet is fel tudja használni a kutatócsoport. A diákok részéről történő matematikai problémafelvetéssel dolgozatom második részében foglalkozom. Elmondható tehát, hogy szakdolgozatomban mindkét része módszertani indíttatású, és az első fejezetben van számos olyan rész, amely az egyetemi tanulmányokra épít, sőt középiskolai többnyire nem bevezethetőek. Az algebrai irracionális számokról szóló részben érvelésben alapja Kiss Emil *Bevezetés az algebra* című tankönyve (Kiss, 2007) lesz és hivatkozni fogok az egyetemi algebra tanulmányaim 2.,3.,4. félévében tanultakra.

2. A szabályos hétszög középponti szögének koszinusza

Dolgozatom első része irracionális algebrai számok szemléltetéséről szól. A középiskolai matematika oktatás során elérhető és elérendő számfogalom fejlődésével már többen foglalkoztak. A dolgozatomban olyan algebrai számok értékének kiszámítása fog szerepelni, amelyek a középiskolai tananyag ismeretében, vagy ennek apró kiegészítésével érthetőek és követhetőek, ezért mindig ennek figyelembevételével fogom levezetni a számításaimat. Az oktatásban elsőként megjelenő két irracionális szám a π és a $\sqrt{2}$. A π irracionálitását csak kimondjuk középiskolában. Az első indirekt bizonyítás, amivel találkoznak a diákok tizedik osztályban, az a $\sqrt{2}$ irracionálitásának bizonyítása (Oktatási, Matematika tankönyv 10., 2021). A gyökös számokkal és azok középiskolában való megjelenésével már több tanárszakos hallgató is foglalkozik vagy foglalkozott publikációjában (Szabó et.al., 2021). Ebben a publikációban kitérnek arra, hogy a diákok egyre többször nyúlnak a számológéphez számításaik elvégzése során, és ilyenkor áthelyeződik a hangsúly a végeredmény megadására, és átsiklanak a számolási folyamat adta megértési lehetőségeken (Szabó et. al., 2021). A számológép irracionális végeredmények esetén közelítő értéket ad meg, a diákok ezt kerekítve határozzák meg a végeredményt.

A számok és irracionális számok szemléltetése fontos része a matematikaoktatásnak. Az említett dolgozatban olyan algebrai számokkal foglalkoznak, amelyek négyzetgyökjelek, vagy azok ismételt alkalmazásával megadhatóak. Az egyik érdekes példa a $\cos \frac{2\pi}{5}$ értéke, amelynek értéke a trigonometrikus azonosságok alkalmazásával és a másodfokú egyenlet megoldóképletének segítségével meghatározható: $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. A dolgozatban szerepel egy korlát is arra, hogy meddig érdemes ezekkel a számokkal foglalkozni. Ott a szerkeszthetőség elvére alapozva, kettőhatvány fokú számokkal foglalkoznak. Ezeknek a számoknak a középiskolai oktatásban történő bevezethetősége korlátozott, például a 17-szög középponti szögének koszinuszának képlete a következő:

$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{\sqrt{17}-1+\sqrt{2}(\sqrt{34+6\sqrt{17}}+\sqrt{2}(\sqrt{17}-1)(\sqrt{17}-\sqrt{17})-8\sqrt{2}(\sqrt{17}+\sqrt{17})+\sqrt{17}-\sqrt{17})}{16}$$

Ez egy középiskolás számára már túl bonyolult ahhoz, hogy érdekes legyen (Szabó et. al., 2021). Gauss nagyon büszke volt arra az eredményére, hogy a szabályos 17-szög szerkeszthető. A legenda szerint meghagyta végrendeletében, hogy a sírja szabályos 17-szög alakú legyen. Végül ezt a kérést megtagadta a sír készítője, ugyanis egy hosszú és fáradalmas szerkesztés után egy, szinte kör alakú sír lett volna az eredmény (Élesztős & Rostás, 1999). Vannak olyan

számok, amelyek nem szerkeszthetők, mégis valami miatt érdekesek. Ilyen például további szabályos sokszögek középponti szögeinek koszinusza, vagy a szabályos sokszögek szögeinek koszinusza. A szabályos sokszögek oldalhosszúságának szerkeszthetősége összefügg a szabályos sokszögeknek, a szabályos sokszögek szögeinek és középponti szögeinek szerkeszthetőségével. Jelen dolgozatban azt fogjuk megvizsgálni, hogy ezekkel a számokkal tudunk-e, érdemes-e középiskolában foglalkozni. Megvizsgáljuk, hogy hogyan fejezhető ki ezek a számok és hogy olyan alakra tudjuk-e őket hozni, ami egy középiskolás számára is érthető.

A legkisebb fokszám, amely fokú számok nem szerkeszthetők, azok a harmadfokú számok. A szabályos n oldalú sokszög középponti szöge koszinuszának a foka $\frac{\varphi(n)}{2}$. Tehát, ha harmadfokú koszinusz értékeket keresünk, akkor meg kell oldanunk a $\frac{\varphi(n)}{2} = 3$ egyenletet, azaz $\varphi(n) = 6$. A következő tanult képlettel tudjuk a $\varphi(n)$ -et kiszámítani:

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$$

Könnyű számolás mutatja, hogy $n = 7; 9; 14; 18$ esetében teljesül az egyenlőség. Általában a $\cos \frac{2\pi}{n}$, mint a szabályos sokszög középponti szögének a koszinusza előáll úgy, mint egy n -edik egységgyök és konjugáltja összegének a fele. Emiatt adódik, hogy a későbbiekben szükségünk lehet a körosztási polinomokra. Ezekhez a számokhoz tartozó körosztási polinomok hatodfokúak lesznek. Írjuk fel ezeket az alábbi, Algebra 2 tárgyból tanult képlet alapján:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x), \text{ ebből } \Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n, d \neq n} \Phi_d(x)}$$

$$\Phi_7(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_9(x) = \frac{x^9 - 1}{x^3 - 1} = x^6 + x^3 + 1$$

$$\Phi_{14}(x) = \frac{x^{14} - 1}{(x^7 - 1) \cdot \Phi_2(x)} = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\Phi_{18}(x) = \frac{x^{18} - 1}{(x^6 - 1) \cdot \Phi_9(x)} = x^6 - x^3 + 1$$

A n -edik körosztási polinomok gyökei az n -edik primitív egységgyökök, amelyek egy szabályos n -szöget határoznak meg a komplex számsíkon. Ezek segítségével kiszámíthatjuk a keresett koszinuszokat. A következőkben meg fogjuk vizsgálni különböző megközelítésekből azon szögek koszinuszának az értékét, melyeknek a foka 3. Dolgozatomban külön hivatkozom

egyetemi algebra tanulmányaim különböző féléveiben tanultakra, de ezek mind megtalálhatóak Kiss Emil *Bevezetés az algebra* című könyvében (Kiss, 2007).

2.1. Trigonometrikus megközelítés

A szabályos hétszög középponti szöge $\alpha = \frac{2\pi}{7}$, e szög koszinuszának az értékét szeretnénk szépen kifejezni. Tehát, középiskolai nyelven megfogalmazva a kitűzött célt, olyan egyenleteket keresünk, amelyeknek gyöke a $\cos \frac{2\pi}{7}$, egyetemi szinten megfogalmazva, azokat a racionális együtthatós polinomokat keressük, amelyeknek gyöke a $\cos \frac{2\pi}{7}$. Tudjuk, hogy minden ilyen polinomnak osztója a $\cos \frac{2\pi}{7}$ minimálpolinomja, tehát szeretnénk megkeresni a $\cos \frac{2\pi}{7}$ minimálpolinomját is. A legkézenfekvőbb ilyen polinomot úgy kapjuk, ha a $\cos(7\alpha) = 1$ egyenlőségből kiindulva kifejezzük a $\cos(7\alpha)$ -t $\cos\alpha$ -val. Az addíciós képletek ismeretében már sejthetjük, hogy hetedfokú polinomot kell kapnunk. A következő addíciós képletekből és a trigonometrikus pitagoraszai azonosságból tudunk kiindulni:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

Ezeknek az összefüggéseknek az alkalmazásával megkapjuk a következő egyenlőségeket:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cdot \cos^3\alpha - 3 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(4\alpha) = 8 \cdot \cos^4\alpha - 8 \cdot \cos^2\alpha + 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3\alpha$$

$$\sin(4\alpha) = 4 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha$$

A $\cos(7\alpha)$ -t a fenti egyenletek alapján tudjuk levezetni:

$$\begin{aligned} \cos(7\alpha) &= \cos(3\alpha + 4\alpha) = \cos(3\alpha) \cdot \cos(4\alpha) - \sin(3\alpha) \cdot \sin(4\alpha) = \\ &= (4 \cdot \cos^3\alpha - 3 \cdot \cos\alpha)(8 \cdot \cos^4\alpha - 8 \cdot \cos^2\alpha + 1) - \\ &- (3 \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3\alpha)(4 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha) = \\ &= 32 \cdot \cos^7\alpha - 56 \cdot \cos^5\alpha + 28 \cdot \cos^3\alpha - 3 \cdot \cos\alpha - 12 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin^2\alpha + \\ &+ 12 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos\alpha + 16 \cdot \sin^4\alpha \cdot \cos^3\alpha - 16 \cdot \sin^6\alpha \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Egy szinuszból és koszinuszból hetedfokú kifejezést kaptunk, amelyben a koszinusz és a szinusz szögfüggvény is szerepel. Vegyük észre, hogy a $\sin\alpha$ kitevője mindenhol páros. A

trigonometrikus pitagoraszai azonosság segítségével $\sin^2\alpha$, $\sin^4\alpha$, és $\sin^6\alpha$ kifejezhető $\cos\alpha$ segítségével az alábbiak szerint:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin^4\alpha = (1 - \cos^2\alpha)^2 = 1 - 2 \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$$

$$\sin^6\alpha = (1 - \cos^2\alpha)^3 = 1 - 3 \cdot \cos^2\alpha + 3 \cdot \cos^4\alpha - \cos^6\alpha$$

Helyettesítsük be ezeket az összefüggéseket a fenti egyenletbe. Az összevonás elvégzését követően megkapjuk azt a polinomot, amelyben $\cos\alpha$ különböző hatványaival fejezzük ki $\cos(7\alpha)$ -t.

$$\cos(7\alpha) = 64 \cdot \cos^7\alpha - 112 \cdot \cos^5\alpha + 56 \cdot \cos^3\alpha - 7 \cdot \cos\alpha$$

Tudjuk, hogy esetünkben $\cos(7\alpha) = 1$, ezért a következő egyenletet kapjuk:

$$64 \cdot \cos^7\alpha - 112 \cdot \cos^5\alpha + 56 \cdot \cos^3\alpha - 7 \cdot \cos\alpha - 1 = 0$$

Írjunk a $\cos\alpha$ helyére x -et:

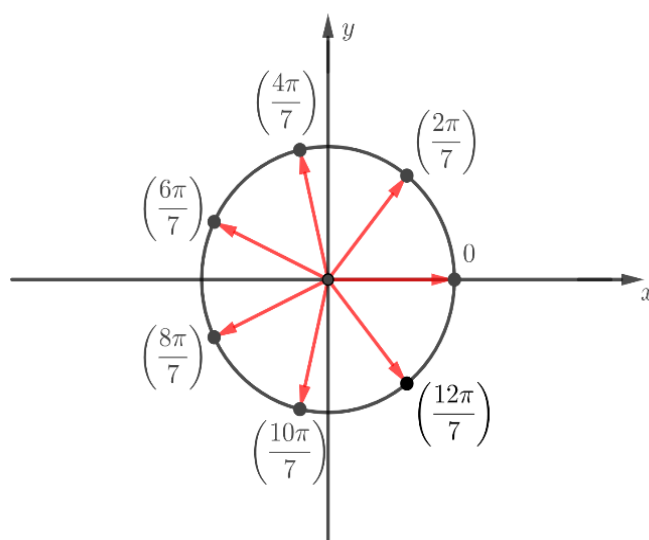
$$64 \cdot x^7 - 112 \cdot x^5 + 56 \cdot x^3 - 7 \cdot x - 1 = 0$$

Ennek a polinomnak a gyökei pontosan a $\cos(7\alpha) = 1$ egyenlet α megoldásainak a koszinuszai. Hetedfokú egyenletet kaptunk, ennek keressük a gyökeit. Próbáljuk meg felbontani ezt a hetedfokú polinomot kisebb fokú polinomok szorzatára. Mivel nem ismerünk biztos algoritmust arra, hogy hogyan bontunk fel egy hetedfokú polinomot kisebb fokú felbonthatatlan polinomok szorzatára, ezért csak próbálkozni tudunk. Először vizsgáljuk meg a racionális gyöktesztet, hogy vannak-e racionális gyökei a polinomnak. Algebra 2 tárgyból tanultak szerint olyan racionális számokat keresünk, amelyeket tört alakban felírva a számláló és a nevező relatív prímei, a számláló osztója az 1-nek, a nevező a 64-nek. Ezek szerint a lehetséges gyökök: $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}; \pm \frac{1}{16}; \pm \frac{1}{32}; \pm \frac{1}{64}$. Helyettesítsük be ezeket az egyenletbe. Azt kapjuk, hogy $x = 1$ gyöke az egyenletnek. A többi számot kipróbáljuk és látjuk, hogy ezek nem lesznek megoldások. Tehát $(x - 1)$ -et ki tudjuk emelni és a következő szorzatot kapjuk:

$$(x - 1)(64x^6 + 64x^5 - 48x^4 - 48x^3 + 8x^2 + 8x + 1) = 0$$

Most a hatodfokú polinomot szeretnénk tovább bontani. Ezt próbálkozással elég hosszadalmas lenne megvalósítani, ugyanis ebből az alakból nem látszik, hogy hányadfokú polinomok szorzatára bomlik fel a kifejezés. Az 1-t újra behelyettesítve láthatjuk, hogy ez nem lesz többszörös gyök. Tehát több racionális gyöke nincsen a polinomnak. Nézzük meg, hogy más úton nem tudunk-e közelebb jutni a keresett faktorizációhoz. Ha megvizsgáljuk, hogy hogyan kaptuk ezt a hetedfokú egyenletet, akkor azt látjuk, hogy azoknak a számoknak a koszinuszai

lesznek gyökök, amelyekre teljesül, hogy $7\alpha = 2 \cdot k\pi$. Ezek a számok nem mások, mint $\alpha = 0; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{8\pi}{7}; \frac{10\pi}{7}; \frac{12\pi}{7}$. Ábrázoljuk a hetedik körosztási polinom gyökeit (1. ábra).



1. ábra – Hetedik körosztási polinom gyökei, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).

Tudjuk, hogy a szemléltetett komplex számoknak, mint gyököknek a valós része éppen az ezekhez a szögekhez tartozó koszinusz értékek lesznek. Ebből az elgondolásból rögtön látszik, a racionális gyökteszt elvégzése nélkül is, hogy a polinomnak gyöke a $\cos 0 = 1$, ezért kiemelhető az $(x - 1)$. Tudjuk, de a rajz még jobban szemlélteti, hogy a koszinusz értékek páronként egyenlőek: $\cos \frac{2\pi}{7} = \cos \frac{12\pi}{7}$; $\cos \frac{4\pi}{7} = \cos \frac{10\pi}{7}$; $\cos \frac{6\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7}$ (1. ábra). Ebből arra tudunk következtetni, hogy a hatodfokú tag egy harmadfokú polinomnak a négyzete. Ez alapján felírhatjuk:

$$\begin{aligned} & (x - \cos \frac{2\pi}{7}) \cdot (x - \cos \frac{4\pi}{7}) \cdot (x - \cos \frac{6\pi}{7}) \cdot (x - \cos \frac{8\pi}{7}) \cdot (x - \cos \frac{10\pi}{7}) \cdot \\ & \cdot (x - \cos \frac{12\pi}{7}) = (x - \cos \frac{2\pi}{7})^2 \cdot (x - \cos \frac{4\pi}{7})^2 \cdot (x - \cos \frac{6\pi}{7})^2 = \\ & = \left((x - \cos \frac{2\pi}{7}) \cdot (x - \cos \frac{4\pi}{7}) \cdot (x - \cos \frac{6\pi}{7}) \right)^2 \end{aligned}$$

Most keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amelynek a négyzeteként megkaphatjuk a keresett hatodfokú kifejezést. Nézzük meg a hatodfokú polinomot:

$$(64x^6 + 64x^5 - 48x^4 - 48x^3 + 8x^2 + 8x + 1)$$

Láthatjuk, hogy a főegyütthatója 64, a konstans tagja 1. Tehát a harmadfokú tényező $8x^3$ -al fog kezdődni és $+1$ -re vagy -1 -re fog végződni. Vizsgáljuk meg, hogy mi lehet a másodfokú tag együtthatója. Mivel az ötödfokú tag együtthatója 64 és tudjuk, hogy ez a másodfokú és a

harmadfokú tagok együtthatóinak szorzatának kétszereseként állhat elő, ezért visszafelé gondolkodva látjuk, hogy az x^2 együtthatója ± 4 lesz. A hatodfokú kifejezésben az elsőfokú tag együtthatója 8, ami a harmadfokú polinomban szereplő elsőfokú tag kétszereseként kapható meg, tehát az x együtthatója ± 4 lesz. Hasonló megfontolás segítségével a megfelelő előjeleket is megkaphatjuk. Ezzel a gondolatmenettel és rövid számolással megállapítottuk tehát, hogy a keresett harmadfokú polinom nem más, mint:

$$(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$$

Gondolatmenetünk összegzéseként rögzíthetjük, hogy a $(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$ polinom a $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}, \cos \frac{8\pi}{7}, \cos \frac{10\pi}{7}, \cos \frac{12\pi}{7}$ minimálpolinomja a racionális számtest fölött.

A diákoknak azt is mondhatnánk, hogy nem kell a felbontást elvégezni, használjunk számítógépes programot, például a WolframAlpha alkalmazást, amely rögtön felbontja a racionális számtest fölött a polinomot felbonthatatlan polinomok szorzatára, vagyis nem szükséges végig vezetni őket a fenti gondolatmeneten. Fontoljuk meg, hogy megmutassuk-e a diákoknak, hogy ilyen programokat hogyan lehet használni. Magyarországon a számológép használatának elsajátítása is része a matematika oktatásnak (Magyar Közlöny, 2020). A számítógépes szoftverek használata ennek egy összetettebb formája. Ezeknek az ismerete és alkalmazása a felsőoktatás során nagy előnyt jelent és sokszor elengedhetetlen. Ezért jó, ha diákjainkkal ezeket megismertetjük, hátha találkoznak még matematikával a továbbtanulásuk során.

Egy további módszertani lehetőség alsóbb osztályokban, hogy nem kérünk tőlük felbontást, hanem csak bebizonyítatjuk velük, hogy a felbontás helyes. Ekkor azt mondhatjuk, hogy bizonyítsák be, hogy a $(64x^6 + 64x^5 - 48x^4 - 48x^3 + 8x^2 + 8x + 1)$ polinom a $(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$ négyzeteként áll elő.

Tehát a hetedfokú polinomot a következőképpen tudjuk polinomok szorzatára bontani:

$$(x - 1) \cdot (8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)^2 = 0$$

Továbbra is kérdés, hogy ezt a kifejezést fel tudjuk-e bontani kisebb fokú polinomok szorzatára. Szerencsére a harmadfokú polinomról a racionális gyökteszt segítségével el tudjuk dönteni, hogy felbontható-e a polinom a racionális számtestben. Amint Algebra 2-ből tanultuk, egy harmadfokú polinom pontosan akkor felbonthatatlan a racionális számtest fölött, ha nincsen racionális gyöke. A racionális gyöktesztet már alkalmaztuk és láttuk, hogy több elsőfokú tényező nem emelhető ki a polinomból és harmadfokú tag esetén más felbontási mód nem merülhet fel. Negyedfokú polinom esetén újra gondban lennénk, mert racionális gyök híján még lehetséges volna, hogy két másodfokú tag szorzataként előáll a polinom.

Ilyen módon eljutottuk ahhoz az irreducibilis polinomhoz, amelynek gyöke a $\cos \frac{2\pi}{7}$. Ennek a polinomnak a normáltja lesz a keresett szám minimálpolinomja. Megjegyzendő, hogy amennyiben az Algebra 4 tárgyból tanultak alapján gondolkodtunk volna és előre tudjuk, hogy ennek a számnak a minimálpolinomja harmadfokú, akkor azzal, hogy megkaptunk egy harmadfokú polinomot, aminek gyöke a szám, rögtön tudhattuk volna, hogy ez a minimálpolinom és ezért felbonthatatlan.

2.2. Megközelítés komplex számokkal

A következő lehetőségként közelítsük meg a problémát a komplex számok irányából. A továbbiakban is legyen $\alpha = \frac{2\pi}{7}$. A komplex számok hatványozásáról tudjuk, hogy egy 1 hosszúságú komplex szám hetedik hatványa egyenlő az 1 hosszúságú és hétszeres szögű komplex számmal. Ezt, a komplex számok trigonometrikus alakját alkalmazva, a következő módon írhatjuk fel:

$$(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^7 = \cos(7\alpha) + i \cdot \sin(7\alpha)$$

Az egyenlet bal oldalán lévő hatványalakot kibonthatjuk a binomiális tétel segítségével, a következők szerint:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^7 = & \binom{7}{0} \cos^7 \alpha + \binom{7}{1} \cos^6 \alpha \cdot i \cdot \sin \alpha - \binom{7}{2} \cos^5 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \\ & - \binom{7}{3} \cos^4 \alpha \cdot i \cdot \sin^3 \alpha + \binom{7}{4} \cos^3 \alpha \cdot \sin^4 \alpha + \binom{7}{5} \cos^2 \alpha \cdot i \cdot \sin^5 \alpha - \\ & - \binom{7}{6} \cos \alpha \cdot \sin^6 \alpha - \binom{7}{7} \cdot i \cdot \sin^7 \alpha \end{aligned}$$

Nézzük meg az egyenlet jobb oldalán lévő kifejezést. Tudjuk, hogy $\alpha = \frac{2\pi}{7}$, ekkor teljesül a következő egyenlőség:

$$\cos\left(7 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(7 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 1$$

Tehát a következő formában tudjuk felírni az egyenletet:

$$\begin{aligned} & \binom{7}{0} \cos^7 \alpha + \binom{7}{1} \cos^6 \alpha \cdot i \cdot \sin \alpha - \binom{7}{2} \cos^5 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \binom{7}{3} \cos^4 \alpha \cdot i \cdot \sin^3 \alpha + \\ & + \binom{7}{4} \cos^3 \alpha \cdot \sin^4 \alpha + \binom{7}{5} \cos^2 \alpha \cdot i \cdot \sin^5 \alpha - \binom{7}{6} \cos \alpha \cdot \sin^6 \alpha + \binom{7}{7} i \cdot \sin^7 \alpha = 1 \end{aligned}$$

Az egyenlőség két oldalán lévő komplex számok akkor és csak akkor egyenlőek egymással, ha a valós részek és a képzetes részek külön-külön is egyenlőek. Mivel a jobb oldalon 1 szerepel,

ezért a képzetes rész 0-val egyenlő. Írjuk fel mindkét oldalnak a valós részét, ezekre a következő egyenlőségnek teljesülnie kell:

$$\binom{7}{0} \cos^7 \alpha - \binom{7}{2} \cos^5 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \binom{7}{4} \cos^3 \alpha \cdot \sin^4 \alpha - \binom{7}{6} \cos \alpha \cdot \sin^6 \alpha = 1$$

Vegyük észre ugyanúgy, mint az előző esetben, hogy a szinusz szögfüggvény kitevője mindenhol páros, ezért ezt a trigonometrikus pitagoraszai azonosság alapján ki tudjuk fejezni a koszinusz szögfüggvény segítségével, az 2.1. pontban részletezett egyenlőségek alapján. Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\cos^7 \alpha - 21 \cos^5 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + 35 \cos^3 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)^2 - 7 \cos \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)^3 = 1$$

A szorzatok felbontása és összevonás után a következő kifejezésben már csak a $\cos \alpha$, mint ismeretlen különböző hatványai szerepelnek.

$$64 \cdot \cos^7 \alpha - 112 \cdot \cos^5 \alpha + 56 \cdot \cos^3 \alpha - 7 \cdot \cos \alpha - 1 = 0$$

Vegyük észre, hogy $\cos \alpha = x$ helyettesítéssel megkaptuk ugyanazt a polinomot, amire a trigonometrikus megközelítésből is jutottunk.

$$64 \cdot x^7 - 112 \cdot x^5 + 56 \cdot x^3 - 7 \cdot x - 1 = 0$$

Tehát ezt a polinomot felbonthatjuk hasonlóképpen a racionális számtest felett felbonthatatlan polinomok szorzatára. Ekkor megkapjuk, hogy a $\cos \frac{2\pi}{7}$ szám minimálpolinomja:

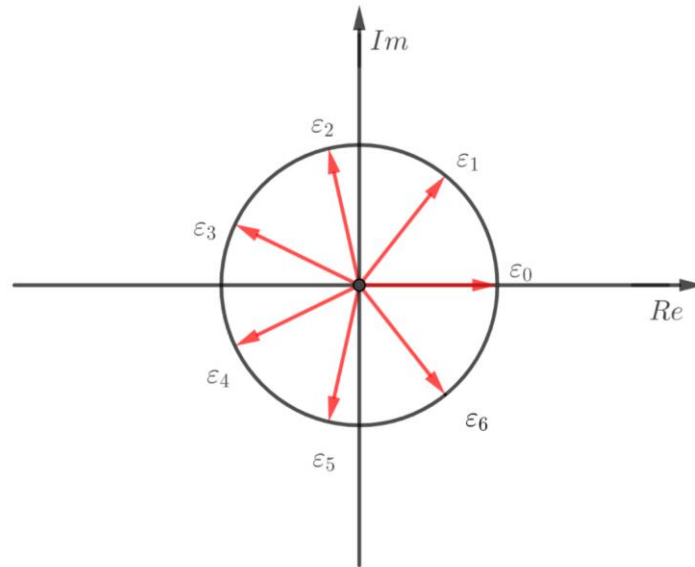
$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$

2.3. Körosztási polinomokkal

A következő lehetséges megközelítésként a körosztási polinom segítségével szeretném meghatározni $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ koszinuszának értékét. Határozzuk meg a hetedik körosztási polinomot:

$$\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

A körosztási polinomról tudjuk, hogy gyökei a primitív hetedik egységgyökök (2. ábra).



2. ábra – Hetedik egységgyökök, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).

Ezeknek az egységgyököknek a valós részei éppen a keresett koszinusz értékek: $\cos \frac{2\pi}{7}$; $\cos \frac{4\pi}{7}$; $\cos \frac{6\pi}{7}$; $\cos \frac{8\pi}{7}$; $\cos \frac{10\pi}{7}$; $\cos \frac{12\pi}{7}$. Próbáljuk meg kifejezni x -et, rendezzük át az egyenletet:

$$(x^6 + 1) + (x^5 + x) + (x^4 + x^2) + x^3 = 0$$

Ez egy reciprok egyenlet, amit úgy tudunk megoldani, hogy leosztjuk az egész egyenletet x^3 -nal:

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) + 1 = 0$$

Alkalmazni szeretnénk az $y = x + \frac{1}{x}$ helyettesítést, ehhez a következő összefüggésekre lesz szükségünk:

$$y^3 = (x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x} = (x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x + \frac{1}{x}), \text{ ezért}$$

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) = y^3 - 3y$$

$$y^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = (x^2 + \frac{1}{x^2}) + 2, \text{ ezért } (x^2 + \frac{1}{x^2}) = y^2 - 2$$

Tehát $y = x + \frac{1}{x}$ helyettesítéssel a következő egyenlethez jutunk:

$$y^3 - 3y + y^2 - 2 + y + 1 = 0$$

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

Vegyük észre, hogy ennek a polinomnak a gyökei a $x + \frac{1}{x}$ értékek, ahol x primitív hetedik egységgyök volt. Algebra 2 tárgyból tanultuk, hogy egy hetedik egységgyök reciproka az

éppen a konjugáltja, mivel teljesül, hogy $x \cdot \frac{1}{x} = 1$. Tehát ennek a polinomnak a gyökei az $\varepsilon + \bar{\varepsilon}$ értékek lesznek. A hetedik egységgyökökre $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7}$. Tehát ennek a harmadfokú polinomnak a gyökei pontosan a megfelelő keresett koszinusz értékeknek a kétszeresei. Helyettesítsünk most a $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ polinomban az y helyére $2x$ -et:

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$

Megkaptuk ugyanazt a polinomot, amit az 2.1. és az 2.2. pontokban. Ebben a megközelítési módban is sok egyetemi ismeretet alkalmaztunk, ezért ezt teljes egészében középiskolában nem tudjuk bemutatni. A megoldás menetének középiskolában is bemutatható érdekes része az lehet, hogy megmutathatjuk, hogyan látunk hozzá egy reciprok egyenlet megoldásához, milyen átalakítások és lépések szükségesek ahhoz, hogy meg tudjuk találni az egyenlet gyökeit.

2.4. A gyökök megkeresése

Láthattuk, hogy három megközelítésből is ugyanahhoz a harmadfokú polinomhoz jutottunk. Most vizsgáljuk meg tehát közelebbről ezt a polinomot, keressük meg a gyökeit. Ha zsebszámológéppel szeretném a gyököket megkeresni, nincsen nehéz dolgom, bár tudom, hogy csupán közelítő értéket fogok kapni. Mindössze be kell ütni a számológépbe, hogy $\cos \frac{2\pi}{7}$; $\cos \frac{4\pi}{7}$; $\cos \frac{6\pi}{7}$. Ellenben, ha a harmadfokú egyenlet megoldóképletét szeretném használni, akkor azt következőképpen tehetem meg: a polinomot átalakítom, használom a gyökképletet és azután visszaalakítom, ahogyan azt Algebra 2-ből tanultuk. Egyáltalán nem világos, hogy ebbe a képletbe való behelyettesítés a jelen technikai feltételek mellett hasznos tevékenységnek minősül-e. Algebrai kifejezések átalakítása, gyökeinek megkeresése során középiskolában is az egyes műveletek megértésén, gyakorlásán van a hangsúly, amit például a másodfokú egyenlet megoldóképletével sokat gyakorlunk (Szabó et. al., 2021). Ugyanakkor a harmadfokú egyenlet összetett és bonyolult képletének esetében célravezetőbb lehet valamely számítógépes programot használni a gyökök pontos és hatékony meghatározására. Ezeket a számításokat ugyanis a gép egyszerűen el tudja végezni és addig más algebrai tananyagok is teret tudnak nyerni az oktatásban. Ennek előre bocsátása után most végezzük el a behelyettesítést az előzőekben már alkalmazott képletbe.

A következő harmadfokú egyenletnek keressük a gyökeit:

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$

Az Algebra 2 tárgyból tanultak szerint a Cardano-képletet szeretnénk alkalmazni, ezért elsőként eltoljuk a polinomot, hogy ne szerepeljen benne másodfokú tag:

$$x = y - \frac{1}{6}$$

$$12y^3 - 7y - \frac{7}{18} = 0$$

Leosztunk a főegyütthatóval, majd meghatározzuk a behelyettesítendő értékeket:

$$y^3 - \frac{7}{12}y - \frac{7}{216} = 0$$

Ez alapján legyen $p = -\frac{7}{12}$ és $q = -\frac{7}{216}$. A Cardano-féle megoldóképlet a következőképpen néz ki általános alakban:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Helyettesítsük be a megfelelő értékeket:

$$y = \sqrt[3]{\frac{7}{432} + \sqrt{\frac{7^2}{432^2} - \frac{7^3}{36^3}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{432} - \sqrt{\frac{7^2}{432^2} - \frac{7^3}{36^3}}}$$

Miután kifejeztük y értékét, visszahelyettesíthetünk az eltolás előtti egyenletbe. Az $x = \cos\alpha$ helyettesítés alapján írjuk fel a gyököket a következő alakban:

$$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{7}{432} + \sqrt{\frac{7^2}{432^2} - \frac{7^3}{36^3}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{432} - \sqrt{\frac{7^2}{432^2} - \frac{7^3}{36^3}}} + \frac{1}{6}$$

Ha megvizsgáljuk a kapott kifejezést, akkor látjuk, hogy a négyzetgyökjel alatt negatív szám van, tehát a köbgyök alatt egy komplex szám szerepel. Ezen nem lepődhetünk meg, hiszen tanultuk Algebra 2 tárgyból, hogy egy harmadfokú polinomnak pontosan akkor van három gyöke, ha a megoldóképletben a gyökjel alatt negatív szám szerepel. Már az előzőekben is láttuk, hogy ennek a harmadfokú polinomnak nincs több racionális gyöke. Ebből következik, hogy nem ezt a módszert fogom középiskolában használni. Bármilyen szép a harmadfokú megoldóképlet, ha szép számokat szeretnék kifejezni a harmadfokú polinomokkal, akkor a négyzetgyökjel alatt negatív számok lesznek és komplex számokkal középiskolában nem foglalkozunk. Ennek a megközelítésnek tehát az lehet az érdekessége középiskolában, ha a diákoknak azt a feladatot adjuk, hogy keressenek összefüggést arra, hogy mennyi $\cos \frac{2\pi}{7}$ értéke. Ekkor a megoldása a feladatnak már a harmadfokú polinom, mint a szám minimálpolinomja.

3. A szabályos kilencszög középponti szögének koszinusza

Az előzőekben megvitatott szabályos hétszög után vizsgáljuk meg a szabályos kilencszög középponti szögének koszinuszát. Ennek az értéknek a meghatározásához is elvégezzük a számolásokat. A gondolatmenet és az érvelések nagyon hasonlóak lesznek, ezért gyakran csak rövidítetten utalunk rá. Az olvashatóság kedvéért az indoklás mindenhol teljes lesz, esetleg kicsit rövidebben fog szerepelni.

3.1. Trigonometrikus módszer

A szabályos kilencszög középponti szöge $\alpha = \frac{2\pi}{9}$. Trigonometrikus összefüggések alkalmazásának segítségével szeretnénk megkapni α szög koszinuszának értékét. Tudjuk, hogy $\cos(9\alpha) = 1$, ezért fejezzük ki $\cos(9\alpha)$ -t az addíciós képletek segítségével. Tudjuk, hogy:

$$\cos(7\alpha) = 64 \cdot \cos^7 \alpha - 112 \cdot \cos^5 \alpha + 56 \cdot \cos^3 \alpha - 7 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

A $\cos(9\alpha)$ -t az addíciós képletek segítségével fogjuk kifejezni, ezért szükségünk lesz még a $\sin(7\alpha)$ kifejezésére. Végezzük el ennek a felbontását a korábbiakban kifejezett addíciós képletek segítségével:

$$\begin{aligned} \sin(7\alpha) &= \sin(3\alpha + 4\alpha) = (3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha)(8 \cdot \cos^4 \alpha - 8 \cdot \cos^2 \alpha + 1) + \\ &+ (-3 \cdot \cos \alpha + 4 \cdot \cos^3 \alpha)(4 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha) = \\ &= -4 \cdot \sin^3 \alpha + 3 \cdot \sin \alpha + 16 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^6 \alpha - 48 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \\ &+ 12 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^4 \alpha + 44 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 24 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Ezeknek a kifejezéseknek a segítségével már fel tudjuk írni $\cos(9\alpha)$ -t. A következő módon bontható fel:

$$\begin{aligned} \cos(9\alpha) &= \cos(7\alpha + 2\alpha) = \cos(7\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(7\alpha)\sin(2\alpha) = \\ &= (64 \cdot \cos^7 \alpha - 112 \cdot \cos^5 \alpha + 56 \cdot \cos^3 \alpha - 7 \cdot \cos \alpha)(1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha) - \\ &- (-4 \cdot \sin^3 \alpha + 3 \cdot \sin \alpha + 16 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^6 \alpha - 48 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \\ &+ (12 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^4 \alpha + 44 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 24 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha) \cdot \\ &\cdot (2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \end{aligned}$$

Ha elvégezzük a szorzástokat és az összevonásokat, akkor a következő kifejezéshez jutunk:

$$\begin{aligned} \cos(9\alpha) &= 64 \cdot \cos^7 \alpha - 112 \cdot \cos^5 \alpha + 56 \cdot \cos^3 \alpha - 7 \cdot \cos \alpha - \\ &- 160 \cdot \cos^7 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + 200 \cdot \cos^5 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - 64 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \\ &+ 8 \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + 8 \cdot \cos \alpha \cdot \sin^4 \alpha + 96 \cdot \cos^5 \alpha \cdot \sin^4 \alpha - \end{aligned}$$

$$- 88 \cdot \cos^3 \alpha \cdot \sin^4 \alpha$$

Vegyük észre, hogy a $\sin \alpha$ csak páros kitevővel szerepel, ezért a trigonometrikus pitagoraszti azonosság alapján ki tudjuk fejezni $\sin \alpha$ különböző hatványait a koszinusz szögfüggvény segítségével. Így csak a $\cos \alpha$ hatványai szerepelnek $\cos(9\alpha)$ kifejezésében:

$$\cos(9\alpha) = 256 \cdot \cos^9 \alpha - 576 \cdot \cos^7 \alpha + 432 \cdot \cos^5 \alpha - 120 \cdot \cos^3 \alpha + 9 \cdot \cos \alpha$$

Mivel $\cos(9\alpha) = 1$, ezért $\cos \alpha = x$ helyettesítéssel a következő kilencedfokú polinomot kapjuk:

$$256 \cdot x^9 - 576 \cdot x^7 + 432 \cdot x^5 - 120 \cdot x^3 + 9 \cdot x - 1 = 0$$

Keressük meg ennek a polinomnak a gyökeket, nézzük meg hogyan lehetne alacsonyabb fokú polinomok szorzatára bontani a racionális számtest fölött. A racionális gyökteszt alapján lehetséges gyökként a következő racionális számok jöhetnek szóba: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{1}{16}, \pm \frac{1}{32}, \pm \frac{1}{64}, \pm \frac{1}{128}, \pm \frac{1}{256}$. Ezekben a számláló és nevező relatív prímek, a számláló osztója az 1-nek, a nevező a 256-nak. Ha behelyettesítjük őket, akkor látjuk, hogy az $x = 1, -\frac{1}{2}$ lesznek a racionális gyökei az egyenletnek. Ekkor $(x - 1)$ -et a következők szerint emeljük ki:

$$(x - 1)(256x^8 + 256x^7 - 320x^6 - 320x^5 + 112x^4 + 112x^3 - 8x^2 - 8x + 1) = 0$$

$(x + \frac{1}{2})$ is kiemelhető, de emeljünk ki helyette $(2x + 1)$ -et, hogy egész együtthatós polinomokkal dolgozzunk. Ekkor a következő felbontást kapjuk:

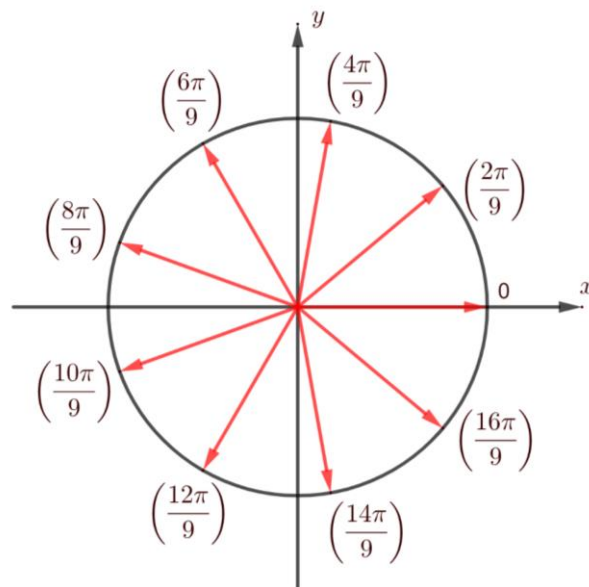
$$(2x + 1)(x - 1)(128x^7 + 64x^6 - 192x^5 - 64x^4 + 88x^3 + 12x^2 - 10x + 1) = 0$$

Most a hetedfokú polinomot szeretnénk tovább bontani, ha lehetséges. A $+1$ és a $-\frac{1}{2}$ értékeket újra kipróbáljuk, hogy nem többszörös gyökei-e az eredeti kilencedfokú polinomnak. Azt kapjuk, hogy $x = -\frac{1}{2}$ ismét gyöke a hetedfokú polinomnak, ezért $(2x + 1)$ kiemelhető, ekkor:

$$(2x + 1)^2(x - 1)(64x^6 - 96x^4 + 16x^3 + 36x^2 - 12x + 1) = 0$$

Vizsgáljuk meg a kapott hatodfokú polinomot. Megállapíthatjuk tehát, hogy a polinomnak több racionális gyöke nincsen, de emellett még lehet, hogy felbontható három másodfokú, vagy egy másod- és egy negyedfokú, vagy két harmadfokú polinom szorzatára. Ez nagyon sok lehetőség ahhoz, hogy próbálkozással hozzájárassunk. Tudjuk, hogy ennek a polinomnak a gyökei azoknak a számoknak a koszinusz értékei lesznek, melyekre teljesül, hogy $\cos(9\alpha) = 0$. Ezek az $\alpha = 0; \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{6\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}; \frac{10\pi}{9}; \frac{12\pi}{9}; \frac{14\pi}{9}; \frac{16\pi}{9}$ értékek. Mivel $\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, ezért vegyük észre, hogy az ezekhez a szögekhez tartozó koszinuszoknak az értéke páronként egyenlők

lesznek a következők szerint: $\cos \frac{2\pi}{9} = \cos \frac{16\pi}{9}$; $\cos \frac{4\pi}{9} = \cos \frac{14\pi}{9}$; $\cos \frac{6\pi}{9} = \cos \frac{12\pi}{9}$; $\cos \frac{8\pi}{9} = \cos \frac{10\pi}{9}$ (3. ábra).



3. ábra – Kilencedik körosztási polinom gyökei, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).

Nézzük meg, hogy melyik α gyököket emeltük már ki: $\cos 0 = 1$, illetve $\cos \frac{6\pi}{9} = \cos \frac{12\pi}{9} = -\frac{1}{2}$. Tehát a hatodfokú polinomnak hat darab páronként egyforma gyöke van. Ebből következik, hogy a $(64x^6 - 96x^4 + 16x^3 + 36x^2 - 12x + 1)$ polinom felírható egy harmadfokú polinom négyzeteként. Keressük meg, hogy mi lesz ez a harmadfokú polinom. A főegyüttható 8, a konstans tag 1 lesz. Ezenkívül még egy elsőfokú tagra van szükség, amelynek az együtthatója -6 , erre az x^4 együtthatójából következtethetünk. Az így kapott harmadfokú polinom négyzete valóban a hatodfokú polinom:

$$(8x^3 - 6x + 1)^2 = (64x^6 - 96x^4 + 16x^3 + 36x^2 - 12x + 1)$$

Tehát sikerült felbontani a hatodfokú polinomot két harmadfokú polinom szorzatára. A racionális gyökteszt és az α szögek koszinuszának értékéből láttuk, hogy több racionális gyöke nincs a polinomnak. Egy harmadfokú polinom csak akkor bontható fel a racionális számtest fölött, ha van racionális gyöke. Tehát egy irreducibilis harmadfokú polinomhoz jutottunk, amelynek a normáltja lesz a keresett minimálpolinom.

Az addíciós képletek és bizonyításaik 11. évfolyamon tananyag, bár a bizonyításokat és részletes levezetéseket főként erősebb csoportokban, vagy fakultáción érdemes részletezni. (Oktatási, Matematika tankönyv 11., 2022) Emelt szintű csoportokban a $\cos(2\alpha)$ és $\sin(2\alpha)$ levezetésén kívül további többszörös szögek koszinuszáról és szinuszaról is érdemes lehet

beszélni. A diákoknak akár önálló feladatként is feladható, jó lehetőséget nyújt az addíciós képletek, vagy akár a trigonometrikus pitagoraszsi azonosság gyakorlására.

3.2. Megközelítés komplex számokkal

Ebben a megközelítésben a komplex számtest tulajdonságait szeretnénk használni. Legyen $\alpha = \frac{2\pi}{9}$. Tudjuk, hogy egy 1 hosszúságú komplex szám kilencedik hatványa egyenlő az 1 hosszúságú, kilencszeres szögű komplex számmal:

$$(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^9 = \cos(9\alpha) + i \cdot \sin(9\alpha)$$

Az α értékét behelyettesítjük az egyenlet jobb oldalába:

$$\cos\left(9 \cdot \frac{2\pi}{9}\right) + i \cdot \sin\left(9 \cdot \frac{2\pi}{9}\right) = 1$$

Az egyenlet bal oldalát a binomiális tétel segítségével fel tudjuk bontani:

$$\begin{aligned} (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^9 = & \binom{9}{0} \cos^9\alpha + \binom{9}{1} \cos^8\alpha \cdot i \cdot \sin\alpha - \binom{9}{2} \cos^7\alpha \cdot \sin^2\alpha - \\ & - \binom{9}{3} \cos^6\alpha \cdot i \cdot \sin^3\alpha + \binom{9}{4} \cos^5\alpha \cdot \sin^4\alpha + \binom{9}{5} \cos^4\alpha \cdot i \cdot \sin^5\alpha - \\ & - \binom{9}{6} \cos^3\alpha \cdot \sin^6\alpha - \binom{9}{7} \cos^2\alpha \cdot i \cdot \sin^7\alpha + \binom{9}{8} \cos\alpha \cdot \sin^8\alpha + \binom{9}{9} \cdot i \cdot \sin^9\alpha \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy két komplex szám akkor egyenlő egymással, ha a valós és képzetes részek egyenlőek. Ez a kifejezés az eredeti egyenlet alapján 1-gyel egyenlő, tehát a valós rész 1, a képzetes rész 0, így a képzetes részt elhagyhatjuk a következők szerint:

$$\begin{aligned} & \binom{9}{0} \cos^9\alpha - \binom{9}{2} \cos^7\alpha \cdot \sin^2\alpha + \binom{9}{4} \cos^5\alpha \cdot \sin^4\alpha - \binom{9}{6} \cos^3\alpha \cdot \sin^6\alpha + \\ & + \binom{9}{8} \cos\alpha \cdot \sin^8\alpha = 1 \end{aligned}$$

A binomiális együtthatókat kiszámolhatjuk:

$$\cos^9\alpha - 36\cos^7\alpha \cdot \sin^2\alpha + 126\cos^5\alpha \cdot \sin^4\alpha - 84\cos^3\alpha \cdot \sin^6\alpha + 9\cos\alpha \cdot \sin^8\alpha = 1$$

Az átláthatóság kedvéért alkalmazzuk az $x = \cos\alpha$ helyettesítést. Vegyük észre ismét, hogy a szinuszosz szögfüggvény csak a páros kitevőn szerepel ezért a trigonometrikus pitagoraszsi azonosság behelyettesítésével a következő egyenlethez jutunk:

$$x^9 - 36x^7(1 - x^2) + 126x^5(1 - x^2)^2 - 84x^3(1 - x^2)^3 + 9x(1 - x^2)^4 - 1 = 0$$

Végezzük el a felbontást és összevonást:

$$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x - 1 = 0$$

Eljutottunk ahhoz a kilencedfokú polinomhoz, melyet a 3.1. pontban már sikerült a racionális számtest fölött felbonthatatlan polinomok szorzatára bontani. Ez alapján ugyanazt a harmadfokú minimálpolinomot kaptuk, mint a 3.1. pontban.

3.3. Megközelítés a körosztási polinommal

Ebben a módszerben induljunk ki a kilencedik körosztási polinomból:

$$\Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1$$

Amint azt az Algebra 2 tárgy keretében beláttuk, ennek gyökei a kilencedik primitív egységgyökök, amelyeknek a valós részei éppen a keresett koszinusz értékek. Keressük meg ennek a polinomnak a gyökeit:

$$x^6 + x^3 + 1 = 0$$

$$(x^6 + 1) + x^3 = 0$$

Egy reciprok egyenletet kaptunk, ezért osszunk le x^3 -nal:

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 1 = 0$$

Alkalmazzuk az $y = x + \frac{1}{x}$ helyettesítést, ha $(x + \frac{1}{x})^3 = (x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x + \frac{1}{x})$, akkor:

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

Ennek a polinomnak gyöke lesz az $x + \frac{1}{x}$, amely egy komplex szám és annak reciprokának az összege. A komplex számtestben a szám reciproka éppen a konjugáltjával egyenlő, ezért a kilencedik primitív egységgyökökre $x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{9}$. Tehát ennek a harmadfokú polinomnak a gyökei éppen a keresett koszinusz értékek kétszeresei. Helyettesítsünk a polinomba y helyére $2x$ -et:

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

Eljutottunk ugyanahhoz a felbonthatatlan polinomhoz, mint az előző pontokban, melynek foka minimális és gyöke a $\cos \frac{2\pi}{9}$. Felmerül itt egy kérdés: következtethetünk-e arra, hogy irreducibilis polinomot kaptunk, abból, hogy egy irreducibilis polinomot alakítottunk reciprok egyenletté?

3.4. A gyökök megkeresése

Három különböző megközelítésből vizsgáltuk meg, hogy hogyan kaphatjuk meg a $\alpha = \cos \frac{2\pi}{9}$ minimálpolinomját. Most keressük meg ennek a harmadfokú polinomnak a gyökeit. A Cardano-képletet fogjuk alkalmazni, amelyet Algebra 2 tárgyból tanultunk. Ha $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} =$

$= 0$ esetén $p = -\frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{8}$, akkor következőképpen néz ki általánosan, majd a behelyettesítés után a képlet:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
 y &= \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}} = \\
 &= \sqrt[3]{-\frac{1}{16} + \sqrt{-\frac{3}{256}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{16} - \sqrt{-\frac{3}{256}}}
 \end{aligned}$$

A négyzetgyökjel alatt negatív szám szerepel, ezért az Algebra 2 tárgyból tanultaknak megfelelően a négyzetgyökvonás után egy komplex számnak és konjugáltjának az összegeként állnak elő az irracionális gyökök.

4. A szabályos 14-szög középponti szögének koszinusza

Az előzőekben láthattuk a szabályos hétszöghöz és kilencszöghöz tartozó középponti szög koszinuszának a meghatározását különböző megközelítésekben. A továbbiakban a szabályos 14-szög középponti szögének, az $\alpha = \frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$ koszinuszának értékét szeretném meghatározni.

4.1. Megközelítés a körosztási polinommal

A szabályos 14-szög középponti szöge $\alpha = \frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$, e szög koszinuszának az értékét szeretnénk meghatározni. A körosztási polinom gyökei a tizennegyedik primitív egységgyökök, és ezek valós része a keresett koszinuszoknak az értéke. A tizennegyedik körosztási polinomot már a 2. pontban meghatároztuk:

$$\Phi_{14}(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

Próbáljuk meg meghatározni a gyököket, oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(x^6 + 1) - (x^5 + x) + (x^4 + x^2) - x^3 = 0$$

Egy reciprokon egyenletet kaptunk, ezért osszunk le x^3 -al:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

Helyettesítsünk be $x + \frac{1}{x}$ helyére y -t, ha tudjuk, hogy $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$ és $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$:

$$y^3 - 3y - y^2 + 2 + y - 1 = 0$$

$$y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0$$

A kapott harmadfokú egyenletnek gyökei az $y = x + \frac{1}{x}$ értékek, ahol x egy komplex számot jelöl. Tudjuk, hogy egy komplex szám reciproka éppen a konjugáltjával egyenlő, tehát a tizennegyedik egységgyökökre teljesül, hogy $x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{14}$. Ezért y helyére helyettesíthetünk $2x$ -et:

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Ennek a polinomnak a normáltja lesz a $\cos \frac{2\pi}{14}$ minimálpolinomja. Ez a polinom két előjelben különbözik a szabályos hétszög középponti szögének koszinuszához tartozó minimálpolinomtól, amely a $(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$ kifejezés normáltja volt.

4.2. Komplex számokkal

A komplex számokról tudjuk, hogy az 1 hosszúságú, α szögű komplex szám tizennegyedik hatványa egyenlő az 1 hosszúságú tizennégyszeres szögű komplex számmal. Ez alapján írjuk fel a következő egyenlőséget:

$$(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^{14} = \cos(14\alpha) + i \cdot \sin(14\alpha)$$

Mivel $\alpha = \frac{\pi}{7}$, ezért $\cos(14 \cdot \frac{\pi}{7}) + i \cdot \sin(14 \cdot \frac{\pi}{7}) = 1$ egyenlőség teljesül. Fejezzük ki $(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^{14}$ kifejezést a binomiális tétel segítségével:

$$\begin{aligned} & \binom{14}{0} \cos^{14} \alpha + \binom{14}{1} \cos^{13} \alpha \cdot i \cdot \sin \alpha - \binom{14}{2} \cos^{12} \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \binom{14}{3} \cos^{11} \alpha \cdot i \cdot \sin^3 \alpha + \\ & + \binom{14}{4} \cos^{10} \alpha \cdot \sin^4 \alpha + \binom{14}{5} \cos^9 \alpha \cdot i \cdot \sin^5 \alpha - \binom{14}{6} \cos^8 \alpha \cdot \sin^6 \alpha - \\ & - \binom{14}{7} \cos^7 \alpha \cdot i \cdot \sin^7 \alpha + \binom{14}{8} \cos^6 \alpha \cdot \sin^8 \alpha + \binom{14}{9} \cos^5 \alpha \cdot i \cdot \sin^9 \alpha - \\ & - \binom{14}{10} \cos^4 \alpha \cdot \sin^{10} \alpha - \binom{14}{11} \cos^3 \alpha \cdot i \cdot \sin^{11} \alpha + \binom{14}{12} \cos^2 \alpha \cdot \sin^{12} \alpha + \\ & + \binom{14}{13} \cos \alpha \cdot i \cdot \sin^{13} \alpha - \binom{14}{14} \sin^{14} \alpha \end{aligned}$$

Ez a kifejezés egyenlő kell, hogy legyen 1-gyel. Tudjuk, hogy két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha a valós és a képzetes részei egyenlőek. Itt a képzetes részek 0-val egyenlőek, ezért vegyük a binomiális tétel alapján kapott kifejezés valós részeit és tegyük egyenlővé 1-gyel. A következő egyenlethez jutunk:

$$\binom{14}{0} \cos^{14} \alpha - \binom{14}{2} \cos^{12} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \binom{14}{4} \cos^{10} \alpha \cdot \sin^4 \alpha - \binom{14}{6} \cos^8 \alpha \cdot \sin^6 \alpha + \\ + \binom{14}{8} \cos^6 \alpha \cdot \sin^8 \alpha - \binom{14}{10} \cos^4 \alpha \cdot \sin^{10} \alpha + \binom{14}{12} \cos^2 \alpha \cdot \sin^{12} \alpha - \binom{14}{14} \sin^{14} \alpha = 1$$

Ebben az egyenletben a szinusz szögfüggvény csak páros kitevőn szerepel, ezért a trigonometrikus pitagoraszai azonosság alapján ki tudjuk fejezni a $\sin \alpha$ hatványait $\cos \alpha$ -val. Ekkor a kifejezésben az α szögnek csak a koszinusz szögfüggvénye fog szerepelni. Az átláthatóság kedvéért alkalmazzuk a $\cos \alpha = x$ helyettesítést. Ez alapján $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - x^2$ helyettesítéseket is elvégezhetjük. A következő egyenletet kapjuk:

$$x^{14} - 91 \cdot x^{12} \cdot (1 - x^2) + 1001 \cdot x^{10} \cdot (1 - x^2)^2 - 3003 \cdot x^8 \cdot (1 - x^2)^3 + \\ + 3003 \cdot x^6 \cdot (1 - x^2)^4 - 1001 \cdot x^4 \cdot (1 - x^2)^5 + 91 \cdot x^2 \cdot (1 - x^2)^6 - (1 - x^2)^7 = 1$$

A szorzások elvégzése és az összevonás után egy tizennegyedfokú polinomot kapunk:

$$4096x^{14} - 14\,336x^{12} + 19\,712x^{10} - 13\,440x^8 + 4704x^6 - 784x^4 + 49x^2 - 1 = 0$$

Ennek a polinomnak gyöke lesz $\cos \alpha$ értéke, ezért ennek a gyökeit szeretnénk kifejezni. Elsőként próbáljuk meg felbontani kisebb fokú racionális együtthatós polinomok szorzatára. Ennek a polinomnak a gyöke minden olyan α -nak a koszinusza, amelyre $(14\alpha) = 0$. Ezek az $\alpha = 0; \frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}; \pi; \frac{8\pi}{7}; \frac{9\pi}{7}; \frac{10\pi}{7}; \frac{11\pi}{7}; \frac{12\pi}{7}; \frac{13\pi}{7}$ szögek koszinuszai lesznek. Vegyük észre, hogy $\cos \frac{2\pi}{7}; \cos \frac{4\pi}{7}; \cos \frac{6\pi}{7}; \cos \frac{8\pi}{7}; \cos \frac{10\pi}{7}; \cos \frac{12\pi}{7}$ páronként egyenlő értékekhez tartozó minimálpolinom a $(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$ normáltja. Tehát a tizennegyedfokú polinom osztható kell, hogy legyen ennek a harmadfokú polinomnak a négyzetével, a páronként egyenlő gyökök miatt. Emeljük ki $(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)^2$ -t és a következő nyolcadfokú polinomot kapjuk:

$$(64x^8 - 64x^7 - 112x^6 + 112x^5 + 56x^4 - 56x^3 - 7x^2 + 8x - 1) = 0$$

Mivel a racionális számtest fölött szeretnénk felbontani az eredeti tizennegyedfokú polinomot felbonthatatlan polinomok szorzatára, ezért vizsgáljuk meg a racionális gyökteszttel, hogy kiemelhetők-e racionális gyökök. Olyan törtet helyettesítünk be, amelyekben a számláló és a nevező relatív prímek, a számláló osztója az 1-nek, a nevező a 64-nek: $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}; \pm \frac{1}{16}; \pm \frac{1}{32}; \pm \frac{1}{64}$. A behelyettesítés után látjuk, hogy a $+1$, és a -1 lesznek gyökei az egyenletnek.

Tehát $(x - 1)$ és $(x + 1)$ kifejezések kiemelhetők:

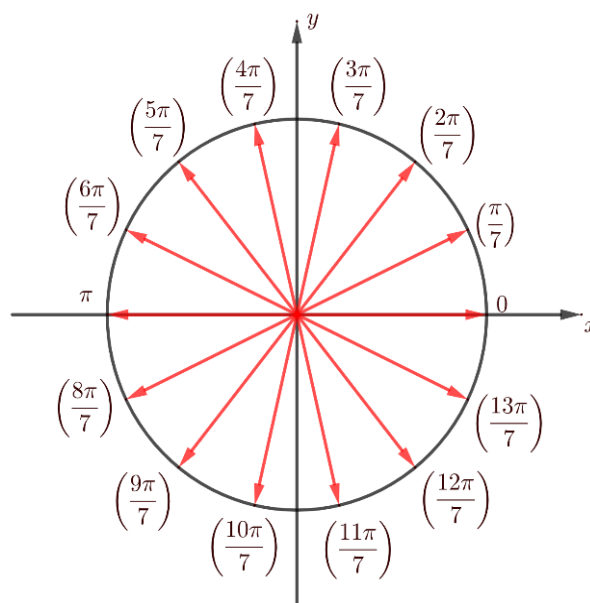
$$(x - 1)(x + 1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)^2(64x^6 - 64x^5 - 48x^4 + 48x^3 + 8x^2 - 8x + 1) = 0$$

Most a hatodfokú polinomot szeretnénk tovább bontani a racionális számtest fölött felbonthatatlan polinomok szorzatára. Azt látjuk, hogy több racionális gyöke nincsen. A $\cos \frac{\pi}{7} = \cos \frac{13\pi}{7}; \cos \frac{3\pi}{7} = \cos \frac{11\pi}{7}; \cos \frac{5\pi}{7} = \cos \frac{9\pi}{7}$ páronként egyenlő gyökök miatt adódik,

hogy felírható egy harmadfokú polinom négyzeteként. Keressük meg ezt a harmadfokú polinomot. A hatodfokú polinom együtthatóiból következtethetünk, hogy a főegyüttható 8, a konstans tag $+1$ lesz. Az x^2 és x együtthatója egyaránt -4 . Ez alapján a következő faktorizációhoz jutottunk:

$$(x - 1)(x + 1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)^2(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2 = 0$$

Ha megvizsgáljuk a kapott faktorizációt, akkor láthatjuk, hogy $(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$ harmadfokú kifejezésnek nincsenek további racionális gyökei és harmadfokú polinom esetén racionális gyök híján más felbontási mód nem merül fel. Tehát eljutottunk egy irreducibilis polinomhoz, melynek normáltja lesz a $\cos \frac{\pi}{7}$; $\cos \frac{3\pi}{7}$; $\cos \frac{5\pi}{7}$; $\cos \frac{9\pi}{7}$; $\cos \frac{11\pi}{7}$; $\cos \frac{13\pi}{7}$ értékek minimálpolinomja a racionális számtest fölött (4. ábra).



4. ábra – Tizennegyedik körosztási polinom gyökei, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).

4.3. A gyökök megkeresése

Fejezzük ki a $(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$ polinom normáltjának, azaz $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ harmadfokú polinomnak a gyökeit. Ismét az Algebra 2 tárgyból tanult Cardano-képletet fogjuk alkalmazni. Ehhez toljuk el a polinomot, hogy a másodfokú tag kiessen:

$$x = y + \frac{1}{6}$$

$$y^3 - \frac{7}{12}y + \frac{7}{216} = 0$$

Az így kapott egyenlet gyökeit már a $p = -\frac{7}{12}$ és $q = \frac{7}{216}$ helyettesítéssel az alábbiak szerint megkapjuk:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{7}{432} + \sqrt{\frac{7^2}{432^2} - \frac{7^3}{36^3}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{432} - \sqrt{\frac{7^2}{432^2} - \frac{7^3}{36^3}}}$$

Mivel q mindenhol a második hatványon szerepel, ezért ugyanazokat az irracionális gyököket kaptuk meg ezzel a módszerrel. Toljuk vissza az egyenletet $y = x - \frac{1}{6}$ alapján és fejezzük ki $\cos\alpha$ -t, az $\cos\alpha = x$ helyettesítéssel:

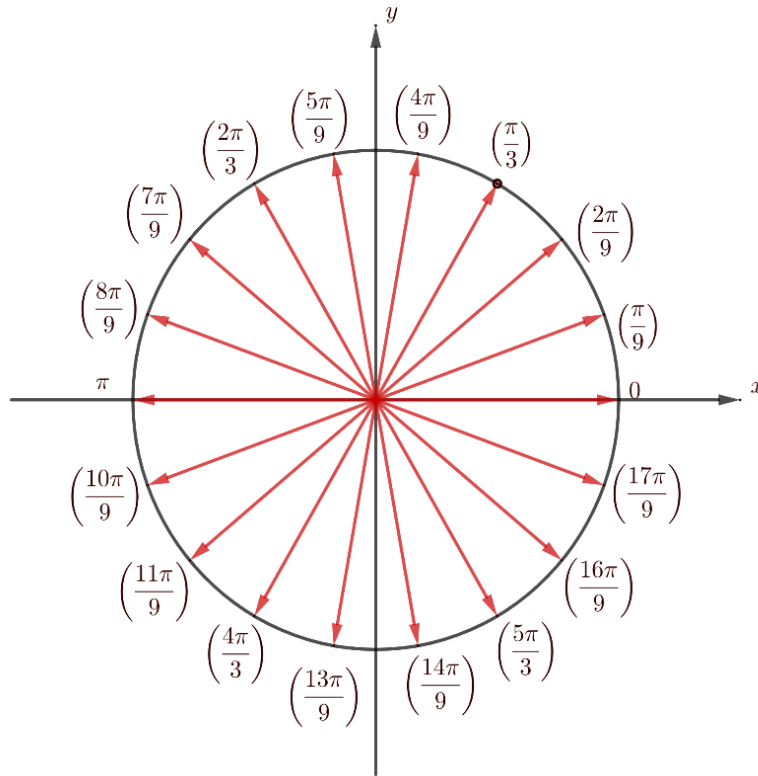
$$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{7}{432} + \sqrt{\frac{7^2}{432^2} - \frac{7^3}{36^3}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{432} - \sqrt{\frac{7^2}{432^2} - \frac{7^3}{36^3}}} - \frac{1}{6}$$

5. A szabályos 18-szög középponti szögének koszinusza

Az előzőekben bemutatott módszerekkel a szabályos 18-szög középponti szögének koszinuszának értékét is ki tudjuk fejezni. Már sok számolást elvégeztünk, ezért ezeknek a tapasztalatait tudjuk alkalmazni. A körosztási polinomok alapján tizennyolcadfokú polinom helyett egyből a minimálpolinomhoz jutunk, ezért elsőként nézzük meg ezt a megközelítést.

5.1. Megközelítés a körosztási polinommal

A tizennyolcadik körosztási polinomból kiindulva határozzuk meg a $\alpha = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$ koszinuszának értékét. A körosztási polinom egy irreducibilis polinom, melynek gyökei a tizennyolcadik primitív egységgyökök, amelyeknek a valós része éppen a keresett koszinusz értékekkel egyenlő (5. ábra).



5. ábra – Tizennyolcadik körosztási polinom gyökei, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).

Ezért a körosztási polinom gyökeit szeretnénk kifejezni. A tizennyolcadik körosztási polinom a következőképpen néz ki:

$$\Phi_{18}(x) = x^6 - x^3 + 1$$

Alakítsuk át a polinomot és keressük meg a gyökeit:

$$(x^6 + 1) - x^3 = 0$$

Ez egy reciprok egyenlet, ezért osszunk le x^3 -nal:

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) - 1 = 0$$

Helyettesítsünk be $x + \frac{1}{x}$ helyére y -t, ha tudjuk, hogy $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$ egyenlőség teljesül:

$$y^3 - 3y - 1 = 0$$

Az x komplex szám reciproka megegyezik a konjugáltjával, tehát $x + \frac{1}{x} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{9}$ egyenlőség teljesül a tizennyolcadik primitív egységgyökökre. Mivel a harmadfokú polinom gyökei a keresett koszinusz értékek kétszeresei, ezért írjunk y helyére $2x$ -et:

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Ezzel eljutottunk ahhoz a harmadfokú polinomhoz, amelynek normáltja a $\cos \frac{\pi}{9}$ érték minimálpolinomja.

5.2. A tizennyolcadfokú polinom

Most keressük meg azt a tizennyolcadfokú polinomot, amelynek a gyökei a $\cos 0$; $\cos \frac{\pi}{9}$; $\cos \frac{2\pi}{9}$; $\cos \frac{\pi}{3}$; $\cos \frac{4\pi}{9}$; $\cos \frac{5\pi}{9}$; $\cos \frac{2\pi}{3}$; $\cos \frac{7\pi}{9}$; $\cos \frac{8\pi}{9}$; $\cos \pi$; $\cos \frac{10\pi}{9}$; $\cos \frac{11\pi}{9}$; $\cos \frac{4\pi}{3}$; $\cos \frac{13\pi}{9}$; $\cos \frac{14\pi}{9}$; $\cos \frac{5\pi}{3}$; $\cos \frac{16\pi}{9}$; $\cos \frac{17\pi}{9}$ értékek. (5. ábra) Nézzük meg, hogy ezek közül melyeknek ismerjük a minimálpolinomját. Elsőként nézzük a kilencedik primitív egységgyökök minimálpolinomját, aminek vehetjük a négyzetét a páronként egyforma gyökök miatt: $(8x^3 - 6x + 1)^2$. Ennek a gyökei $\cos \frac{2\pi}{9} = \cos \frac{16\pi}{9}$; $\cos \frac{4\pi}{9} = \cos \frac{14\pi}{9}$; $\cos \frac{8\pi}{9} = \cos \frac{10\pi}{9}$ értékek lesznek. A racionális gyökök a következők lesznek: $\cos 0 = 1$; $\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{6\pi}{9} = \cos \frac{12\pi}{9} = -\frac{1}{2}$; $\cos \pi = -1$. A tizennyolcadik primitív egységgyökök minimálpolinomja a 5.1. pontban kiszámított harmadfokú polinom lesz, a páronként egyenlő gyökök miatt vegyük a négyzetét: $(8x^3 - 6x - 1)^2$. Most felírhatjuk a keresett faktorizációt, aminek felbontásával megkapjuk a tizennyolcadfokú polinomot:

$$(x - 1)(x + 1)(2x - 1)^2(2x + 1)^2(8x^3 - 6x + 1)^2(8x^3 - 6x - 1)^2 = 0$$

5.3. A gyökök meghatározása

Határozzuk meg az $\alpha = \frac{\pi}{9}$ koszinuszának értékét a Cardano-képletbe történő behelyettesítéssel. A következő minimálpolinomot kaptuk: $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$, amelyben a $p = -\frac{3}{4}$ és $q = -\frac{1}{8}$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni a keresett gyököket:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{256} - \frac{1}{64}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{16} + \sqrt{-\frac{3}{256}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \sqrt{-\frac{3}{256}}}$$

6. Feladatkészítési készség vizsgálata középiskolában

6.1. Bevezetés

Évfolyamtársaim, Rékasi Anna és Stirling Anna, több TDK dolgozatban foglalkoztak a közoktatásban tanulók és egyetemi hallgatók feladatkészítési képességével. Tanárszakos hallgatóként én is része voltam ennek a kísérletnek, amikor csoportokban kellett feladatokat

kitalálnunk. Ezek a kísérletek tanulságosak voltak, megtapasztaltam, hogy valóban lehet célirányosan problémát készíteni, de ez nem egyszerű feladat. A problémafelvetés egy fejlesztendő kompetencia. A NAT kompetencia alapon fogalmazza a diákoktól elvárt tudást, amit a közoktatásban eltöltött évek során többször is mérnek kompetencia felmérések alkalmával (Magyar Közlöny, 2020). A fejlesztendő kompetenciák között egyre nagyobb hangsúlyt kap a problémafelvetés, amelynek fejlesztése megvalósulhat többek között a matematika órákon is. A problémafelvetés fejlesztése elősegíti a problémamegoldás képességét is. Az említett TDK dolgozatokban a szerzők különböző kutatási kérdéseket fogalmaztak meg, mint például azt is, hogy miért fontos a problémafelvetés matematikaórán. Erre azt a választ fogalmazták meg, hogy a problémafelvetés különleges formában segíti a diákoknak megérteni és elmélyíteni a tudást az adott témakörben. Ezenkívül eszközt ad a kezükbe, hogy bonyolultabb problémák esetén képesek legyenek önállóan is olyan kérdéseket megfogalmazni, amelyek mentén el tudnak indulni a megoldás irányába. Egy másik megfogalmazott kutatási kérdésük az volt, hogy milyen szempontrendszer alapján érdemes pontozni a felvetett problémákat, amelyeket a kísérlet során a diákok megfogalmaznak. A szakirodalom és folyó kutatások tanulmányozása, illetve a kísérlet során beadott munkák értékelése, szaktanárokkal való egyeztetés után egy szakmai és élvezetességi szintet egyaránt értékelő szemponttáblázat állt össze. Kidolgoztak egy módszert, amely azt méri, hogy a diákok hogyan tudnak matematikai problémákat felvetni, feladatokat készíteni. Megfogalmazták, hogy a matematikai problémafelvetés egy olyan tanulható és fejleszthető képesség, amely a tananyagok mélyebb megértését is elősegíti, ezért érdemes rá időt szánni (Rékasi & Stirling, 2021a). A TDK dolgozatuk mellett az Oktatási Hivatal honlapjára is felkerült az oktatást támogató anyagként egy tájékoztató erről a módszerről, amit a tanárok jelenléti és távoktatás során is tudnak alkalmazni. Ennek a dokumentumnak az ismeretében terveztem meg én is a kísérletet (Oktatási Hivatal, 2022).

6.2. Feladatkitűzés és a csoport

Összefüggő egyéni tanítási gyakorlatomat az Óbudai Árpád Gimnáziumban végeztem és a mentortanárom megengedte, hogy az egyik kilencedikes speciális tantervű csoportjában elvégezzem a problémafelvetési kísérletet. A kilencedik osztály különösen érdekes, főleg a speciális matematika tantervű csoport. Mint ismert, a formális matematikai gondolkodás 12 éves kortól kezd aktívan fejlődni (Dumontheil, 2014). A kilencedikes évfolyamon 14-15 éves diákok tanulnak, tehát náluk ez már fejlődik, képesek formálisan gondolkodni. Ráadásul ezek

a diákok intenzívebb matematikát is tanulnak, ezért különösen érdekes, hogy ebben a korban milyen problémákat vetnek fel. A kamaszkor nagy része még előttük áll, amikor a formális matematikai gondolkodás még tovább fejlődik. Azt lehet mondani, hogy az agysejtek egy területileg szervezett szakaszában vizsgáljuk a folyamatot egy matematikailag képzetesebb csoportnál (Szenderák & Szörényi, 2021). A speciális matematika tantervű gimnáziumi osztály, ahol a kísérletet végeztem, csoportbontásban tanulja a matematikát. A 14 fős csoportot hospitálások alkalmával volt lehetőségem megismerni. Az órákat mindig különös figyelemmel követik és részt vesznek az órai gondolatmenetekben. Együtt gondolkodnak a tanárral és felteszik kérdéseiket, elmondják megoldási ötleteiket. Látszik rajtuk, hogy szeretik a matekot és matematikai kihívások örömet tudnak okozni nekik. Emellett vannak a csoportban olyan diákok is, akik kevésbé aktívak, nem szólnak hozzá az órához, ezért róluk visszafogottabb képet kaptam előzetesen. Háttérinformációként érdemes megemlíteni, hogy a mentortanárom ezeknek a csoportoknak főként a geometriához kapcsolódó témaköröket tanítja, a tananyag többi részét, amit az algebrához sorolnak, egy másik matematikatanárral tanulja a csoport. Ez az alaphelyzet befolyásolhatja a kísérlet kimenetelét. A mentortanárommal előzetesen többször is egyeztettem kísérletről. Elmondta, hogy hasonló feladatot még nem adott a diákoknak. A tananyag akkor éppen a számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepek voltak. Egyik nap, amikor ismételten konzultáltunk, mentortanárom elmesélte, hogy az egyik diák a csoportból önállóan és mindentől függetlenül felvetette az alábbi problémát az órán:

Meg tudunk-e adni három különböző pozitív egész számot úgy, hogy ezek harmonikus, mértani és számtani közepe is egész szám legyen.

A kérdésről szóló órai beszélgetésbe sok gyerek bekapcsolódott, közös gondolkodásba kezdtek és további kérdések merültek fel a felvetett probléma mentén. Látható tehát, hogy itt, ezek között a gyerekek között a problémafelvetés természetes folyamat, egymás problémafelvetése természetes érdeklődésre talál és ezek a kérdések a matematika tanulása és a matematikai gondolkodás fejlődésének természetes részét képezik náluk. Az eset után még nagyobb érdeklődéssel vártam a kísérletet.

A kísérletet október 6-án hajtottuk végre. Bementem a matematika órára és a következő feladatot adtam a diákoknak:

Készítsetek párokban 2-3 feladatot. Ezek legyenek kreatívak, izgalmasak, olyanok, amelyeknek a megoldása kihívást jelent, de nem túlságosan nehezek. Készítsetek megoldásokat is, mert így tudjátok ellenőrizni, hogy érthető, jól megfogalmazott-e a feladat, helyesek-e a megadott adatok.

A feladatok szövege kapcsolódjon egy mesebeli városhoz, aminek neve Bergengócia.

Ez megfelel a TDK dolgozatban meghatározott szabad szituációs problémafelvetési feladatnak. Stirling Anna és Rékasi Anna a kísérletben 4-5 feladtból álló feladatsort kért a diákoktól. Itt a létszámról és az időkorlátra való tekintettel csak 2-3 feladatot kértem minden csapattól. Nem mondtam meg, hogy pontosan mennyit, hiszen nem tudhattuk, hogy a kilencedikesek mennyire lesznek elkötelezettek a feladatmegoldás iránt. Az órák megfigyelése alapján reméltem, hogy lesznek eredményes problémafelvetések. Csak azt kötöttem meg előre, hogy ugyanaz a mesebeli város szerepeljen minden feladatban. A különböző kategóriákról az említett dolgozatban olvashatunk (Rékasi & Stirling, 2021b). A feladatkészítési stratégiákat, melyekről a kísérlethez tartozó tájékoztatóban olvashatunk az Oktatási Hivatal honlapján, előzetesen nem részleteztem. A kreativitásukra bízom, hogy milyen módon alkotnak feladatokat (Oktatási Hivatal, 2022). A mentortanárom tanácsára rövid határidőt szabtam meg, így a beadási határidő október 11. volt.

6.3. Értékelés

Összesen nyolcan dolgoztak párban és volt két három fős csoport. A gyerekek maguk választhatták ki, hogy kikkel szeretnének együtt dolgozni. Életkori sajátosság lehet, hogy a fiúk és a lányok nem akartak egy csapatba kerülni, mind a hat csapat homogén volt. Nem határoztam meg előre, hogy mennyire kell összedolgozni, ezért mindenki úgy csinálta, ahogyan neki megfelelt. Érkeztek be olyan munkák, amelyen feltüntették, hogy külön dolgoztak és minden csapattag külön-külön dolgozott ki egy feladatot. Azt tapasztaltam a matematika tanítási gyakorlataimon, hogy nem minden diák szeret és tud jól párban dolgozni, gondolkodni. Ez egy olyan képesség, amit lehet fejleszteni, de hosszú folyamat és ez most nem volt célom. A hat csapat összesen tizenkettő feladatot adott be. (1. melléklet) A feladatokat külön-külön fogom értékelni.

A feladatokat Rékasi Anna és Stirling Anna TDK dolgozatban összeállított táblázata alapján pontoztam (Rékasi & Stirling, 2021b):

Szakmai rész		Élvezetességi rész		
Valamilyen tananyaghoz illő	8 pont	Újszerű/eredeti/ötletes	6 pont	Az összegük, ha az több, mint 6, akkor 6 pont.
Nehéz/könnyű (kihívás)	4 pont	Matematikai élmény	6 pont	
Matematikailag helyes	8 pont	Beöltöztetés	6 pont	
Korosztályhoz illő	5 pont	Korszerűség	4 pont	
Összesen 25 pont		Összesen 16 pont		

6. ábra –Értékelés szempontjai (forrás: (Rékasi & Stirling, 2021b)).

A beadott feladatokat először mind végig néztem, majd egyesével elkezdtem a pontozást. A következőkben néhány érdekességet szeretnék kiemelni, amik a pontozás során merültek fel. Több feladatnál dilemmát jelentett, hogy szakmai szempontból mennyire illik az adott korosztályhoz a feladat. Túlságosan nehéz feladatot nem kaptam. Egy speciális matematika tantervű osztályban az oktatás során összetettebb feladatok kerülnek előtérbe. Voltak olyan problémafelvetések, amelyek egy általános matematika tantervű osztály esetében megállnák a helyüket kilencedik osztályban, de egy speciális tantervű csoport számára túl egyszerűnek bizonyulnának. Fontos, hogy egy speciális matematika szakos osztályban is eltérőek a matematikai képességek. Vannak olyan diákok, akik számára az egyszerűbb gyakorló feladatokból többre van szükség, hogy a kellő magabiztosságot szerezzék a feladatmegoldásban. Ezért számukra egy egyszerűbb problémafelvetés is eredményesnek mondható. Az egyes diákok egyéni matematikai képességét nem ismerem, ezért ezt nem tudtam személyre szabottan figyelembe venni a pontozásnál. Emiatt az egyszerűbb, rutinfeladatok is kaptak pontot a korosztályhoz illőségre. Egy példa erre a dilemmára:

Pista bácsi Bergengóciában szeretne telket venni. A telek, amit kinézett 18x26 méteres. Mennyibe fog kerülni Pista bácsinak kerítést venni, ha 1 m kerítés 3500 forint és már megvan a 2 m széles kapu? (F1.2.)

Ez egy hetedik osztályos feladat, tehát semmiképpen nem felel meg a korosztálynak. A kilencedikes évfolyamon jellemző, hogy több új osztály indul, ahova sok különböző iskolából érkeznek a diákok. Az ehhez hasonló témakörök és feladatok átismétlése az év elején

elengedhetetlen a biztos alapok lefektetése érdekében. Ez az osztály nem ilyen, ez a helyzet ebben a csoportban nem merül fel. A megfelelő szint a speciális matematika tanterv szerint is kifogásolható. Ez a feladat tehát matematikailag helyes és alsóbb évfolyamokon az órára bevihető, érdekes feladat. A feladat beöltöztetése sikeres, a diák belegondolt, hogy mi az a telekméret, ami reális és mi az a kerítés ár, ami valóságos.

Élvezetesség szempontjából minden feladatra maximális pontszámot tudtam adni. A feladatok szövegezését sok esetben kreatívan megoldották, érdekesen öltöztették be a feladatokat. Bergengócia felbukkant mindegyik feladatban. A következő feladatot külön is szeretném kiemelni a mesebeli megfogalmazás miatt:

Bergengóciában január elsején egy, a következő nap kettő, a következő nap három, majd megint egy gyermek születik. Ez így megy náluk, míg világ a világ és két nap.

- a. *Hány gyerek fog születni október 30-án?*
- b. *Hány gyerek születik összesen az egész évben?*

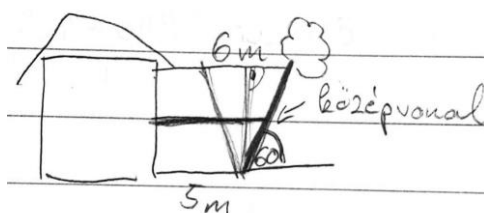
(A február ebben az évben 28 napos) (F4.3.)

Ez a feladat a sorozatok témakörénél is bevihető, de összeszámlálás segítségével alsóbb évfolyamon is meg tudják oldani. A feladat szövege alaposan átgondolt és precízen megfogalmazott. A készítője figyelt a részletek megadására is, ezért a feladat beöltöztetése nem ment a matematikai pontosság rovására. Az első kérdés megoldása támaszpontot ad a második kérdés megválaszolásához. Valószínűleg ez már egy ismert feladattípus alapján megfogalmazott probléma, de átgondolt és helyes.

Az egyik háromfős csoport három feladatot adott be, és feltüntették, hogy külön-külön dolgoztak. Mind a hárman igényesen dolgoztak, összeállítás szempontjából az ő munkájuk volt a legkiemelkedőbb. Ezek között volt az előzőekben bemutatott feladat a gyerekszületésekről. Egy másik az aktuális tananyaghoz, a már említett közepekhez kapcsolódik, a következő megfogalmazásban:

Bergengóciában minden második családnak van egy függőágya. Pióccák a függőágy egyik végét a házra, a másik végét egy fára akasztották. A törzs alja a ház falától 5 m-re van. A fa törzse a talajtól 60° -ra el van fordítva. A fa teteje a háztól 6 m-re van. Ha a törzs közepére szeretnék kötni egy kötelet hány méteresnek kell lennie? A törzs kerülete 1 m. (F4.2.)

A feladat beöltöztetése nagyon kreatív, a kidolgozott megoldásban a következő ábra szerepel:



7. ábra – feladatmegoldás (forrás: (F4.2.feladat alkotója, 2022))

A feladat megfogalmazása mesebeli és érdekes, egy trapéz középvonalára szeretne rákérdezni. A feladat alkotója az általa kidolgozott megoldás ellenére nem vette észre, hogy a feladatkitűzés során összekeveredett, hogy kötél vagy függőágy kifeszítéséről van-e szó. Ezen kívül nem tér ki a kötél rögzítéséhez szükséges hosszúságra, ami szintén hiányzik a jó beöltöztetéshez. Ettől függetlenül ez egy jó próbálkozás, a beöltöztetés újbóli átgondolás alkalmával könnyen kiküszöbölhető lenne. A feladat a matematikai helyesség és a beöltöztetés miatt vesztett pontot. Ezen a beadott feladatlapon szerepelt még egy harmadik problémafelvetés, ami a kombinatorika témaköréhez kapcsolódik:

Bergengóciában felvonulást tartanak a körúton. A felvonuló szekereket felülről nézve csak a színeik alapján tudjuk megkülönböztetni. A 6 szekér között legalább 1 és legfeljebb 3 sárga. A többi lila. Hányféleképpen mehetnek végig a körúton libasorban.
(F4.1)

Ez egy nagyon jól sikerült feladat, ami egyértelműen illik a kombinatorika témaköréhez. A korosztálynak megfelelő a nehézségi szintje, több évfolyamon is bevihető az órára, amikor ezzel a témakörrel foglalkozunk. Az az érdekessége, hogy a feladat alkotója a beadott megoldás alapján három különböző lehetőséget határoz meg: amikor egy, kettő, vagy három sárga szekér van és nem számítja különböző libasornak a három esetben lehetséges sorba rendezések számát. Általános hiba szokott lenni az ilyen feladatoknál, hogy a diákok megkülönböztetik a szekereket és ezért rossz megoldást adnak meg, pedig ilyen esetben a megoldás sokkal egyszerűbb lenne. Az értékelésnél maximális pontot ért el ez a problémafelvetés.

A közepek témaköréhez kapcsolható egy másik feladat, ami a beöltöztetés és a matematikai élmény szempontjából is kiemelkedő:

Bergengóciában a királynak, a hercegnek, a komornyiknak és a bohócnak az életkora is prím szám. A legidősebb a komornyik, majd a király, utána a herceg és végül a bohóc következik. Mind a négyük fiatalabb 70 évesnél és kiszámolták, hogy az életkoruk átlaga 60 év. Hány évesek ők? (F3.2.)

A feladat megoldása során a szöveg megértésén és a prímszám fogalmának ismeretén van a hangsúly. Érdekes folyamat lehetett a feladatkészítésnél a megfelelő prímszámokat megtalálni és a feladatot pontosan megfogalmazni, úgy, hogy szép, az életkor szempontjából reális számok szerepeljenek. Ez egy ötletes, a korosztályhoz illő és matematikailag helyes feladat.

A következő feladat a logika témaköréhez kapcsolódik, itt is kihívás lehetett a feladat megfogalmazása, a megfelelő állítások kiválasztása:

Bergengóciában futóversenyt rendeztek. Andrást, Bélát, Cecíliát, Dénest és Elemért megkérdezték a verseny előtt, hogy mi lesz az állás (nincs holtverseny)

- *András: Első három között leszek*
- *Béla: Megnyerem a versenyt*
- *Cecília: Megelőzőm András*
- *Dénes: Nem előzőm meg Bélát*
- *Cecília vagy Dénes nyer*

A verseny után kiderült, hogy mindegyikük tévedett. Mi lett a sorrendjük? (F2.1.)

Itt fontos szerepet kap, hogy mit jelent egy állítás igazságtartalma, hogyan kell helyesen tagadni egy állítást. Öt főre fogalmazta meg a feladatot, amely alapos átgondolást igényel. A feladat megoldása érdekes, élvezetet jelent. A kézzel írt beadott munkán látszanak az áthúzott állítások, amelyek elvezettek a feladat végső formájához. Ez a problémafelvetés 2 pont híján elérte a maximális pontszámot, csupán a korosztályhoz illőség és a nehézségi szint miatt veszített egy-egy pontot. Ez a feladat hatodikos vagy nyolcadikos felvételi előkészítőn nagyon jól megállná a helyét. A középszintű érettségi feladatsorokban is találkozhatunk hasonló, a logika témaköréhez kapcsolódó feladatokkal.

A következő feladat, amit szeretnék megemlíteni, a valószínűesszámitás témaköréhez kapcsolódik. Valószínűesszámitással alaposan tizedik osztályban ismerkednek meg a diákok (Matematika kerettanterv 9-12. évfolyam, 2020). Azelőtt csak valószínűségi játékok, kimenetelek megfigyelése, biztos és lehetetlen, illetve a kisebb és nagyobb eséllyel lehetséges fogalmakkal ismerkednek meg a diákok (Matematika kerettanterv 5-8. évfolyam, 2020). Emiatt érdekes, hogy a kilencedikes csoportban mégis ehhez a témakörhöz kapcsolódó probléma merült fel:

Bergengóciában 100 ember él. Köztük a Kovács család, akik négy személyből állnak. Minden reggel egy Kovács elmegy közértbe. Mekkora a valószínűsége, hogy Kovácsék legkisebb fia megy a közértbe, ha minden családtag ugyanolyan eséllyel megy boltba. (F5.1.)

A problémát megfelelően beöltöztette, bár még lehetett volna kicsit színesíteni, hogy a feladat megoldása nagyobb kihívást jelentsen. Figyelt olyan részletekre, hogy a család minden tagja ugyanolyan valószínűséggel megy bevásárolni. A feladat ezért matematikailag megállja a helyét.

A kreatív, mesebeli beöltöztetés miatt szeretném kiemelni a következő feladatot is:

Bergengóciában karácsony van. A város közepére karácsonyfát állítottak. Összesen 30 dísz állt rendelkezésükre a díszítéshez. ebből tizenkettő eltörött, és még négyet elvitt a szarka. A polgármester ezért hozott még kétszer annyi díszet, mint amennyi a törések és a lopás után volt. Hány dísz van a fán? (F5.2.)

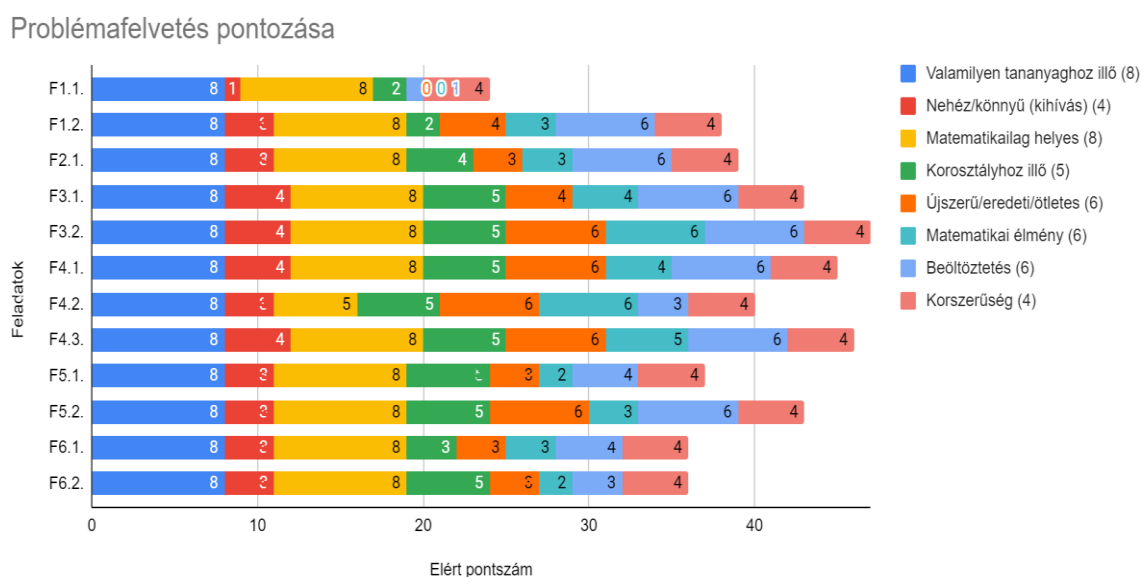
Az egyenletek témaköréhez kapcsolódik ez a feladat, ami hetedik osztályosok tudásának és tananyagának felel meg. Ezért a pontozásnál a nehézségi szint és korosztályhoz illőség miatt vesztett pontot. A beöltöztetés érdekes, de a megoldás nem jelent különösebb matematikai élményt.

Ahogy a bemutatott példák is mutatják, mindenféle témakör előfordult: százalékszámítás, kombinatorika, logika, sorozatok, valószínűségszámítás, terület, kerület.

Előzetesen megfogalmaztam, hogy érdekel milyen mértékben fognak a geometria témaköréhez kapcsolódni a feladatok, de ez nem volt jellemző, mindössze 3 feladat sorolható ide.

6.4. Eredmények

Minden feladatot egyesével értékeltem és a pontszámok alapján diagramot készítettem. A problémafelvetési kísérlet során kapott feladatok pontszámai a következőképpen alakultak:



8. ábra – Problémáfelvetés pontozása (forrás: (saját szerkesztés, 2022))

A problémafelvetések eredményesek voltak, a nehézség és korosztályhoz illőség esetében vesztették a legtöbb pontot. Az említett TDK dolgozatban meghatároztak egy szintet, hogy mikortól jó és egyben feladható egy feladat. Ehhez az kellett, hogy vagy élvezetességi vagy szakmai szempontból elérje a kapható maximális pontszám 80%-át (Rékasi & Stirling, 2021a). Ebből kiindulva határoztam meg én is egy határt, amitől egy feladat az adott csoport számára feladható, jó feladat. A csoport sajátosságait figyelembevéve nem választottam külön a szakmai és élvezetességi szempontokat. Ennek megfelelően a 40 pontot elért feladatok azok, amelyek az adott csoportban is feladhatóak és a tanórára bevihetőek. Ezek a következők: F3.1., F3.2., F4.1., F4.2., F4.2., F4.3., F5.2., ezek kellően érdekesek és a megoldásuk kihívást jelent. Rékasi Anna és Stirling Anna az újszerűség/ötletesség és a matematikai élmény 6-6 pontját összeadta és az összpontszámba a két szempont pontszámának összegét számította, vagy ha ez több hatnál, akkor hat pontot számoltak az összpontszámhoz. Én mindkét szempont pontszámát hozzáadtam a végső összeghez. A 12 feladat esetében ezzel is tudtam differenciálni a pontszámokat. A tananyaghoz illőség és élvezetességi szempontból a korszerűség mindenkinél maximális pontszámot kapott. Összességében nagyon érdekes és eredményes volt a feladatkészítési készség felmérése ebben a csoportban. Előzetesen nem találkoztak hasonló kihívással matematikából a diákok, ennek megfelelően igyekeztem mindig inkább pozitívan pontozni. Kaptam pár kevésbé újszerű, vagy izgalmas feladatot, de többségében érdekes és jó feladatokat készítettek a speciális tantervű csoport tanulói. Ez azt is mutatja, hogy az ő életükben intenzíven jelen van a matematika és tudnak ilyen jellegű problémákban gondolkodni és kérdéseket felvetni. A kísérlet alapján a közös munka a problémafelvetés során eredményes, általában, akik összedolgoztak, jobb feladatokat adtak be, pozitívan hatottak egymásra.

7. Irodalomjegyzék

- Ambrus, G., & Ambrus, A. (2013). *Matematika didaktika*. Forrás: Matematika didaktika: <http://mathdid.elte.hu/pic/tamopszakmodsz.pdf>
- Dumontheil, I. (2014). Development of abstract thinking during childhood and adolescence: The role of rostralateral prefrontal cortex. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 57-76. Forrás: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1878929314000516>
- Élesztős, L., & Rostás, S. (1999). Magyar Nagylexikon VIII. (Ff-Gyep). Budapest: Magyar Nagylexikon.
- Kiss, E. (2007). *Bevezetés az algebrába*. Budapest: Typotex.
- Magyar Közlöny, 5/2020 (2020. 01 31). Forrás: <https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/letoltes> (uloljára megnyitott: 2022.11.24.)
- Matematika kerettanterv 5-8. évfolyam*. (2020). Forrás: Oktatási Hivatal: https://www.oktatas.hu/koznevelis/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_5_8 (uloljára megnyitott: 2022.11.24.)
- Matematika kerettanterv 9-12. évfolyam*. (2020). Forrás: Oktatási Hivatal: https://www.oktatas.hu/koznevelis/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf (uloljára megnyitott: 2022.11.24.)
- Matematika kerettanterv 9-12. évfolyam*. (2020). Forrás: Oktatási Hivatal: https://www.oktatas.hu/koznevelis/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf (uloljára megnyitott: 2022.11.24.)
- Oktatási Hivatal*. (2022. november 14.). Forrás: Oktatási Hivatal: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tavoktatas/probfelv.pdf (uloljára megnyitott: 2022.11.24.)
- Oktatási, H. (2021). *Matematika tankönyv 10*. Budapest: Oktatási Hivatal.
- Oktatási, H. (2022). *Matematika tankönyv 11*. Budapest: Oktatási Hivatal.
- Rékasi, A., & Stirling, A. K. (2021. január 10.). A problémafelvetés és feladatkészítés egy lehetséges megjelenítése matematikaórán.
- Rékasi, A., & Stirling, A. K. (2021.. január 10.). Közoktatásban tanuló diákok feladatkészítési képességének vizsgálata.
- Szabó, C., Bereczky-Zámbó, C., Stirling, A., Szenderák, J., & Szörényi, S. (2021). Geometric representation of irrational algebraic numbers in Hungarian high school mathematics education. In É. Vásárhelyi, & J. Sijts, *Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken: Band 3 der Reihe Mathematiklehren und -lernen in Ungarn* (old.: 323-340). Münster, Németország: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

8. Mellékletek

8.1. Feladatok

- F1.1. *A Bergengóciai Általános Iskolába jár 312 fiú és 264 lány. Az iskola tanulóinak hány százaléka lány és hány fiú?*
- F1.2. *Pista bácsi Bergengóciában szeretne telket venni. A telek, amit kinézett 18x26 méteres. Mennyibe fog kerülni Pista bácsinak kerítést venni, ha 1 m kerítés 3500 forint és már megvan a 2 m széles kapu?*
- F2.1. *Bergengóciában futóversenyt rendeztek. Andrást, Bélát, Ceciliát, Dénest és Elemért megkérdezték a verseny előtt, hogy mi lesz az állás (nincs holtverseny)*
- *András: Első három között leszek*
 - *Béla: Megnyerem a versenyt*
 - *Cecília: Megelőzöm Andrást*
 - *Dénes: Nem előzöm meg Bélát*
 - *Cecília vagy Dénes nyer*
- A verseny után kiderült, hogy mindegyikük tévedett. Mi lett a sorrendjük?*
- F3.1. *Bergengóciában tavaly 1 kg alma 250 ft-ba került. Idén azonban megemelték az árát 6%-kal, majd az így kapott árat még 4-gyel.*
- a. *Mennyibe kerül most egy kg alma?*
 - b. *Mennyit kellett fizetnie Bélának, ha 5 kg almát és 2 kg kivit vett? (A kivi kilójának ára az alma tavalyi árának 1,5-szerese)*
 - c. *Mennyit fizetett volna Béla tavaly, ha a kivi ára akkor 320 ft volt?*
- F3.2. *Bergengóciában a királynak, a hercegnek, a komornyiknak és a bohócnak az életkora is prímszám. A legidősebb a komornyik, majd a király, utána a herceg és végül a bohóc következik. Mind a négyük fiatalabb 70 évesnél és kiszámolták, hogy az életkoruk átlaga 60 év. Hány évesek ők?*
- F4.1. *Bergengóciában felvonulást tartanak a körúton. A felvonuló szekereket felülről nézve csak a színeik alapján tudjuk megkülönböztetni. A 6 szekér között legalább 1 és legfeljebb 3 sárga. A többi lila. Hányféleképpen mehetnek végig a körúton libasorban.*
- F4.2. *Bergengóciában minden második családnak van egy függőágya. Pióciák a függőágy egyik végét a házra, a másik végét egy fára akasztották. A törzs alja a ház falától 5 m-re van. A fa törzse a talajtól 60°-ra el van ferdülve. A fa teteje a háztól 6 m-re van. Ha a törzs közepére szeretnék kötni egy kötelet hány méteresnek kell lennie? A törzs kerülete 1 m.*
- F4.3. *Bergengóciában január elsején egy, a következő nap kettő, a következő nap három, majd megint egy gyermek születik. Ez így megy náluk, míg világ a világ és két nap.*
- *Hány gyerek fog születni október 30-án?*

- *Hány gyerek születik összesen az egész évben? (A február ebben az évben 28 napos)*

- F5.1. Bergengóciában 100 ember él. Köztük a Kovács család, akik négy személyből állnak. Minden reggel egy Kovács elmegy közértbe. Mekkora a valószínűsége, hogy Kovácsék legkisebb fia megy a közértbe, ha minden családtag ugyanolyan eséllyel megy boltba.*
- F5.2. Bergengóciában karácsony van. A város közepére karácsonyfát állítottak. Összesen 30 dísz állt rendelkezésükre a díszítéshez. ebből tizenkettő eltörött, és még négyet elvitt a szarka. A polgármester ezért hozott még kétszer annyi díszet, mint amennyi a törések és a lopás után volt. Hány dísz van a fán?*
- F6.1. Egy bergengóciai apuka háromszor annyi idős, mint a gyereke. Az apuka 28 évvel korábban született, mint a gyerek. Hány éves az apuka és a gyerek?*
- F6.2. Itt van a tökéletes rombusz levél Bergengóciában $=60^\circ$, $=120^\circ$, $a=6$ cm. Mekkora a területe?*

8.2. Ábrajegyzék

1. ábra – Hetedik körosztási polinom gyökei, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).
2. ábra – Hetedik egységgyökök, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).
3. ábra – Kilencedik körosztási polinom gyökei, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).
4. ábra – Tizennegyedik körosztási polinom gyökei, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).
5. ábra – Tizennyolcadik körosztási polinom gyökei, (forrás: (saját szerkesztés, 2022)).
6. ábra –Értékelés szempontjai (forrás: (Rékasi & Stirling, 2021b)).
7. ábra – feladatmegoldás (forrás: (F4.2.feladat alkotója, 2022))
8. ábra – Problémafelvetés pontozása (forrás: (saját szerkesztés, 2022))