

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Szakedolgozat

Egyetemi tananyag felhasználásának lehetőségei középiskolai feladatok készítésében

Témavezető:

Dr. Szabó Csaba

egyetemi tanár

Készítette:

Szabó Márton

matematikatanár,

történelemtanár és

állampolgári ismeretek tanára,

osztatlan tanári mesterszak

Témavezetői nyilatkozat

Alulírott Szabó Csaba (témavezető neve)

ezennel kijelentem és aláírással megerősítem, hogy Szabó Márton

..... (hallgató neve) PW/NAHO

(Neptun-kód) osztatlan tanárképzésbeli szakdolgozata megítélésem szerint benyújtható, annak leadásához hozzájárulok.

Budapest, 2019. 04. 09.

.....
a témavezető aláírása

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Szabó Márton(név)

..... PWNAHO(Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírással megerősítem, hogy az
ELTE. matematikatanár, történelemtanár és állampolgári ismeretek tanáraosztatlan tanári mestérszakján

írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam
be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás,
személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 20 19. 04. 11.

..... Szabó Márton

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Számlálástól a problémafelvetésig	5
1. Öröklött agyi mechanizmusok	5
2. A becslés	7
3. Szimbólumok bevezetése	11
4. Tantervi igények.....	15
5. Matematikai problémák	18
Problémakészítés algebrai eszközökkel	24
1. Feladat: sor-és oszloptündérek.....	24
2. Feladat: 2×2 -es tündérek	27
3. Feladat: Négyzet csúcsai	28
4. Feladat: Háromszög csúcsai	32
Ciklikus mátrix determinánsa.....	33
A 4. feladat befejezése.....	37
Feladatok háromszögre	38
5. Feladat	41
Négyszöges feladatok leírása	42
Felhasznált irodalom.....	45

I. rész

Számlálástól a problémafelvetésig

1. Öröklött agyi mechanizmusok

A matematikáról való gondolkodás, a matematikai tanulás nem alsó tagozatban, az iskolába kerüléssel kezdődik. A gyerekek számos tapasztalattal, benyomással rendelkeznek addigra, sőt, a matematikai gondolkodás bizonyos elemei bizonyíthatóan az evolúcióval öröklődnek. A számolásról, számosságról meglévő fogalmaink természetesen sok esetben merőben eltérnek a később, a precíz matematikában megkövetelt szemléletmódtól, valamilyen fogalmaink mégis vannak róluk. Egy óvodás gyermek nem úgy számol, mint egy érettségi előtt álló tanuló. A használat célja és eszközei is különböznek esetükben. A matematikatanítás során azonban ezeket a meglévő tapasztalatokat, szemléletmódokat figyelembe kell venni, ezekre az alapokra lehet építeni, nem a semmiből kell új világot teremteni.

Agyunk felépítése, valamint különböző mechanizmusai sok tekintetben meghatározzák azt, hogy mit tudunk megtanulni, hogyan, és milyen életkorban. Az emberek agyának felépítése, működése hasonló. Léteznek különböző agyi struktúrák (ezekről később még lesz szó), valamint ezekre épülő tanulási algoritmusok, melyek kutatása a különböző technikai fejlesztéseknek (például MRI-vel történő agyvizsgálat, autoradiográfiás agyvizsgálat, pozitronemissziós tomográfia) köszönhetően egyre mélyebbé válhat. Az oktatás során ezeket a mechanizmusokat figyelembe kell venni, az oktatás módját az agyunk struktúráinak kell meghatároznia. A módszertanok kialakításakor fontos tehát figyelni az új kutatási eredményekre, azokat nem csupán megszokásra kell építeni, hanem az agyi struktúrák megismerésével az agy működéséhez kell igazítani. Ezáltal az oktatás egyre hatékonyabbá tehető.

Az agyműködés fontos eleme az adaptációs képesség (agyí plaszticitás), aminek rendkívül fontos szerepe van a tanulási folyamatokban. Plaszticitásnak az agy anatómiai és

funkcionális változásra való képességét hívjuk.¹ Ilyenek például új szinapszisok létrejötte, vagy már meglévő szinapszisok strukturális átrendeződése. A plaszticitás nem korlátlan, azaz agyunk alkalmazkodóképessége véges, bizonyos struktúrákon, algoritmusokon változtatni nem tudunk. Nem a plaszticitás ugyanis agyunk fő rendezőelve, hanem a genetika.²

Ez az adaptációs képesség nem egy eklektikus folyamat, hanem meglehetősen rendezetten megy végbe (nem jelenti tehát az idegrendszer teljes újrendeződését). Kritikus periódusnak nevezzük azokat az időszakokat, amikor az agy képes alkalmazkodni különböző környezeti változásokhoz. Ezeknek az időszakoknak a pontos meghatározása rendkívül nehéz feladat (az erre vonatkozó kísérletek bonyolultsága miatt), azonban fontos törekednünk a meghatározásukra, ugyanis a tanulás a különböző életkorok kritikus periódusain alapul.³ Bizonyos témák megtanulása sokkal könnyebb ezekben a kritikus periódusokban, a tanulás ugyanis az agyban új pályák, kapcsolatok létrejöttével történik. Ezek a kapcsolatok könnyebben kialakulnak a kritikus periódusokban.

Az idegen nyelvek tanításához már többen vizsgálták a kritikus periódusokat, a matematikatanulás terén kevesebb az eredmény.

Az oktatásnak érdemes kihasználnia ezeket a kritikus periódusokat, azonban a tanulási folyamat fontos része az agyi plaszticitás bezáródása is, ekkor tud ugyanis stabilizálódni a rendszer, azaz ekkor tud rögzülni a megtanult tananyag. Biztató, hogy a kritikus periódusok nem teljesen véglegesek, adott esetben újra kinyílhatnak és bezáródhatnak. Ennek nem csupán biológiai okai vannak, hanem jelentősen függnak a környezettől (legfőképpen a szociális, de például a tárgyi környezettől is), vagy éppen különböző kémiai anyagoktól (például gyógyszerektől).⁴

¹Czurkó András: Neurális és funkcionális plaszticitás. In: Bevezetés a neuropszichológiába. Szerk. Kállai János, Bende István, Karádi Kázmér, Racsmány Mihály. 2008. 40.

² Stanislas Dehaene: Education, Brain Plasticity, and Neuronal Recycling. Előadás: Cognitive Foundations of Learning in School-Aged Children, Collège de France, 2015. 01. 06.
<https://www.college-de-france.fr/site/en-stanislas-dehaene/course-2015-01-06-09h30.htm> (utolsó letöltés: 2019. 04. 06.) 26:30

³Dehaene: Education, brain plasticity and neuronal recycling. 38:00

⁴Dehaene: Education, brain plasticity and neuronal recycling. 52:30

2. A becslés

Ha igaz, hogy a számolási képességek egy része agyunkban kódolva van, genetikailag öröklődik, akkor már a csecsemők is el tudnak végezni bizonyos számításokat. Ez némileg ellentmond a Jean Piaget nevével fémjelzett konstruktivizmusnak, mely szerint egy gyermek tapasztalatok útján konstruál magának egy belső világot, amelyen keresztül értelmezi, szervezi tapasztalatait, és amellyel összhangban elvárásokat fogalmaz meg a dolgok jövőbeli állapotával kapcsolatban.⁵ Ehhez képest már újszülötteknek is vannak elvárásai az őket körülvevő fizikai világgal kapcsolatban.

Ezeket a feltevéseket nagyon nehéz bizonyítani. Az erre irányuló kísérletek jelentős részében a csecsemők tekintetét kamerával figyelik, és azt mérik, hogy egy adott képre mennyi ideig néznek. Ha a csecsemő hamar „megunja” a képet, az azt jelenti, hogy megfelel az elvárásainak, ellenben ha sokáig nézi, az mutatja, hogy ellentétben áll a várakozásaival, meglepőnek találja azt, amire érdemes odafigyelni. A legkisebbek esetében azonban nem a tekintet vándorlásával, hanem a szopóritmus gyorsaságával mérik az érdeklődést. Az érdekesebb helyzeteket gyorsabb szopási ütem kíséri.⁶

Csecsemőknél kimutatható, hogy a szopási ütem megnő, amikor sokszor hallott két hang után hármat hallanak, vagy fordítva. Ez nem csak hangokkal, de képeken látott formák számosságával is igaz.⁷ Úgy tűnik, hogy már a csecsemők agya érzékeny a számosság megváltozására. Felmerül azonban a kérdés, hogy a csecsemők tényleg a számosságra figyelnek-e oda, vagy valamilyen más tulajdonság kelti fel az érdeklődésüket, például a geometriai elrendezés a képi számosságnál (például a két forma által meghatározott szakaszos elrendezés helyett a három forma által meghatározott háromszöges elrendezés) vagy a hangok időtartamának változása (három hang lejátszása tovább tart, mint kettőé).

Erre válaszként a kísérletekben összekötötték a képi és hangyi elemeket. Már egy 48 órás csecsemő azt a képet nézi tovább, amin annyi tárgy szerepel, ahány hangot lejátszottak

⁵Nahalka István: Konstruktív pedagógia – egy új paradigma a láthatáron (I.). Iskolakultúra 7. (1997) 2. sz. 21–33. 24.

⁶ Stanislas Dehaene: A számérzék. Miként alkotja meg az elme a matematikát? Bp. 2003. 72.

⁷ Dehaene: A számérzék. 72-73.

neki.⁸ Ezek szerint már a csecsemők összekötik a fejükben a három hallott hangot a három látott tárggyal vagy formával. A számosság a gondolkodást meghatározó egyik kulcsparaméternek tűnik. Ez olyannyira így van, hogy a csecsemők sokkal érzékenyebben reagálnak a számosság megváltozására, mint egy tárgy alakjának, méretének, színének megváltozására. Ha egy paraván mögé egy piros teherautó ment be, de mögüle egy zöld labda jött ki, tíz hónapos korig semmilyen meglepetés nem mutatható ki a babák reakciójában. Ellentétben azzal a helyzettel, ha egy tárgy ment be, de nulla vagy két tárgy bukkan elő.⁹

A hangok és képek között a számosság összekapcsolásánál látni kell, hogy az csak egészen kis számok (három, vagy annál kisebb), illetve más nagyságrendek esetén adott egyértelmű eredményt. A reakciókban adott különbség 4 és 12 ábra, illetve hang esetén számottevő volt, ám 4 és 8 esetén nem. Ez azt mutatja, hogy ennyi idősen a nagyságrendre vagyunk érzékenyek, agyunk nem számol pontosan. A "körülbelüli" számolás, azaz a becslés miatt csak a nagyobb különbségeket vesszük észre, a kisebbeket nem.

Ez nem csupán csecsemőkori sajátosság. Agyunk később is automatikusan, gyorsan becsüli a számosságot, nem jelent számára több munkát, mint például a színek vagy a tárgyak méretének megkülönböztetése.¹⁰ A számosság bár az agyi aktivitást meghatározó kulcsparaméter, hasonló nagyságrend esetén hajlamosak vagyunk hibázni, csak a nagyobb különbségeket vesszük viszonylag nagy pontossággal észre. Ez azt mutatja, hogy az emberiség története folyamán hasznos volt a becslés képessége, de túlélésünk szempontjából nagy jelentősége nem volt a pontos számolásnak, amit viszont a mai matematika egyik alapvetésének gondolunk.

A számosság érzékelésén túl agyunk már csecsemőkorban "számol" valószínűséget is. Egy kísérletben kis videót mutattak csecsemőknek, melyben három kék és egy sárga tárgy volt

⁸ *Véronique Izard, Coraile Saun, Elizabeth S. Spelle, Arlette Streri (2009): Newborn infants perceive abstract numbers. PNAS, 106 (2009.) 25 sz. 10382-5.*

<https://www.pnas.org/content/106/25/10382> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)

⁹ *Dehaene: A számérzék. 81.*

¹⁰ *David Burr, John Ross: A visual sense of numbers. Current Biology, 18 (2008) 6. sz. 425-8.*

<https://www.cell.com/action/showPdf?pii=S0960-9822%2808%2900238-8> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)

látható egy tartályban, majd egy tárgy kiesett abból. A csecsemők meglepetése nagyobb volt, amikor a statisztikának némileg ellentmondva a sárga tárgy esett ki a tartályból.¹¹

Ezeknek a teljesség igénye nélkül megemlített kísérleteknek a leírásával azt kívántam érzékeltetni, hogy agyunk matematikatanulás nélkül is rendelkezik valamiféle számfogalommal. Hogy milyennel, azt talán egy amazóniai indián törzsön (mundurucu) végzett kutatás mutatja meg legjobban.¹² Ők ugyanis nem tanulnak matematikát, tehát a meglévő számfogalmukat nem befolyásolja mesterségesen az oktatás. Ebben megegyeznek a csecsemőkkel, nagy előny viszont, hogy velük sokkal összetettebb kísérleteket is el lehetett végezni, amit több kutatócsoport meg is tett.

Az egyik ilyen kísérletben a törzs tagjainak a térben kellett elhelyeznie számokat, azaz számegyenest kellett készíteniük (számok helyett adott számú pontot tartalmazó ábrákkal, hiszen mint látni fogjuk, számokat nemigen használnak). A feladatot hibátlanul elvégezték, a számok sorrendje a számegyenesen a helyes sorrend volt. Azonban ellentétben az iskolában megtanult, és általunk természetesen használt számegyenessel az ő skálájuk nem lett lineáris. Az 1 és a 2 között sokkal nagyobb volt a különbség, mint például a 8 és a 9 között. Ebben egyébként teljesen hasonló megközelítést mutatnak a matematikatanulást még el nem kezdő francia gyerekek is. Az ő számegyenesükön is a kisebb számok között nagy a különbség, majd ahogy nőnek az ábrázolandó számok, ez a különbség úgy csökken. Ez az érzet talán felnőttkorra sem tűnik el teljesen, a 95 helyett 96-ot venni sokkal kisebb hibának tűnik, mint egy helyett kettőt. A belső skálánk tehát alapvetően logaritmikus, nem lineáris. Ez összhangot mutat azzal, hogy agyunk a nagyságrendekre érzékeny, a pontos számolás (az egészen kicsi számoktól eltekintve) nem tartozik hozzá a természetes, evolúcióval öröklött működéséhez. A számegyenest lineárisra már az iskola teszi, ahol megtanuljuk, hogy a szomszédos egész számok egyenlő távolságra vannak egymástól, hiszen a közöttük lévő különbség ugyanakkora. Néhány év matematikatanulás után ez teljesen természetesnek tűnik, de a matematikatanulás előtti tapasztalatokra építve más a szemléletünk.

Az automatikus becslés tehát az evolúcióval alakult ki agyunkban, pontosan számolni viszont csak nagyon kis számok esetén vagyunk képesek. Kísérletekkel kimutatták, hogy

¹¹ Dehaene: Education, brain plasticity and neuronal recycling, 7:10.

¹² Laura Fontanari, Michel Gonzalez, Giorgio Vallortigara, Vittorio Girotto: Probabilistic cognition in two indigenous Mayan groups. PNAS, 111 (2014) 48. sz. 17075-17080.
<https://www.pnas.org/content/111/48/17075> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)

háromnál nagyobb számú tárgy megszámlálása esetén már jelentősen romlik agyunk teljesítménye.¹³

Gyorsan képtelenek vagyunk megszámlolni 8 pontot, de már 4-5 pont esetén is nagy a hibázási arányunk. Ezt a felismerést jól mutatja a római számok struktúrája. Az első három számot még adott számú vonallal jelöljük (III.), ugyanis azt képesek vagyunk gyorsan, viszonylag nagy pontossággal megszámlolni. Négy vonalkánál viszont már jelentősen megnő a hibázási arány, első pillantásra nem könnyű meghatározni, hogy hány vonalkát látunk (tekintsük csak a IIII. és IIIII. esetet), ezért ezt a számot már más szimbólum jelöli (IV.). A római számstruktúra kialakulásakor fontos szerepet játszott tehát az a tapasztalat, hogy háromnál nagyobb számú szimbólumot agyunk nehezen számol meg.

A dolog érdekessége, hogy tőlünk távoli kultúrákban is megfigyelhető a jelenség. A kínai számokat háromig vízszintes vonásokkal jelölik (一, 二, 三), a négyre azonban már ettől teljesen különböző jelölést használnak (四).

Az 1, 2, 3 kitüntetett szerepe a nyelvekben is megjelenik, gondoljunk csak az angol sorszámnevekre. Az első három sorszámnévnek külön neve van (first, second, third), míg az ennél nagyobb sorszámneveket a -th raggal képezzük. Az első három számnak a számos nyelvben kitüntetett szerepe egymástól elszigetelten kifejlődött kultúrákban is megjelenik. Eszerint a számolási pontosság felső határának tapasztalata genetikailag kódolt, nem pedig kulturális termék.

Kísérletben vizsgálták, hogy milyen gyorsan tudunk megszámlolni pontokat. Három pontig a válaszadáshoz szükséges idő lassan növekszik, majd három fölött a növekedés gyorsabbá válik, és innentől lineárisan növekszik.¹⁴ A reakcióidő annyi, amennyi idő alatt a lehető leggyorsabban egyesével tudunk számolni. Ahhoz tehát, hogy a háromnál nagyobb halmazok számosságát pontosan megmondjuk, egyesével kell megszámlolnom a halmaz elemeit. Az 1, 2, 3 számokat azonban számolás nélkül, ránézésre meg tudjuk állapítani. Ráadásul a reakcióidő nem függ a pontok geometriai elhelyezkedésétől, így ténylegesen számosságot állapítunk meg, nem elrendezéshez társítunk számokat (például szakaszos elrendezéshez a kettőt, háromszöghöz a hármat).¹⁵ Ennél nagyobb számok esetén agyunk gyorsan becsül, lassan számol.

¹³ Dehaene: A számérzék. 92.

¹⁴ Dehaene: A számérzék 92-93.

¹⁵ Dehaene: A számérzék 94.

A már említett munduruku törzs nyelvében is látható, hogy agyunk alapvetően a becslésre van beállítva, pontos számokra csak kis számok esetén. Külön szavuk ugyanis csak négyig van a számokra. Az ötöt "egy kéz"-nek mondják, a nagyobb számokra csak nagyságrendi elnevezéseik vannak (pl. két kéz, néhány, sok). Érezzük, hogy a néhány vagy a sok szavakkal bizonyos mennyiség fölött nem lehet pontos számosságokat meghatározni. Mivel a törzs tagjai nem hoztak létre a mienkhez hasonló matematikát, erre nincs is szükségük. Mégis, a kísérletek során, melyekben bizonyos számú objektumot kellett összehasonlítaniuk (például melyik kupacban van több pont), alig különböztek eredményeik a francia kontrollcsoportétól, akiknek a nagyobb számokra is pontos kifejezéseik vannak. Ez a különbség még a nagy számok terén sem volt jelentős. A munduruku törzs tagjai tehát anélkül becsülnék jól számosságot, hogy az adott számú pontot meg tudnák számolni.¹⁶ A számolni tudás érdemben nem segíti a becslés képességét.

A magyar (vagy más európai, például angol) nyelvben is megfigyelhető a becslés természetessége, gondoljunk csak a tucat (angolul dozen) szavunkra. Ez egyaránt jelenthet a 12 helyett 11-et vagy 14-et, nem pontos, csupán körülbelüli, nagyságrendi értelemben használjuk.

3. Szimbólumok bevezetése

Bizonyos tevékenységek megjelenésekor azonban elkerülhetetlen volt a pontosabb számfogalom használata, a pontos számolás. Az emberiség tehát különböző szimbólumrendszereket hozott létre annak érdekében, hogy a számolás pontosabbá válhasson. A matematikatanításnak az alapja, hogy a szimbólumok és a mennyiségek összekapcsolhatók a gyerekek fejében. Ez azonban nem magától értetődő, hiszen míg a mennyiségek érzékelése hozzátartozik agyunk természetes működéséhez, a szimbólumok használata tanulási folyamathoz kötött.

A kutatások azt mutatják, hogy hamar meg lehet tanulni a számok neveit, sőt, az alapvető műveleteket, számolásokat is gyorsan el lehet sajátítani. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a gyerek érti is a kapcsolatot a szám neve és az általa kifejezni kívánt mennyiség között. Ennek megtanulása hosszú ideig tart, a folyamat során sok hibával. Ugyanez igaz a műveletekre: hamarabb meg lehet tanulni az egyszerűbb műveletek elvégzésének

¹⁶ Laura Fontanari, Michel Gonzalez, Giorgio Vallortigara, Vittorio Girotto: Probabilistic cognition in two indigenous Mayan groups.

algoritmusát, ezeket az algoritmusokat alkalmazni, mint megérteni a lényegüket.¹⁷ A szorzótábla megtanulása második osztályban ezért sokkal inkább memóriagyakorlat, mint matematika. Ezt igazolja az is, hogy a szorzótábla mely részében vagyunk mindannyian hajlamosak hibázni, és milyen típusú hibákat követünk el leggyakrabban.¹⁸ Nagyon gyakran egy szorzási feladatnál a hibás eredményt a megoldandó szorzat egyik tényezőjének a szorzási sorából vesszük. Például a 6×9 szorzásra nem hibázunk úgy, hogy 53-at vagy 55-öt mondunk (pedig ezek a számok közel vannak a helyes eredményhez), de 48 vagy 63 gyakran elhangzik válaszként. Ez azt mutatja, hogy hibázás esetén nem pontatlanul számolunk, hanem rossz emléket hívunk elő.

Ennek oka, hogy agyunkban az emlékek asszociatív elrendezésben szerveződnek, aminek számos előnye van, például ezáltal tudunk bizonyos emlékeket töredékes információk alapján is előhívni. A matematikai számítások terén azonban hátrányos, számolás során ugyanis nem kell különféle ismereteknek kapcsolatba lépnie egymással: az lenne hatékony, ha mint egy számítógép, csak az alkalmazott műveletet és annak eredményét hívnánk elő az emlékezetünkől.¹⁹ Hangsúlyozzuk, hogy ez a hátrány csak a matematikai számítások terén igaz, problémamegoldás során kifejezetten előnyös, hogy különböző stratégiákat tudunk előhívni egy feladat kapcsán.

A szimbólumos rendszer bevezetése elsőre az agyunkat mesterségesen más gondolkodásra kényszerítő lépésnek tűnik, azonban MRI-vel végzett agyvizsgálatok során kimutatták, hogy a mennyiségek szimbólumos és nem szimbólumos összehasonlításánál is az agynak körülbelül ugyanazok a hálózatai aktivizálódnak. Matematikusok agyműködését vizsgálva látszik, hogy ugyanez a helyzet még az egészen absztrakt magas matematikával is. Ez azt mutatja, hogy az évezredek óta meglévő mennyiségi összehasonlítás képességét az emberi agy megtanulja összekötni számjegyekkel, számjegyek neveivel.²⁰ Ezt a sikeres összekapcsolást szimbólumok segítségével érjük el. Ez nagymértékben az oktatás eredménye, segítségével megtanulunk gyorsan asszociálni a 3-mas számjegy, a három,

¹⁷ Karen Wynn: Children's acquisition of number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24 (1992), 220-251.

¹⁸ Dehaene: A számérzék. 170.

¹⁹ Dehaene: A számérzék 169.

²⁰ Stanislas Dehaene, Laurent Cohen: Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, 1 (1995), 83–120.

mint szó, és a három darabot jelentő mennyiség között. Ez a hármas kódolás: a verbális kódot összekötjük a vizuális kóddal (a szimbólummal), és a számossággal.

Természetesen az agy sokkal bonyolultabb annál, hogy ilyen egyszerű mechanizmusokkal leírjuk a működését. Szavak olvasásakor, egyszerű műveletek elvégzésekor tíz-húsz agyi terület is aktiválódik, ezek mindegyike egy-egy elemi működésért felelős.²¹ Pozitronemissziós tomográfia (kis mennyiségű radioaktív anyag segítségével az agy egyes részeinek az anyagcseréjét méri) vagy újabban funkcionális mágneses rezonanciás képalkotással azonban kimutatható néhány agyterület, amely a matematikai feladatok elvégzése során aktív. Ezek egyértelműen mutatják a kétoldali prefrontális és az alulsó fali kérgi aktivitást például kivonásos feladatok során. A bal féltekében ez az aktivitás erősebb, mint a jobb féltekében.²² A prefrontális kérgi aktivitás kimutatható egyéb, emlékezettel kapcsolatos feladatoknál is, így vélhetően ennek a területnek a matematikai feladatok megoldása során is az emlékek előhívása a feladata.²³ Azt már korábban láttuk, hogy az egyes számolási feladatok elvégzése memóriagyakorlatnak számít.

Az agyi aktivitást mérő, említett eljárásoknak hátránya, hogy nem képesek „pillanatfelvételt” rögzíteni. Az látható, hogy a feladatok során az agynak körülbelül melyik területei aktiválódnak, azonban a sorrend, az időintervallum nem. Ennek mérésére újabban elektro- és magnetoencefalográfiai módszereket fejlesztettek ki, melyek működése azon alapul, hogy az agyi idegsejtek egymással történő kommunikációja során az idegi impulzusokat adó ionok elektromos töltéssel rendelkeznek. Az agy áramforrásként, az idegsejtek áramtermelőként működnek, így a futó elektromágneses hullámok mérhetők.²⁴ Ezzel a technikával vizsgálták agyműködést számok összehasonlítása közben.²⁵ A szám megjelenésekor a nyakszirti lebenyben található, vizuális azonosításért felelős területek aktiválódtak. Ekkor az agy még csak a szám alakját ismeri fel, a jelentését, a hozzá kapcsolódó mennyiséget nem. Ez kicsivel később, az alulsó fali lebeny aktiválódásával kezdődik. Ezután kezdődhet meg a válaszadás, melyhez az izmok összehúzódása miatt kis többletidőre van szükség. Az egész folyamat körülbelül 4 tizedmásodperc alatt megy végbe, a kísérleti személyek átlagosan ennyi idő elteltével válaszoltak.

²¹ Dehaene: A számérzék. 281.

²² Dehaene: A számérzék. 279.

²³ Dehaene: A számérzék. 282.

²⁴ Dehaene: A számérzék. 287.

²⁵ Dehaene: A számérzék. 289.

A dolgozatnak nem célja bemutatni a számolás közbeni agyműködést, a két példával csak azt szerettem volna érzékeltetni, hogy a technika fejlődésével az egyes tevékenységért felelős agyi területek egyre pontosabban meghatározhatók. Azonban az agyműködés bonyolultsága miatt ezeknek a méréseknek megvannak a maguk korlátai. Ezeket az új eredményeket érdemes beépíteni a matematikatanítás módszertanába, hiszen az agy működésének megismerésével, ahhoz igazítva hatékonyabb eszközrendszert hozhatunk létre.

Láttuk tehát, hogy a szimbólumos és nem szimbólumos számolás esetén is az agynak hasonló hálózatai aktiválódtak, így a két különböző tudás összekapcsolása az agyban sikeres. Felmerül a kérdés, hogy ez a kapocs megvan-e a mennyiségek becslése és a szimbólumokkal való precíz számolás között is, vagy ez két teljesen eltérő tudás. Egy kísérletben nagycsoportos óvodásoknak adtak fel számukra túl nehéz feladatot, melyben nagy számokkal kellett dolgozniuk (például összehasonlítani a $21+30$ -at a 34 -gyel, a számukra is érthető nyelvezettel). Az eredményeik messze jobbak voltak a véletlenszerű válaszadásnál, pedig óvodások egészen biztosan nem tudtak összeadni ekkora számokat. Ezek a meglepőnek tűnő eredmények a becslési képességeiknek köszönhetők. Hiába nem tudják még óvodás korban elvégezni ezeket a bonyolult műveleteket, a számok nagyságrendjét érzékelik, még úgy is, hogy nem egy-egy kupacban vannak az összehasonlítható mennyiségek, hanem az egyikhez el kell végezni egy „összeadást”. Később megismételték vizsgálatokat a kísérletben résztvevőkkel, melyek során kiderült, hogy akik az óvodáskorban elvégzett kísérletben jobban oldották meg a feladatokat, később az iskolában is jobban teljesítettek matematikából.²⁶ Eszerint tehát kimutatható kapcsolat van agyunknak a természetes, a számok becslésére vonatkozó képessége, valamint a későbbi precíz számolás képessége között.

Egy másik kísérletben 6 hónaposok közötti egyéni különbségeket figyeltek meg, és ezek a teljesítménybeli különbségek a kísérletben résztvevőket tovább követve évekkal később is megfigyelhetők voltak.²⁷ Ezek szerint a becslési képességeink nagymértékben

²⁶ Camilla K. Gilmore, Shannon E. McCarthy, Elizabeth S. Spelke: Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, 115 (2010), 3. sz. 394-406.

²⁷ Ariel Starr, Melissa E. Libertus, Elizabeth E. Brannon: Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 110 (2013), 45. sz. 18116-18120.

<https://www.pnas.org/content/110/45/18116> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)

meghatározzák a későbbi matematikai teljesítményünket is, összefüggés van a két különböző tudás között.

Tehát a matematikai benyomásaink szimbólumokkal való összekötése alapvetően sikeres tud lenni az agyban, nem jelent számottevően különböző jellegű tudást. Erre utal, hogy a két féle feladat során agyunknak hasonló részei dolgoznak, valamint az is, hogy akik a nem szimbólumos matematikában jónak bizonyulnak, később a szimbólumokkal leírt matematikában is jobb eredményeket érnek el.

A szimbólumos és nem szimbólumos matematika hasonlóságát mutatja az is, hogy szimbólumokkal történő összehasonlításnál (melyik szám a nagyobb) is érvényesül a távolsághatás,²⁸ azaz egymáshoz közelebb eső számoknál nagyobb eséllyel hibázunk. Ebből arra lehet következtetni, hogy agyunk ténylegesen nem szimbólumokkal, hanem mennyiségi koncepciókkal dolgozik.

A biztató hír az, hogy a nem szimbólumos matematikai feladatok gyakorlása fejleszti a későbbi, szimbólumos matematikai képességeket is.²⁹ Van tehát értelme gyermekkorban a becslést gyakorolni, például olyan egyszerű feladatokkal, hogy melyik doboz tartalmaz több tárgyat. Ennek a kutatások szerint később pozitív hatása lesz a szimbólumos matematikai készségek terén is.

4. Tantervi igények

A matematikatanításban eszerint kulcslépés, hogy a tanuló a saját, belső fogalmait, melyek az evolúcióval öröklődnek, megtanulja összekötni a matematika absztrakt fogalmaival, amiket a matematikaoktatás során sajátítunk el. Ez az igény megjelenik a 2018. évi NAT-tervezetben is³⁰:

²⁸ Stanislas Dehaene: The Cognitive Foundations of Learning Mathematics. Előadás: Cognitive Foundations of Learning in School-Aged Children, Collège de France, 2015.03.03.
<https://www.college-de-france.fr/site/en-stanislas-dehaene/course-2015-03-03-09h30.htm> (utolsó letöltés: 2019.04.07.) 12:20

²⁹ Joonkoo Park, Elizabeth M. Brannon: Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological Science*, 24 (2013), 10. sz. 2013-2019.
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3797151/> (utolsó letöltés: 2019.04.07.)

³⁰ A Nemzeti alaptanterv tervezete. 2018.08.31.
https://www.oktatas2030.hu/wp-content/uploads/2018/08/a-nemzeti-alaptanterv-tervezete_2018.08.31.pdf (utolsó letöltés: 2019.04.07.)

„A matematika tanulása-tanítása során kiemelten fontos feladat a fogalmi gondolkodás, az elvonatkoztatás [...] képességének fejlesztése, valamint az erre épülő tudás és kompetencia megszerzésének támogatása a kognitív fejlődés életkori sajátosságainak megfelelően.”

A belső számfogalmunktól pedig a matematikatanulás során el kell jutni a számok, fogalmak megértéséig, hiszen a NAT-tervezet szerint is

„A matematikai ismeretek magukban foglalják a számok, a mértékek, a struktúrák, az alpműveletek és az alapvető matematikai fogalmak, jelölések és összefüggések készsége szinten alkalmazható tudását.”

Fontos, hogy a szimbólumos és nem szimbólumos rendszer összekapcsolása abban az esetben lehet csak sikeres, ha a gyerekek már meglévő tapasztalataiból indulunk ki. Teljesen természetes, hogy alsó tagozatban a diákok az ujjukon számolnak. Ez fontos lépés például a tízes alap elsajátításában, és az absztrakt számfogalomhoz való eljutásban. A matematikai tudást konkrét helyzetekre, nem pedig elvont fogalmakra építve számos nehézség leküzdhető. A műveletek intuitív megértéséből el lehet jutni az absztrakt jelentésig, fordítva a folyamat sokkal nehezebb.³¹

A számolni tudás tehát alapvetően nem természetes, az evolúcióval öröklött képesség, legalábbis nem abban a formában, ahogy azt a matematikában értjük. Az iskolai oktatásban mégis messze felül van reprezentálva a számolási készség fejlesztése (ami, mint láttuk, sokkal inkább tekinthető memóriagyakorlatnak), algoritmusok megtanulása a különböző feladatok megoldására.

A 2018. évi NAT-tervezet azonban a matematika tanulásának legfontosabb céljai között említi, hogy *„A tanulók fejlesszék problémamegoldó és döntési képességüket”,* valamint már a Matematika című fejezet bevezetésénél szó esik a *„mindennapi problémák”* megoldásáról. A problémamegoldás, a problémamegoldó tanulás, tanítás Magyarországon különösen nagy hagyományokra tekint vissza, és napjainkban is sok kutató foglalkozik a témával.

A jelenleg hatályban levő NAT a következőképpen ír a matematikatanítás céljairól:

„A tanulók matematikai fejlődése és a tanulási folyamat során alapvető, hogy ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő

³¹ Dehaene: A számérzék. 187.

modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő készségek kialakítása, valamint az ezeket megalapozó képességek fejlesztése. Egyaránt lényeges a reprodukív és a problémamegoldó, alkotó gondolkodásmód megismerése, elsajátítása, miközben nem szorulhatnak háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai, transzformációk) automatizált végzése sem.”

Az Európai Unió Tanácsa 2018-ban elkészített egy ajánlást, melyben megfogalmazza a tanulás során elsajátítandó kulcskompetenciákat.³² Ebben a matematikai kompetenciánál a következő mondat szerepel:

„A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás és megközelítés fejlesztésének és alkalmazásának képessége a mindennapok különböző problémáinak megoldása érdekében.”

Ugyanakkor mindennapi problémák modellezése nem könnyű feladat, ráadásul az azokhoz szükséges tudást is el kell sajátítani. Ezért célszerű problémákat felvetni, a diákokat problémamegoldásra ösztönözni. A problémamegoldás során a diák nem csupán algoritmikus eszközökkel old meg egy bizonyos feladatot (ebben a probléma túlmutat a hagyományos feladatokon), ugyanakkor könnyebb a diák szintjéhez és a kapcsolódó matematikai fogalmakhoz igazítani egy problémát, mint egy modellezési feladatot. A problémának nagy előnye az is, hogy a megoldás során később más feladatokra is alkalmazható matematikai tudásra lehet szert tenni.

Felmerül a kérdés, hogy tanterv szerint külön érdemes-e foglalkozni a problémamegoldással, vagy azt szervesen integrálni kell a tananyagba. Kutatások azt mutatják, hogy a problémamegoldáson keresztül tanulás mély, átfogó matematikai tudást eredményez, annak eredményeként a matematika egyes ágai nem különülnek el a

³² A Tanács Ajánlása (2018. május 22.) az egész életen át tartó tanuláshoz szükséges kulcskompetenciákról. Az Európai Unió Hivatalos Lapja, 2018.06.04. C 189/1.

[https://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)&from=EN](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=EN)
(utolsó letöltés: 2019.04.07.)

fejünkben olyan élesen egymástól.³³ Diákoknál gyakran lehet találkozni azzal, hogy az egyes módszereket bizonyos témakörhöz kötik, azokat nehezen alkalmazzák más típusú feladatoknál. A sémák elkülönült rekeszekben tárolódnak, amik között az átjárás csekély. Ennek a feloldásában segíthet a problémákon keresztül történő tanulás.

Külön problémamegoldást tanulni kevésbé hatékony, mert a vizsgálatok alapján a különböző módszerek, heurisztikák megtanulásának kis szerepe van a matematika átfogó megértésében, a széles körű matematikai tudásnak a kialakításában. A problémamegoldás tehát nem egy elkülönítendő téma, hanem szerves része a matematikai tanulásnak.

5. Matematikai problémák

A matematikai probléma Lester és Cai szerint egy olyan feladat, amit a diáknak meg kell válaszolnia, de a megválaszoláshoz nincsen egy kész, elérhető stratégiája.³⁴ Tehát nem egy algoritmust alkalmazva, sem különböző kész algoritmusok közül választva oldja meg a diák a feladatot, hanem egyedi stratégiát vagy stratégiákat dolgoz ki az egyes problémák megválaszolásához.

Sokak szerint a matematikai problémák olyan sokrétűek, hogy nem lehet kategorizálni, hogy milyen egy jó probléma. Cai és Lester felállított egy kritériumrendszert, mely szerint a jó probléma kritériumai a következők:

1. Fontos, hasznos matematikát tartalmaz.
2. A tanulók több irányból, különböző stratégiákkal tudják megközelíteni.
3. Többféle megoldása van.
4. Megbeszélésre, értekezésre ösztönzi a diákokat.
5. Magasabb rendű gondolkodást és problémamegoldást igényel.
6. Hozzájárul a matematikai gondolkodás, felfogás fejlődéséhez.
7. Kapcsolatban áll más, fontos matematikai ötletekkel.
8. Hozzájárul a matematika gyakorlott alkalmazásához.

³³ Frank K. Lester, Jinfa Cai: Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In: Posing and Solving Mathematical Problems. Szerk. Patricio Felmer, Erkki Pehkonen, Jeremy Kilpatrick. 2016. 117–136. 120.

³⁴ Lester, Cai: Can mathematical problem solving be taught? 122.

9. Lehetőséget teremt fontos készségek alkalmazására.

10. A tanárnak jelzést ad arról, hogy mit tanultak meg ténylegesen a diákok, hol ütköznek nehézségekbe.

A jó problémák egyszerűbb értékelését adta Silver 1994-ben, aki a felvetett problémák kreativitását próbálta megragadni.³⁵ Ezt három fő szempont szerint tette, ami meghatározta a későbbi a témában folyó vizsgálatokat is. Az első a felvetett problémák száma, és folytonosságuk. Második a problémák rugalmassága, ami annak vizsgálata, hogy a problémák hány különböző kategóriába sorolhatók be, milyen témakörökkel vannak kapcsolódási pontjaik. Harmadik szempontja a felvetett problémák eredetisége, annak vizsgálata, hogy mennyire különböztek korábbi, ismert problémáktól.

Magáról a problémamegoldás menetéről már számos munka, elmélet született. Ezek közül az egyik leghíresebb Pólya György 1957-es modellje, mely szerint a problémamegoldás folyamata négy lépésre tagolható. Ezek

1. a feladat megértése,
2. a problémamegoldási terv elkészítése,
3. a terv végrehajtása, és
4. a megoldás vizsgálata.

A modellt többek között Lénárd Ferenc illetve kritikával 1984-ben, az ő kísérletei szerint ugyanis az elgondolás és a végrehajtás fázisa nem válik külön egymástól, mint ahogy az ellenőrzés sem egy külön lépés, hanem végigkíséri a megoldás folyamatát. Szerinte a problémamegoldásnak sokkal bonyolultabb menete van, így ő egy hét lépéses tagolást adott, amiben olyan pontok is megtalálhatók, mint az érzelmi elemek, vagy az újratekintés.³⁶

Ezen dolgozat nem szeretné a problémamegoldás folyamatának a meglévő modelljeit felsorolni, ezek összevetése külön ezzel a témával foglalkozó munkát igényelne. Az mindenesetre leszögezhető, hogy átfogó szakirodalom szól erről a témáról. Sokkal kevésbé

³⁵ Edward A. Silver: On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, 14(1994) 1. sz. 19–28.

³⁶ Juhászné Klér Andrea: Problémamegoldó folyamatok. 2011.

https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0019_Problemamegoldo_folyamatok/ch02.html (utolsó letöltés: 2019.04.07.)

érintett kérdés azonban, hogy miként lehet jó problémát készíteni, hogyan kell azokat jól feltenni a diákoknak, illetve a diákok hogyan tudnak maguknak jó kérdéseket feltenni egy probléma megoldása közben, ami segíti a helyes stratégia megtalálását.

Ugyanis a diákok problémafelvető képessége is nagyban segíti mind az átfogó megértést, mind a matematikai nyelv használatának képességét, valamint az érdeklődést is segíthet felkelteni a matematikai problémák iránt.³⁷ A problémafelvetés és a problémamegoldás egymást erősíti, sőt, a problémamegoldás fontos része, hogy azt felteszem magamnak, illetve megfogalmazom, hogy mi a leküzdendő akadály.

Ezért tanítani kell a diákokat arra, hogyan kell egy problémát felvetni, hogyan kell megfogalmazni azt, hogy mi is jelenti benne a nehézséget. A helyes megfogalmazás már egy lépés a megoldás felé.

Problémák készítésében, problémafelvetésben is sokat segíthet az, hogy a „szakértő” problémakészítők hogyan gyártanak új feladatokat. Igor Kontorovich és Boris Koichu elemezték, hogy egy szakértő problémakészítő mi alapján strukturálja a problémákat, milyen módszereket alkalmaz újak készítésére.³⁸ Egy szakértőnek természetesen rengeteg problémát kell ismernie, melyek a fejében rendszert alkotnak. Egy híres problémafelvetővel végzett interjújuk során kiderült, hogy a szakértő három rendezési szabály alapján csoportosítja a problémákat:

1. a probléma mélyebb struktúrái alapján;
2. a felszínes, külső hasonlóságuk alapján; valamint
3. a gazdag matematikai fogalmak alapján, melyek mélyen összeköthetik a problémákat (bár ennek megtalálása a problémamegoldás során nem szükségszerű).

A szakértő a problémákból osztályokat alkot, méghozzá nem a felszíni hasonlóság alapján, hanem aszerint, hogy milyen, a megoldáshoz vezető közös ötlet szükséges a problémák megközelítéséhez. Ezekből a közös ötletekből születhetnek új problémák. A szakértő elmondta, hogy általában választ egy ilyen ötletet, ami korábbi problémáknál már

³⁷ Jinfa Cai, Chunlian Jiang, Stephen Hwang, Bikai Nie, Dianshun Hu: How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study. In. *Posing and Solving Mathematical Problems*. Szerk. Patricio Felmer, Erkki Pehkonen, Jeremy Kilpatrick. 2016. 3–22. 4.

³⁸ Igor Kontorovich, Boris Koichu: A case study of an expert problem poser for mathematics competitions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14 (2016) 1. sz. 81–99.

működött, majd megvizsgálja a hasonló problémákat tartalmazó osztályt, így próbál az eredeti ötlet apró módosításaival új problémákat generálni.

Andreas Poulos egy cikkében strukturáltan leírja egy szakértő problémafelvető (Igor Sharygin) módszereit új problémák kidolgozására:³⁹

1. Újraformázás: egy ismert matematikai problémát új köntösbe helyez (például geometriai feladatot átültet az algebra nyelvére, amely így érdekes, elegáns problémává válik).
2. Lánc: ezt elsősorban akkor alkalmazza, amikor a probléma megoldása bonyolult, sok lépést kíván. Ekkor célszerű az egyes részfolyamatokat kisebb lépésekre szétszedni, ami aztán elvezet a kívánt probléma megoldásához.
3. Speciális eset vizsgálata: alapvető tételek speciális eseteinek vizsgálata érdekes problémákat eredményezhet.
4. Általánosítás: az előző eset fordítottja, minden szinten a matematika egyik alapvető eszköze.
5. Adatok változtatása: adott problémák kis adatainak megváltoztatása egészen más problémát, más nehézséget eredményezhet.
6. Felfedezés: problémák lényegének a feltárása, más szemszögből való megismerésük új problémákhoz vezethet.

A problémamegoldás mind magyar, mind nemzetközi szinten kevésbé jelenik meg a tantervekben, valamint a tankönyvek is inkább klasszikus feladatokat tartalmaznak, mint problémákat.⁴⁰ Persze ezek egy részét át lehet alakítani problémává, de a tanároknak mindenképpen segítség lenne, ha tudnának mihez nyúlni, amikor problémát szeretnének felvetni a diákok számára.

Poulos a már említett cikkében vizsgálja, mi a tanárok célja problémák felvetésével.⁴¹ A célokat négy, egymással is kapcsolatban levő kategóriába sorolja:

1. A diákok számára mély matematikai tudást nyújtani;
2. A diákok matematika iránti pozitív hozzáállását erősíteni;

³⁹ *Andreas Poulos: A research on the creation of problems for mathematical competitions. The teaching of mathematics*, 20 (2017) 1. sz. 26–36. 27.

<http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/38/tmn38p26-36.pdf> (utolsó letöltés: 2019.04.07.)

⁴⁰ *Lester, Cai: Can mathematical problem solving be taught?* 119.

⁴¹ *Andreas Poulos: A research on the creation of problems for mathematical competitions.* 29.

3. Új szellemi kihívás elé állítani a tanulókat;
4. Meglepetést okozni a problémát megoldók számára.

Ha már felvetettünk egy problémát, tanárként nem mindegy a tálaláson túl az sem, hogyan vezetjük a problémamegoldás menetét. Amerikai tanárokat vizsgáló kutatások például azt mutatják, hogy a legtöbb tanár megmutatja a problémák megoldását diákjainak.⁴² Ez időnként a diákok részéről is elvárás, ugyanis sok esetben a biztonság érzése jelenti nekik a matematikai szépséget,⁴³ márpedig biztonságot jelent, ha a tanár megmutat egy algoritmust, amivel egy feladatot meg *kell* oldani. Ezzel azonban elveszünk a diákoktól azt az élményt, hogy a megoldásra maguk jöjjenek rá, valamint a megoldásra is kevésbé fognak emlékezni, ha előtte nem gondolkodtak rajta, esetleg futottak bele néhány zsákutcába.

John Mason szerint a legnehezebb kérdés a tanárok számára a diákok problémamegoldása során az, hogy mikor lépjenek közbe, és milyen módon tegyék azt. Reakciókat önkéntelenül is kifejezünk, azonban a válaszadás, a bizonyos irányba terelés időpontját gondosan kell megválasztani.⁴⁴

Láthatjuk, hogy bár a problémamegoldás terén nagyszámú szakirodalom áll rendelkezésünkre, a problémafelvetés és a problémamegoldás tanári szerepének (például a feladat levezénylése) témakörében egyelőre inkább kérdéseink vannak. Egyre több cikk születik azokról a témákról, hogy a diákok hogyan segíthetnek saját megoldásaikban a probléma helyes feltevésével, valamint hogy milyen előnyei vannak, ha a diák maga is gyárt problémákat.

Márpedig ahhoz, hogy az alaptantervben leírtak alapján a diákok képesek legyenek matematikai problémák megoldására, elengedhetetlen, hogy a tanárok fel tudjanak vetni számukra releváns problémákat. Ilana Lavy és Athara Shriki kutatásai⁴⁵ azt mutatják, hogy

⁴² Lester, Cai: Can mathematical problem solving be taught? 122.

⁴³ Ofer Marmur, Boris Koichu: Surprise and the Aesthetic Experience of University Students: A Design Experiment. *Journal of Humanistic Mathematics*, 6 (2016) 1. sz. 127–151. 132.

⁴⁴ John Mason: When is a problem...? "When" is actually the problem! In: *Posing and Solving Mathematical Problems*. Szerk. Patricio Felmer, Erkki Pehkonen, Jeremy Kilpatrick. 2016. 263–286. 263.

⁴⁵ Ilana Lavy, Atara Shriki: Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the*

a leendő tanárok nem teljesítenek jól problémafelvetésben, inkább hagyományos feladatokat tűznek ki a diákjaiknak. Ezért az egyetemi tanulmányok során érdemes foglalkozni a problémakészítéssel, melyben különösen segíthet az egyetemi és középiskolai tananyag kapcsolatainak feltárása.

A dolgozat második felében egy példát szeretnék mutatni arra, hogy egy adott ötlet alapján hogyan tudunk problémákat készíteni. A feladatok készítéséhez egyetemi tananyagot használok majd fel, a feladatok és a megoldások azonban lefordíthatók középiskolás nyelvre is, így a problémák egy része kitűzhető diákoknak is.

II. rész

Problémakészítés algebrai eszközökkel

A dolgozat ezen részében egy lehetőséget kívánok mutatni arra, hogyan lehet középiskolai problémákat készíteni, illetve középiskolai feladattípusokat általánosan is leírni algebrai eszközökkel. Ehhez segítségül hívok olyan problémákat, melyekkel egyetemi tanulmányaim alatt találkoztam, ezen kívül saját problémákat is bemutatok, melyek egy részét az Érdekességek az algebrából című kurzusra készítettem beadandó feladatként.

A problémák elkészítéséhez lineáris algebrai eszközöket használok, azon belül az invariáns-tulajdonságot használom ki. A szélesebb körben ismert sakktáblás feladatok mintájára bemutatom a háromszög és a négyszög invariáns játékait.

A sakktáblán, invariáns tulajdonságot kihasználó feladatot mutatnak be Kovács Veronika, Palotay Dorka és Pozsonyi Enikő, Egy középiskolai feladat algebrai megoldásai című munkájukban.⁴⁶ A feladat így szól:

1. Feladat: sor-és oszloptündérek

„Jancsi kapott egy gyönyörű szép sakktáblát karácsonyra. Ám éjszaka a gonosz boszorkány megváltoztatta a színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Mikor ezt Jancsi meglátta, nagyon elszomorodott, de szerencsére 16 jótündér a segítségére sietett. A sakktábla minden sorához és minden oszlopához tartozik egy jótündér, aki azzal a különleges képességgel bír, hogy a saját sorában vagy oszlopában a színezést az ellentettjére tudja változtatni. Tehát egy lépésben az adott sorban vagy oszlopban minden feketét fehérre, és minden fehéret feketére színez át. Vissza tudják-e állítani a jótündérek az eredeti sakktábla-színezést?”

A feladatnak az előnye más vektorteres feladatokhoz képest, hogy könnyen lefordítható középiskolás nyelvre, a sakktábla színezése természetesen adódik (ellentétben például a páros-várossal, ahol a színezés természetességéhez képest az egyesületi taglétszámok

⁴⁶ Kovács Veronika, Palotay Dorka, Pozsonyi Enikő: Egy középiskolai feladat algebrai megoldása.

<http://web.cs.elte.hu/~csaba/bboard/2012o/alg3/alg3sort.pdf> (utolsó letöltés: 2019.04.07.)

paritására vonatkozó kikötés némileg mesterkéltten hat). A megoldás bizonyos részeire középiskolás módszerekkel is rá lehet jönni, de a teljes vizsgálathoz lineáris algebrai eszközök szükségesek.

Az algebraba átültetéshez minden színezésnek megfeleltetünk egy 8×8 -as mátrixot, melynek a_{ij} eleme a sakktábla i -edik sor j -edik mezőjének felel meg. Ha ez a négyzet fekete, akkor $a_{ij} = 1$, ha pedig fehér, akkor $a_{ij} = 0$. Az eredeti színezésnek megfelelő mátrix az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egy sortünder azt éri el, hogy az adott sorban az összes értéket megváltoztatja, azaz a 0-ból 1, az 1-ből 0 lesz. Ez megfeleltethető a $\mathbb{Z}_2$ feletti 1 hozzáadásának a sor minden eleméhez. Így például a harmadik sortünderhez tartozó mátrix az

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A kérdés tehát az, hogy egy tetszőleges $C \in M^{8 \times 8}(\mathbb{Z}_2)$ mátrixból az O_k ($k = 0, 1, \dots, 8$) oszloptünderék és az S_n ($n = 0, 1, \dots, 8$) sortünderék felhasználásával eljuthatunk-e az A mátrixhoz. Ez lefordítható arra a kérdésre, hogy A előáll-e

$$C + \sum_k \lambda_k \cdot O_k + \sum_n \mu_n S_n$$

alakban, ahol λ_k és μ_n értéke 0 vagy 1 lehet.

A dolgozat szerzői belátják, hogy pontosan azok a színezések kaphatók meg, amelyekhez létezik λ_i és $\mu_j \in \mathbb{Z}_2$, hogy

$$C = \sum_{i=1}^8 \lambda_i O_i + \sum_{j=1}^8 \mu_j S_j.$$

A tizenhat tündérmátrix közül ráadásul csak 15 független $\mathbb{Z}_2$ fölött (ez viszont bármely 15 tündérmátrixra igaz), így például az első oszloptündér elhagyható az összegből. Eszerint 2^{15} darab olyan színezés van, amelyet a tündérek meg tudnak javítani.

A továbbiakban invariáns-játékokat szeretnénk leírni, ezért ennek a feladatnak is nézzük meg egy invariánst használó megoldását. Ez azt jelenti, hogy találnom kell „valamit”, ami a teljes játék folyamán változatlan, a kiindulási helyzetben megvan, az elérendő helyzetben nincs meg. Így mivel a játék során ez az invariáns változatlan, nem juthatok el a kiindulási helyzetből a véghelyzetbe.

Egy invariánsra példa, ha a kiinduló helyzet, és az összes segédvektorunk (azaz a sakktábla javítása során használt vektorok) merőleges egy rögzített vektorra. Ekkor ugyanis a végeredményként kapott vektornak is merőlegesnek kell lennie rá. Invariáns vektoroknak nevezhetjük azt is, amikor csupán a segédvektorokra merőleges egy rögzített vektor, mert ekkor a kezdeti és az elérendő állásnak ezzel a vektorral vett skalárszorzata megegyezik.

Bebizonyítható, hogy az invariánsok leírhatók merőleges vektorokkal (illetve azokkal vett skalárszorzattal), ezért mostantól ha invariánsról beszélünk, akkor mindig merőleges vektorokat fogunk keresni. Egy invariáns lehet egy merőleges vektorral vett skalárszorzat, de előfordulhat, hogy egyszerre több vektorral vett skalárszorzat (a merőleges vektorok halmazának bármely részhalmaza invariánst ad). Igazolható, hogy az invariánsokat alkotó vektorok alteret alkotnak, hiszen ha a velük vett skalárszorzat nulla, akkor ezek összegével és lineáris kombinációival vett skalárszorzat is nulla. Így egy invariáns altér leírható egy bázisával. Hiszen ha egy vektor merőleges az összes bázisvektorra, akkor az a skalárszorzat tulajdonságai miatt merőleges ezek lineáris kombinációira, így az általuk generált vektortér összes vektorára is.

Nézzük meg, hogy sor-és oszloptündérek esetében hogyan nézhet ki ez az invariáns altér. Látható, hogy bárhol jelölök ki egy 2×2 -es négyzetet, azt bármelyik sor-vagy oszlopvektor vagy nem, vagy pontosan két mezőben metszi. Emiatt nulla vagy két négyzetet változtat meg benne, ami azt jelenti, hogy például a fekete négyzetek paritása nem változik. A helyzeti mátrix skalárszorzata a 2×2 -es négyzetben lévő csupa egyes mátrixszal változatlan, hiszen a feladat során $\mathbb{Z}_2$ felett számolok (csak a fekete négyzetek számának paritására vagyok kíváncsi). Az előző megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy ha egyest írok minden kiségyzet helyére egy sorban és egy 2×2 -es négyzetben, akkor

ezeket akárhogy veszem fel, a skalárszorzatuk nulla lesz. Így bármely 2×2 -es négyzetben a koordináták összege nem változik.

A 2×2 -es négyzetek kiválasztása elsőre önkényesnek tűnhet, hiszen például a 4×4 -es, csupa egyesből álló négyzet is merőleges bármely sor-és oszloptündérhez tartozó vektorra. Ahhoz, hogy megragadjam az összes invariáns vektort, mégis célszerű ezeket választani. Az invariáns altérrel ugyanis tudjuk, hogy egy 49 dimenziós altér, mert a sakktábla 64 dimenziós, és láttuk, hogy 2^{15} darab színezés volt megjavítható, amely színezések egy 15 dimenziós alteret alkotnak. Az invariáns altér dimenziója tehát $64 - 15 = 49$. Így 2^{49} darab invariáns vektor létezik. Nincs tehát esélyünk leírni az összes invariáns vektort, mert ez túl sok, ezért redukálni szeretném azon vektorok számát, melyekkel leírom az invariáns alteret. Ezt úgy tehetem meg, hogy megkeresem egy bázisát. Esetünkben a 2×2 -es négyzetek pont jó lesz bázisnak, mivel egy ilyen 2×2 -es négyzetet egyértelműen meghatároz például a bal felső sarka, ezért ezekből a négyzetekből pontosan 49 darab van, és könnyű látni, hogy egymástól függetlenek. Így a 2×2 -es bázisok lineáris kombinációjaként az összes invariáns vektor előáll.

Ezt a megoldást alkalmazva el lehet készíteni egy másik feladatot, ami ugyanezen a gondolaton alapul, és a már említett dolgozatban szintén vizsgálták.

2. Feladat: 2×2 -es tündérek

„Pisti kapott egy szép sakktáblát karácsonyra. Ám éjszaka a gonosz boszorkány megváltoztatta a színezését: néhány fekete mezőt fehérre színezett, egyes fehéreket pedig feketévé változtatott. Mikor ezt Pisti meglátta, nagyon elszomorodott, de szerencsére jótündérek siettek a segítségére. Bármely 2×2 -es négyzethez tartozik egy jótündér, aki azzal a különleges képességgel bír, hogy abban a színezést az ellentettjére tudja változtatni. Tehát egy lépésben az adott 2×2 -es négyzetben minden feketét fehérre, és minden fehéret feketére színez át. Vissza tudják-e állítani a jótündérek az eredeti sakktáblaszínezést?”

Az előzőekben leírt bal felső sarkos trükk szerint tehát összesen 49 tündérünk van, azokat a mátrixokat keressük, amiket ők elő tudnak állítani a csupa nulla mátrixból. Egy-egy kétszer kettős csupa 1 mátrix az oszlopok fekete négyzetei valamint a sorok fekete négyzetei számának paritását sem változtatja meg. Így a nyolc oszlopban a számok összege 0 (modulo 2) és ugyanez igaz a nyolc sorra is. Az előző megoldás során láttuk, hogy a sor-és

oszloptündérek által generált altér dimenziója nem 16, hanem 15 (a 16 javítóvektorból bármely 15 volt független). Mivel találtunk 49 dimenziós merőleges alteret, a javítóvektorok által generált altér pedig 15 dimenziós, ezért a 2×2 -es csupa egyes mátrixok altere maga a keresett merőleges altér, hiszen az összeg 64, ami a sakktábla (azaz a 8×8 -as mátrixok) dimenziója.

Középiskolás nyelven megfogalmazva tehát az a válasz, hogy a 2×2 -es tündérek segítségével pontosan azok a színezések állíthatók elő, melyekben minden sorban és minden oszlopban páros sok fekete (és így páros sok fehér) négyzet van.

Ebből a megoldásból le tudjuk olvasni az invariáns alteret. Az, hogy minden sorban páros sok egyes van, azt jelenti, hogy a tündérmátrix a csupa egyes sorvektorra merőleges. Az, hogy minden oszlopban páros sok egyes van, azt jelenti, hogy a mátrix minden csupa egyes oszlopvektorra merőleges. Így a 2×2 -es tündérek invariáns vektorai pont az oszlop-és sortündérek. Ez pont az első feladat megfordítása, tehát „tündérhalmaz-párokról” beszélhetünk.

A feladatok során mostantól olyan invariáns vektorokat keresek, ami az előzőek alapján a merőleges altér egy bázisát alkotják.

Invariánsok segítségével megoldható feladattal többször is találkozhatunk. A következő típusú feladatban a játékosok vagy kupacok (a feladat megfogalmazásától függően) egy körön helyezkednek el, így a kiinduló konfigurációból a célba való eljutást ciklikus szabályok szerinti lépésekkel szeretném elérni. Ez azt jelenti, hogy a szabály, ami alapján például a játékosok a zsetonokat kapják, bármelyik játékostól indulva ugyanaz. Ellenkező esetben más-más győztes esetén különböző szabályok érvényesülnének, ezek a feladatok azonban nem fogalmazhatók meg jól. A következő feladat Juhász Péter feladata.

3. Feladat: Négyzet csúcsai

Egy négyzet csúcsaihoz kavicsokat helyezek a következő szabály szerint. Minden lépésben az egyik csúcsból elveszek néhány kavicsot, és a két szomszédos csúcshoz ugyanannyi kavicsot helyezek el. Elérhető-e, hogy (9, 7, 10, 13) legyen az egyes csúcsoknál lévő kavicsok száma, ha kezdetben az egyik csúcsnál egy kavics volt, a többinél pedig egy sem?

A feladat egyszerűsíthető arra az esetre, hogy az egyes lépésekben egy kavicsot veszek el, illetve adok hozzá az egyes csúcsokhoz, hiszen ezek ismétlésével elérhető a feladat szövege által írt „néhány” kavics. A csúcsok kiindulási helyzetét elnevezem A, B, C, D-

nek, innen szeretnék a megengedett lépésekkel eljutni A', B', C', D'-be. Az előző példákhoz hasonlóan a feladatot lefordítom az algebra nyelvére.

A lépések során az $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$ kiindulási vektoromhoz néhányszor hozzáadom az

$$\underline{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{a_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{a_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektorokat, és ezekkel szeretnék eljutni az $\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{bmatrix}$ megérkezési helyzetbe. A kérdés

tehát az, hogy léteznek-e olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ számok, melyekre teljesül, hogy

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} + \alpha \cdot \underline{a_1} + \beta \cdot \underline{a_2} + \gamma \cdot \underline{a_3} + \delta \cdot \underline{a_4} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{bmatrix},$$

másképpen felírva az egyenletet

$$\alpha \cdot \underline{a_1} + \beta \cdot \underline{a_2} + \gamma \cdot \underline{a_3} + \delta \cdot \underline{a_4} = \begin{bmatrix} A' - A \\ B' - B \\ C' - C \\ D' - D \end{bmatrix}.$$

Azt kell tehát vizsgálnunk, hogy az $\begin{bmatrix} A' - A \\ B' - B \\ C' - C \\ D' - D \end{bmatrix}$ vektor benne van-e az $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, \underline{a_4}$ vektorok

által generált altérben.

Ehhez egy egyenletrendszert írhatok fel (kicsivel később meg is tesszük), aminek a megoldásait az egészek között kell megkeresnem. Az egészek között általában nem tudok egyenletrendszert megoldani. Test fölött viszont elvégezhető a Gauss-elimináció egy ilyen egyenletrendszer megoldására, így a feladatot érdemes lefordítani úgy, hogy test fölött kereshessem a megoldásokat. Az egészek fölött az egyenletrendszer egy többváltozós diofantikus egyenletrendszer lenne, ami nem megoldhatatlan, de meghaladja mind a dolgozat, mind tanulmányainknak a kereteit.

Ezért nem az egész számok fölött oldom meg az egyenletrendszert, hanem keresek egy olyan p prímet, hogy $\mathbb{Z}_p$ fölött találjak invariánst. Ugyanis $\mathbb{Z}_p$ már test, test fölött pedig el tudom végezni a Gauss-eliminációt, test fölött van vektortér, így találhatok merőleges alteret. $\mathbb{Z}_p$ homomorf képe $\mathbb{Z}$ -nek, megkaphatom úgy, hogy az egészek gyűrűjét lefaktORIZÁLOM a p által generált ideállal. Azt fogom kihasználni, hogy ha valami egy struktúra homomorf képében nem teljesül, akkor az magában a struktúrában sem teljesül.

Térjünk vissza a feladathoz. Egy $\underline{b}$ vektor akkor van benne az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ vektorok által generált altérben, ha $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ megoldható, ahol $\underline{A}$ az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ vektorokból képzett mátrix, a konkrét feladatnál az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix. Ha az $\underline{A}$ mátrix invertálható, akkor $\underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}$ jó megoldás. Ilyenkor mindig van megoldás, tehát nincs invariáns vektor. Ha a mátrix invertálható, akkor invariáns vektort nem is érdemes keresni. Ahhoz tehát, hogy az egyenlet ne legyen megoldható, az kell, hogy az $\underline{A}$ mátrix ne legyen invertálható. Márpedig $\mathbb{Z}_p$ fölött a mátrix nem invertálható, ha a determinánsa nulla.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Ezért $\mathbb{Z}_3$ fölött az $\underline{A}$ mátrix determinánsa nulla, tehát az invariánst $\mathbb{Z}_3$ fölött fogom keresni. Egy olyan $\underline{y}$ vektort keresünk, amely merőleges mind a négy $\underline{a}_i$ vektorra (azaz $\underline{a}_i \cdot \underline{y} = 0$, így $\underline{A} \cdot \underline{y} = \underline{0}$), de $\underline{b} \cdot \underline{y} \neq 0$.

Ha a determináns nulla, azaz az oszloprang kisebb, mint négy, akkor az oszlopok összefüggők, így létezik ilyen $\underline{y}$ vektor. Jelen esetben ez teljesül, az $\underline{A}$ vektor determinánsa nulla. Általánosabban megfogalmazva, mivel $\mathbb{Z}_3$ fölött az $\underline{A}$ mátrix determinánsa nulla, ezért az $\underline{A} \cdot \underline{y} = \underline{0}$ homogén egyenletrendszernek van megoldása, ami ekvivalens azzal, hogy a képtér dimenziója nem nulla. Éppen ezért van az oszlopvektorokra merőleges vektor, így van invariáns vektor $\mathbb{Z}_3$ fölött. Ráadásul mivel a determináns 3, ezért csak $\mathbb{Z}_3$ fölött van invariáns.

Az invariáns altérnek mindig a bázisát szeretném megkeresni. Ebben az esetben az invariáns altér dimenziója 1. Ezt például úgy kaphatom meg, hogy az oszlopok számából (ami 4) kivonom a mátrix rangját (ami 3, mert például a bal felső 3×3 -as aldetermináns egy). Ezért egy darab vektort keresünk.

Meg kell tehát keresnem a merőleges vektort. Ehhez például meg kell oldanom $\mathbb{Z}_3$ fölött a következő egyenletrendszert (az együtthatók az A mátrix elemei):

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \gamma - \delta = 0 \\ -\alpha + \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Behelyettesítéssel látszik, hogy az $\alpha, \beta = -\alpha, \gamma = \alpha, \delta = -\alpha$ kielégíti az

egyenletrendszert, így választhatom az $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektort merőleges vektornak. Teljesül, hogy a

kiinduló $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és az elérendő $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$ vektorom $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorral vett szorzata $\mathbb{Z}_3$ fölött

különbözik, így nem juthatok el a rendre 9, 7, 10, 13 kavicshoz.

Ezt a megoldást le tudjuk fordítani középiskolás nyelvre is. Mivel a megoldást $\mathbb{Z}_3$ fölött kerestem, így a hárommal való oszthatóságot kell vizsgálnom. A merőleges vektor skalárszorzata a játék során használható vektorokkal nulla volt, ami azt jelenti, hogy a csúcsokhoz adható kavicsok számát váltakozó előjellel összeadva hárommal osztható számot kapok. Így az egyes lépések során a négyzet csúcsainál lévő kavicsok számát váltakozó előjellel összeadva az összeg nem változott hárommal való oszthatóság szempontjából. Ezt a megoldást úgy is átfogalmazhatjuk, hogy a két átló összegének a különbsége nem változott hárommal való oszthatóság szempontjából. Márpedig ezek a kiinduló és az elérendő helyzetben különböztek (1 illetve 2 a maradék), így a megengedett lépésekkel nem érhető el a kívánt számú gyufa az egyes csúcsoknál.

A következő feladatot az *Érdekességek az algebrából* című kurzus beadandó feladataként készítettem. A célom az volt, hogy Juhász Péter már ismert feladatához hasonló, az invariáns ötletén alapuló, középiskolás nyelven jól megfogalmazható (azaz szép szabállyal rendelkező) feladatokat találjak. Ebben a dolgozatban általánosan is bemutatom, hogyan néznek ki a három-és négyszöges invariáns feladatok.

4. Feladat: Háromszög csúcsai

Ödön, Richárd és Jenő zsetonokért kártyáznak. Minden kör vesztese ad két zsetont a tőle balra, egy zsetont a tőle jobbra ülőnek. A játék kezdetén (hogy az esélyek nagyjából egyenlők legyenek), a legfiatalabb Jenőnek 7, a középső Richárdnak 5, míg Ödönnek 3 zsetonja volt. Lehetséges-e, hogy a játék végén rendre 7, 4 és 4 zsetonnal álltak?

Az előző módszert alkalmazva, az oszlopvektorok $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Az ezekből

készített mátrix determinánsát vizsgálom, és olyan prímet keresek, hogy $\mathbb{Z}_p$ fölött a mátrix determinánsa nulla legyen. Azonban kiszámolva a determinánst, azt kapom, hogy bármilyen test fölött

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A vektorok tehát a racionális számtest fölött összefüggők, így $\mathbb{Z}_p$ fölött is, minden p -re.

Keressünk olyan vektort, amely mind a három vektoromra merőleges. Könnyedén adódik,

hogy az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor ilyen. Ha ezzel a vektorral szeretnék ellentmondásra jutni, azt már

megtalálhatom az egészek fölött. Ha a $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ kiindulási vektort és az elérendő $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektort is

skalárisan szorzom a merőleges $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorral, akkor látom, hogy nem jutottam

ellentmondásra, a szorzat mindkét esetben 15.

Tegyük fel, hogy valamilyen p -re $\mathbb{Z}_p$ fölött talállok egy más fajta ellentmondást. Ez azt jelenti, hogy ott a mátrix rangja nem 2 (mint $\mathbb{Q}$ fölött), hanem 1. Van-e olyan p , hogy a mátrix rangja $\mathbb{Z}_p$ fölött 1? Ezt kétféleképpen is meg tudom keresni, méghozzá a determináns sorrangja, oszloprangja és determinánsrangja közötti összefüggést felhasználva.

Egyrészt a mátrix rangja 1, ha az egyik sornak skalárszorosa a többi. Például legyen az első sor α -szorosa a második sor. Ekkor $\alpha \cdot 1 = 2$, tehát $\alpha = 2$, $\alpha \cdot (-3) = 1$, tehát $1 = -6$, $\alpha \cdot 2 = -3$, tehát $4 = -3$. Olyan testet keresek tehát, amelyben $4 = -3$ és $-6 = 1$. A keresett test ezzel a módszerrel $\mathbb{Z}_7$.

Másrészt a mátrix rangja 1, ha minden kétszer kettes aldetermináns nulla. Ezeket kiszámolva azt kapom, hogy a mátrixban minden kétszer kettes aldetermináns 7. Például

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 7,$$

ez hasonlóan látható a többi aldeterminánsra is. Ezért ezzel a második módszerrel is azt kaptam, hogy $\mathbb{Z}_7$ fölött találhatok új invariánst. Ez a módszer bármekkora mátrix esetén működik, mert egyre kisebb aldeterminánsok mindegyikének oszthatónak kell lennie az adott számmal.

A feladatot tehát $\mathbb{Z}_7$ fölött kell megoldanom, ahol viszont $-3 = 4$, így az eredeti vektorok

helyett tekinthetem az $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokat, valamint a belőlük képezhető

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot.

A feladat megoldásának befejezése előtt – mivel az a lehetséges háromszöges invariáns-feladatok általános leírásánál is felhasználható –, vizsgáljuk meg általánosan a ciklikus mátrixok determinánsát. Ennek segítségével könnyen meg tudom majd határozni a merőleges vektort, így az invariánst, nem kell egyenletrendszerrel számolnom.

Ciklikus mátrix determinánsa

Ebben a részben azt szeretném megmutatni, hogy általánosan hogyan néznek ki a ciklikus mátrixok determinánsai. Az invariáns megkereséséhez ugyanis szükségem van a mátrix rangjának meghatározására, amit eddig is a determináns kiszámolásával végeztem. Amikor már a nagy determináns nulla, akkor van olyan vektor, ami az egészek fölött merőleges,

tehát minden $\mathbb{Z}_p$ fölött is merőleges (ez általában az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor). Ekkor az egészek fölött is

számolhatok, középiskolás nyelven azt jelenti, hogy az összeg nem változik. Ha ennél érdekesebb, összetettebb feladatot szeretnék készíteni (erre példa a 4. feladat), akkor az előzőekben megvizsgáltam az eggyel kisebb aldeterminánsokat, és ezeknek véve a legnagyobb közös osztóját találhattam új invariánst. Szerencsére a feladatban minden 2×2 -es aldetermináns 7 volt, így azok legnagyobb közös osztója is 7, az invariánst tehát $\mathbb{Z}_7$

fölött kerestem. Pontosan egy invariáns van, ha a determináns nulla, az alldetermináns pedig nem nulla.

A merőleges altér dimenzióját innen úgy kaphatom meg, hogy az oszlopok számából kivonom a mátrix rangját.

Ha elkészíték egy invariáns-feladatot háromszögre, akkor az úgy szép, ha a szabály ciklikus, ellenkező esetben ugyanis más játékos győzelme esetén eltérő számú zseton járna. A lépések során használt vektorokból készített mátrix így ciklikus. A megoldás során ki kell számolnom egy ciklikus mátrix determinánsát.

Ezt a sajátértékek szorzataként fogom kiszámolni. Minden sajátvektorhoz tartozik sajátérték:

$$A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}, \underline{v} \neq 0,$$

akkor λ a $\underline{v}$ -hez tartozó sajátérték. Ha a mátrix diagonalizálható, akkor könnyen ki tudom számolni a determinánsát, elég keresni egy sajátvektorokból álló bázist. Ha van sajátvektorokból álló bázis, akkor a sajátértékek szorzata lesz a determináns. Ezek szerint, ha tudjuk a sajátértékeket, akkor egyszerű szorzással ki tudjuk számolni a determinánst.

Tekintsük az $\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \dots \\ \varepsilon^n \end{bmatrix}$ vektort, ahol ε egy n -edik egységgyök. Ha a ciklikus mátrixomat

megszorzom ezzel az egységgyök hatványaiból álló vektorral, akkor megkapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_n & \dots & a_2 \\ a_2 & a_1 & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \dots \\ \varepsilon^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \varepsilon \cdot a_n + \dots + \varepsilon^n \cdot a_2 \\ a_2 + \varepsilon \cdot a_1 + \dots + \varepsilon^n \cdot a_3 \\ \dots \\ a_n + \varepsilon \cdot a_{n-1} + \dots + \varepsilon^n \cdot a_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 + \varepsilon \cdot a_n + \dots + \varepsilon^n \cdot a_2 \\ \varepsilon \cdot (a_1 + \varepsilon \cdot a_n + \dots + \varepsilon^n \cdot a_2) \\ \dots \\ \varepsilon^n \cdot (a_1 + \varepsilon \cdot a_n + \dots + \varepsilon^n \cdot a_2) \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \dots \\ \varepsilon^n \end{bmatrix}$ vektorok az A mátrixnak sajátvektorai. Ez n darab sajátvektor, hiszen az n -

edik egységgyökök száma n . Meg kell mutatni, hogy ez valóban bázis. Ezt a már bevált módszerrel mutatom meg, azaz kiszámolom a sajátvektorokból álló mátrix determinánsát, ami esetünkben egy Vandermonde-determináns, ami az ismert képlet alapján

$$V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3^2 & \dots & \varepsilon_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j).$$

Tehát ez a determináns nem nulla, ezért a vektorok függetlenek, így tényleg bázist kaptam. Egy ciklikus mátrixnak ezért mindig van sajátvektorokból álló bázisa. Most a 3×3 -as mátrixokat vizsgálom, ennek a sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix}$, minden ε -ra. Esetünkben minden harmadik egységgyökre.

A determináns pedig a sajátértékek szorzata, ami a 3×3 -as esetben

$$(a_1 + \varepsilon_1 \cdot a_2 + \varepsilon_1^2 \cdot a_3) \cdot (a_1 + \varepsilon_2 \cdot a_2 + \varepsilon_2^2 \cdot a_3) \cdot (a_1 + \varepsilon_3 \cdot a_2 + \varepsilon_3^2 \cdot a_3).$$

Felmerül a kérdés, hogy honnan tudtam, hogy az egységgyökök hatványaiból álló vektort érdemes tekinteni sajátvektornak. Ezt alapvetően kétféleképpen kaphatom meg. Vagy kiszámolom, vagy valaki megmondja. Hiszen ha már megvan a vektor, akkor könnyű megmutatni, hogy ez tényleg sajátvektor lesz. Rögtön adódik a kérdés, hogy jó-e ha megmondják nekünk, vagy nem.

A magyarországi problémamegoldásban elfogadott, hogy az a jó, ha az ember minél több gondolatra saját maga jön rá. Ehhez azonban meg kell gondolni, hogy melyik szintről indulunk. Ha például az axiómákból és az alapvető adatokból szeretnénk rávezetni az embereket a problémák megoldására, az körülbelül annyi ideig tartana, mint az emberiségnek tartott, amíg eljutott a mai matematikai tudáshoz. Erre általában nincs idő.

A különböző tudományágaknál is kérdés, hogy milyen információkra van szükségünk, és abból milyen matematikát építünk fel. Például egy mérnöknek, aki alkalmazza az differenciál-és integrálszámítást, kell-e tudnia pontosan a határértéken alapuló definíciót, amikor minden ilyen számítását számítógép segítségével végzi? Neki a számítások elvégzéséhez nincs szüksége a definícióra, csak arra, hogy mikor melyik fajta integrált kell betáplálnia a számítógépbe.

Ugyanez a kérdés, hogy hozzáad-e valamit a tudásomhoz az, ha magamtól próbálom kitalálni ezeket a sajátértékeket és sajátvektorokat. Nehéz elképzelni, hogy erre valaki magától rájöjjön, ám ha ez az információnk adott, akkor nagyon sok új gondolathoz fel tudom használni, például invariáns feladatok készítéséhez.

Erre a dilemmára jó példa Szabó Csaba a már említett kurzusán feladott feladata, ami egy negyedfokú egyenlőtlenség igazolását, és az egyenlőség megkeresését tűzte ki:

$$(x^4 + y^4 + z^4) + (\sqrt{3} - 1)xyz(x + y + z) \geq \sqrt{3}(x^3y + y^3z + z^3x)$$

Ehhez hiába van ott a számítógép teljes eszköztára. Beüthetem a függvényt a Wolfram Alphába, ami le is rajzolja azt, de csak közelítő értékeket ad. Ha a programmal lerajzoltatom, akkor láthatom, hogy a függvénynek négy helyen lehet minimumhelye, de a közelítő értékek miatt ezt pontosan nem tudom megállapítani. Ahol ennek a negyedfokú, háromváltozós függvénynek minimumhelye van, ott a parciális deriváltaknak nullának kell lenniük. A függvényt könnyű deriválni, hiszen polinom. A deriváltak azonban még mindig háromváltozós, minden változóban másod- és harmadfokú polinomok. Hogyan oldhatok meg egy olyan, polinomokból álló egyenletrendszert, azaz esetünkben hogyan kereshetem meg három polinom közös gyökeit?

Ehhez kell tudni, hogy létezik az a fogalom, hogy rezultáns, ami azt adja meg, hogy két polinomnak van-e közös gyöke. Ha valaki megsúgja, hogy létezik rezultáns, akkor még mindig ki kell találni azt, hogy a fogalmat hogyan kell több változó esetén használni. Ha ezt kitalálom, akkor tudom számoltatni a számítógéppel. Ennél a feladatnál kiderül, hogy önmagában ennek a segítségével nem tudom megoldani a feladatot, mert a rezultánst iteráltan kell alkalmazni. Az iterált alkalmazás után kapunk egy harminchatod fokú polinomot. Azt tudjuk, hogy ott, ahol minimumhelye van az eredeti függvénynek, ott az x koordináta gyöke ennek a harminchatod fokú polinomnak. Mint írtuk, a Wolfram Alpha rajza azt sejteti, hogy maximum négy ilyen hely van, tehát rá kell jönnöm, hogy a harminchatod fokú polinom harminchat gyöke közül melyik négy gyök lesz a négy jelölt a minimumhelyre.

Fel szeretném bontani a polinomot az egészek fölött irreducibilisek szorzatára. Ez a felbontás pontos (ha valós vagy komplex felbontást szeretnék a számítógép segítségével, az már közelítő értékeket ad). A Wolfram Alpha tehát fel tudja bontani a polinomot egész együtthatós irreducibilis polinomok szorzatára. Esetünkben ez a polinom szép másod- és hatodfokú irreducibilis polinomok szorzataként áll elő. A másodfokú polinomok gyökeit könnyen meg tudom keresni, így ezeknél a gyököknél könnyű megmutatni, hogy ott a függvénynek nincs minimumhelye, kivéve az $x = y = z$ helyet, ami zérushely.

A hatodfokú polinomokkal már nehezebb bánni, kivéve, ha megint kapok egy sugást: a hatodfokú polinom felbomlik két harmadfokú szorzatára, ahol az együtthatók tartalmaznak

$\sqrt{3}$ -as részt is. Ezek után még mindig több ötletet igényel, hogy megtaláljam a gyököket, és eldöntsem, hogy minimumhelyek-e.

Ebből a gondolatmenetből látszik, hogy bár ott van teljes számolási kapacitással a számítógép, megsúgták a megoldáshoz szükséges kulcsfogalmakat, mégis gondolkodással, sok más ötlettel tudom csak kezelni a feladatot. A súgás nélkül esélyünk sem lett volna megkeresni azt, hogy a feladatként adott egyenlőtlenség esetében hol van egyenlőség, azonban még ezzel együtt is rengeteg munkába kerül, mely során sok új gondolat merült fel. Bár a megoldás kulcslépései így nem saját ötletek, annak során mégis számos gondolat került elő, amik hasznosak, máshol is alkalmazhatók. Így nem érezzük csalásnak, hogy nem mutatjuk meg a sajátértékek és sajátvektorok kiszámítási módját, hanem csupán bedobjuk ötletként az egységgyökök hatványaiból álló vektorokat, és megmutatjuk róluk, hogy valóban sajátvektorok.

A 4. feladat befejezése

Az előző részben általános módszert adtam 3×3 -as ciklikus mátrixok sajátvektorainak kiszámítására. Ezt alkalmazzuk a konkrét feladaton. Azt kapom, hogy a merőleges vektorban a koordináták egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Már korábban észrevettük, hogy az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor merőleges. A másik merőleges vektort az előzőekben

leírtak segítségével keresem meg. Tudom, hogy van olyan merőleges vektor, ami $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$

alakú, ahol $\lambda^3 = 1$, tehát a merőleges vektor koordinátái egy mértani sorozat egymást követő tagjai, ahol a mértani sorozat hányadosa egy harmadrendű elem. Ezek szerint harmadrendű elemet kell keresnem $\mathbb{Z}_7$ fölött (az ugyanis középiskolás módon nem túlságosan jól megfogalmazható feladat, ha a játékosok primitív gyököket kapnak a bankból). Harmadrendű elem pedig a 2 és a 4, így a két alkalmas merőleges vektor az $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

és az $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. A ciklikusság miatt ez a két megoldás ugyanazt a merőleges vektort jelenti.

A feladatot úgy gyártottam, hogy a merőleges vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$ alakú legyen. Így az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor is merőleges lett, hiszen az 1 is harmadik egységgyök, mert $1^3 = 1$. Az $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ és az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor egymásnak nem skalárszorosai. Így további merőlegeseket tudok keresni, mert a két merőleges vektor lineáris kombinációi is merőleges vektorok lesznek, hiszen a merőleges vektorok alteret alkotnak. A merőleges altér dimenziója kettő (az eredeti mátrix rangja egy volt), és ezt generálja az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és az $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektor.

Ezek szerint az egyes lépések során a játékosok zsetonjai számának 1, 2 és 4-gyel vett lineáris kombinációja nem változik *modulo* 7, azaz ha középiskolás módon szeretném megfogalmazni a választ, akkor azt mondhatom, hogy az

$$1 \cdot A + 2 \cdot B + 4 \cdot C$$

összeg 7-tel vett maradéka nem változik. A kiinduló és az érkezési helyzetben ezek különböztek (1 illetve 3), így nem érhető el ez a kiosztás sem.

Feladatok háromszögre

Hogyan készíthető invariáns-feladat arra az esetre, amikor hárman ülnek körben? Ekkor

egy lépésben az egyik ember kap a , a másik b , a harmadik c db zsetont, így az $\begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$

mátrix determinánsát kell kiszámolnom, és ennek kell nullának lennie. Ha az előző példához hasonlóan olyan mátrixot szeretnék, aminek a rangja 1, akkor az egyik sornak skalárszorosa a többi sor, így a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{cases} c \cdot \alpha = c \\ b \cdot \alpha = a \\ c \cdot \alpha = b \end{cases}$$

Az egyenletrendszerből látszik, hogy $\alpha^3 = 1$, tehát olyankor lesz $\mathbb{Z}_p$ fölött a mátrix rangja egy, amikor van $\mathbb{Z}_p$ -ben harmadrendű elem. Ez pontosan akkor teljesül, ha $p = 3k + 1$ alakú. Legyen g egy primitív gyök *modulo* p , ennek a rendje $3k$. Ekkor g k -adik hatványának rendje 3 ($O(g^k) = 3$). Ráadásul összesen két harmadrendű elem van, ezek g^k és g^{2k} . Tehát a keresett α lényegében egyértelmű, a két harmadrendű elem α és annak inverze. Több harmadrendű elem nincs, mert $\mathbb{Z}_p$ multiplikatív csoportja ciklikus. Ciklikus csoportban az n -edrendű elemek száma $\varphi(n)$, márpedig $\varphi(3) = 2$.

Eszerint a három játékos közül egy lépésben az egyik a zsetont kap, akkor a második $\alpha \cdot a$, a harmadik pedig $\alpha^2 \cdot a$ zsetont (ha körben ülnek, valamelyik irányban biztosan α -val szorzok). A keresett invariáns vektor tehát az $\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$ valamilyen skalárszorosa lesz.

Lehet-e készíteni más invariánst, ha hárman játszanak, és van valamilyen szabályosság (azaz a körök végén „szép” szabály szerint kapnak zsetonokat)? Lehet-e más vektorteres feladatot készíteni?

Az előző feladatban a mátrix rangja 1 volt, most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a rang nem 1, hanem 2.

Ennek a vizsgálatához a már említett $\begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát kell kiszámolnom,

ez

$$(a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Ez a szorzat kétféleképpen lehet 0. Egyrészt, ha az első tényező, azaz $(a + b + c) = 0$,

ebben az esetben a merőleges vektor az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor. Másrészt, ha a második tényező nulla,

$$\text{azaz } (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0.$$

Feltehetem, hogy a , b és c közül valamelyik nem nulla (legyen $c \neq 0$), így azzal leosztva, c helyébe 1-et írva az $a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b = 0$ egyenletet kell vizsgálnom. Vegyük észre, hogy a bal oldal nem más, mint

$$(a - 1)^2 - (a - 1) \cdot (b - 1) + (b - 1)^2.$$

Ha ezt az egyenletet leosztom $(1 - b)^2$ -tel (a $b = 1$ esetre kicsivel lejjebb kitérek), akkor azt kapom, hogy

$$\left(\frac{a-1}{1-b}\right)^2 + \frac{a-1}{1-b} + 1 = 0$$

Helyettesítsünk be az $\frac{a-1}{1-b}$ helyére x -et, ekkor a bal oldalon éppen a harmadik körosztási polinomot kapjuk: $x^2 + x + 1 = 0$.

A feladat megoldásához tehát olyan prímet keresek, ami osztója a harmadik körosztási polinomnak (hiszen azt szeretném, hogy a mátrix determinánsa $\mathbb{Z}_p$ fölött nulla legyen). Ennek a polinomnak a prímosztói a 3 és a $3k + 1$ alakú számok. Márpedig $\mathbb{Z}_3$, illetve

olyan $\mathbb{Z}_p$ felett, ahol $p = 3k + 1$ alakú, mindig létezik harmadrendű elem. Ezért a sajátvektorok a korábban megmutatottak alapján $\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix}$ alakúak.

Meg kell még vizsgálnom azt az esetet, ha $b = 1$, ekkor ugyanis nem oszthatom le az egyenletet $(1 - b)$ -vel. Ekkor azt kapom, hogy $a = 1$, tehát $a = b = c$, ami megfelel az első esetemnek, amikor a merőleges vektor az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ volt.

Máshogy is meg lehet mutatni, hogy a háromszögjátékok invariánsai mindig harmadrendű elemek segítségével írhatók le. Vegyük észre, hogy az invariáns vektorok az A mátrixhoz tartozó lineáris transzformáció magjának a vektorai (azaz a nullához tartozó sajátvektorok, ami ugyanaz, mint az $A\underline{x} = 0$ egyenlet megoldásai). A magról tudjuk, hogy vektorai sajátvektorok. Olyan feladatot szeretnék gyártani, ahol a mátrix determinánsa nulla. Ha a mátrix determinánsa nulla, az azt jelenti, hogy a mag nem triviális. Ciklikus mátrixoknál mindig van sajátvektorokból álló bázis, a sajátvektorokról pedig az előzőek alapján tudjuk, hogyan néznek ki. A $\underline{0}$ benne van a magban, tehát van olyan sajátérték, ami $\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix}$ alakú és a

0-hoz tartozik. Ezért kell lennie olyan vektornak, ami $\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix}$ alakú, ahol $\varepsilon^3 = 1$, és benne van a magban. Tehát *modulo* p kell lennie harmadrendű elemnek. Ezért egy háromszögjátékban minden invariáns harmadrendű elem segítségével írható le.

Így tudjuk, hogy a vizsgált testben mindig van harmadrendű elem, így a determináns a ciklikus mátrixokról szóló fejezetben leírtak szerint is felbontható a következő alakban:

$$(a + b + c) \cdot (a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c) \cdot (a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c)$$

Ha tehát a determináns nulla, akkor a három tényező közül valamelyik nulla. Minél több nulla közülük, annál kisebb a mátrix rangja.

Az első lehetőség, ha $(a + b + c) = 0$, ami azt jelenti, hogy a sorok összege nulla. A második és a harmadik lehetőség, ha $(a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c) = 0$, vagy $(a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c) = 0$. Ezek pont úgy valósíthatók meg, mint az előbbi példában, azaz ilyenkor egy harmadrendű elem segítségével találhatom meg az invariánst.

Ha csak egy invariáns vektor van, az mindig az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ha más invariáns vektort szeretnék

keresni ezen kívül, akkor nincs más lehetőségem, mint az 1, α és α^2 -tel való szorzás.

Vizsgáljuk meg ezek összegét:

$$1 + \alpha + \alpha^2 = \frac{\alpha^3 - 1}{\alpha - 1} = 0,$$

hiszen α harmadrendű elem volt, így $\alpha^3 = 1$, tehát a számláló nulla. Így minden esetben, amikor ezzel a módszerrel adok invariáns vektort, akkor a vektor koordinátáinak összege nulla lesz.

Ennek a segítségével le tudok gyártani *modulo 7* és *modulo 13* felett megoldható feladatot, mert azok a legkisebb $3k + 1$ alakú prímszámok. Egy lehetséges feladat *modulo 13*:

5. Feladat

Ödön, Richárd és Jenő megváltoztatják a szabályokat. Minden kör végén a győztes kap 2 zsetont a tőle jobbra ülőtől, a tőle balra ülő pedig a bankból kap egyet. Ha kezdetben mindenkinek 20 zsetonja volt, elérhető-e, hogy néhány kör után 25, 29 és 33 zsetonjuk legyen?

Az előbbiek szerint átfogalmazva a feladatot a $\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$ vektorból kiindulva eljuthatok-e a

$\begin{bmatrix} 25 \\ 29 \\ 33 \end{bmatrix}$ -ba úgy, hogy közben az $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokat adhatom hozzá néhányszor a

kiindulási vektoromhoz. Azaz vannak-e olyan α, β, γ számok, melyekre igaz, hogy

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 - 20 \\ 29 - 20 \\ 33 - 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Megvizsgálva a vektoraimból alkotott mátrix determinánsát, megkapom, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

Az invariánst, így a merőleges vektort tehát $\mathbb{Z}_{13}$ fölött kell keresnem. Ehhez felírom az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ -2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Ezt Gauss-eliminációval megoldva megkapom, hogy

$$\alpha = -4\gamma \text{ és } \beta = 3\gamma,$$

ami alapján merőleges vektor az $\underline{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Megvizsgálom a kiindulási és az érkezési vektor $\underline{y}$ -nal vett szorzatát, és a már megszokott módon megkapom, hogy az adott lépésekkel a kiosztás nem érhető el.

Középiskolás módon megfogalmazva a megoldást azt mondhatom, hogy a játékosok zsetonjainak -4 -gyel, 3 -mal és 1 -gyel vett lineáris kombinációja 13 -mal való oszthatóság szempontjából a játék során nem változik. Márpedig a kiindulási és az érkezési helyzetben ezek különböznek, így nem rendelkezhetnek 25 , 29 és 33 darab zsetonnal.

Négyszöges feladatok leírása

Vizsgáljuk meg, hogy a harmadik feladathoz hasonló, négyszöges példák hogyan nézhetnek ki, azaz írjuk le a négyszög invariáns-játékait. A feladat a már megszokott: különböző pozíciókhoz számokat rendelünk, és egy lépésben valamilyen szabály szerint megváltoztathatjuk a csúcsoknál levő értéket. Most négy csúcsom, van, így négy hosszú ciklikus vektorokat szeretnék hozzáadni a kiindulás vektorhoz. Legyen a belőlük felírt mátrix az

$$A = \begin{bmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{bmatrix},$$

ennek vagyok kíváncsi a determinánsára. Ciklikus mátrix determinánsának kiszámításához

az n -edik egységgyököket hívhatom segítségül. A mátrixnak a sajátvektorai az $\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{bmatrix}$ alakú

vektorok, ahol az ε negyedik egységgyök. Negyedik egységgyökök az $1, i, -1, -i$. Így a

sajátvektorok az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}$ és az $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}$.

Mivel sajátvektorokból álló bázissal felírva a mátrixot, a determináns a sajátértékek szorzata, ezért az A mátrix determinánsa

$$(a + b + c + d) \cdot (a - b + c - d) \cdot (a + i \cdot b - c - i \cdot d) \cdot (a - i \cdot b - c + i \cdot d)$$

alakú.

Ha szép feladatot szeretnék készíteni, akkor valamilyen szimmetrikus szabály szerint kapják a körben ülők a zsetonokat, például a győztes (legyen a) két szomszédja kapjon ugyanannyit, legyen tehát $b = d$. Ekkor már sokkal szebb az A determinánsa:

$$(a + c + 2d) \cdot (a + c - 2d) \cdot (a - c)^2.$$

Ez a szorzat háromféleképpen lehet nulla. Ha az első tényező nulla, az azt jelenti, hogy a csúcsoknál lévő összeg nulla. Ha a második tényező nulla, akkor az egymással szemben lévő csúcsok összege egyenlő. Ha a harmadik tényező nulla, akkor pedig $a = c$.

Ha $b \neq d$, akkor meg kell vizsgálnom a determinánsként kapott szorzat azon tényezőit, melyekben található komplex együttható. Ha elvégzem az

$$(a + i \cdot b - c - i \cdot d) \cdot (a - i \cdot b - c + i \cdot b)$$

szorzást (vagy a gyorsabb számolást megkönnyítendő észreveszem, hogy ez nem más, mint

$$[(a - c) + (b - d) \cdot i] \cdot [(a - c) - (b - d) \cdot i],$$

így egy komplex szám és konjugáltjának szorzata), megkapom, hogy ez a szorzat

$$(a - c)^2 + (b - d)^2\text{-tel,}$$

azaz két négyzetszám összegével egyenlő. Tehát két négyzetszám összegének kell nullának lennie $\mathbb{Z}_p$ fölött, amiből következik, hogy $p = 4k + 1$ alakú.

Ezek szerint milyen feladatok gyárthatók, ha négyen ülnek körben? Vagy egy bonyolult feladat *modulo* p , ahol $p = 4k + 1$ alakú, vagy $a + b + c + d$, vagy $a - b + c - d$ segítségével megoldható feladat. Ez utóbbi éppen a harmadik feladat (Juhász Péter

feladata), amikor az $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ volt a merőleges vektor.

Hogy néznek ki a bonyolult feladatok? Ehhez kell keresnem egy negyedrendű elemet, amit behelyettesítek az i helyére az $a + ib - c - id$ vagy az $a - ib - c + id$ helyére. Ha a prímem $4k + 1$ alakú, akkor van negyedrendű elem.

Például *modulo* 5 esetén a 2 primitív gyök, így egy feladat megoldása úgy nézhet ki, hogy „az egyik csúcs meg kétszer a másik csúcs mínusz a harmadik csúcs, mínusz kétszer a negyedik csúcs” nulla lesz $\mathbb{Z}_5$ fölött (azaz $a + 2b - c - 2d$ öttel való oszthatósága az egyes lépések alatt nem változik). Egy ilyen feladat azonban már nem lenne szimmetrikus. Ha $b = d$, akkor a determinánsban $(a - c)^2$ szerepel, ami azt jelenti, hogy két szemben lévő csúcs egyenlő (*modulo* p).

Négyszögre tehát szép feladatot vagy úgy adhatok, hogy a négyszög összes csúcsát kell vizsgálnom, vagy úgy, hogy az átlók különbségét, vagy úgy, hogy két szemközti csúcsot. Több olyan invariánsra épülő feladat, ahol van szimmetria, nem lesz.

Foglaljuk össze, mit kaptunk a négyszög invariáns-játékaira!

A „leggyengébb” játék, amikor csak egy szabály van. Ezt nyilván ciklikusan kell értelmezni (hol az egyik ember nyer, hol a másik, csak ekkor van értelmes feladat).

Ha szép invariánst keresek, az csak úgy lehet, hogy a hozzáadható vektorokból képzett ciklikus mátrix determinánsa nulla. Megvizsgáltam a determinánst a komplex számtest fölött, kaptam egy szorzatot, ami akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. A komplex számtest feletti felbontás

$$(a + b + c + d) \cdot (a - b + c - d) \cdot (a + i \cdot b - c - i \cdot d) \cdot (a - i \cdot b - c + i \cdot b),$$

a racionális számtest feletti felbontás

$$(a + b + c + d) \cdot (a - b + c - d) \cdot [(a - c)^2 + (b - d)^2].$$

A racionális számtest fölötti felbontás egyben egészek fölötti felbontás is, tehát minden p -re *modulo* p így bomlik fel. Akkor találunk invariánst, ha ezek közül a tényezők közül valamelyik nulla (mert akkor lesz a mátrix nem teljes rangú).

1. Első lehetőség, hogy a teljes összeg nulla.
2. Második lehetőség, hogy az átlók különbsége nulla. Ezekhez bármilyen prímet választhatok, bármilyen p -re működik.
3. A harmadik lehetőség, hogy az $(a - c)^2 + (b - d)^2$ négyzetösszeg nulla. Ez a négyzetösszeg csak akkor lehet nulla, ha a prím $4k + 1$ alakú. Ekkor ugyanis *modulo* p van negyedrendű elem. Ekkor a determináns felbomlik úgy, mint a komplex számtest fölött, ha az i helyére a negyedrendű elemet helyettesítem be. Ekkor a feladat úgy nézhet ki, hogy a negyedrendű elemmel a csúcsoknál lévő értékeket ciklikusan szorzom, vagy szimmetrikus feladatot szeretnék, és $b = d$. Ekkor azonban $\mathbb{Z}_p$ fölött $a - c = 0$, tehát két-két csúcs kongruens egymással *modulo* p .

Felhasznált irodalom

1. A Nemzeti alaptanterv tervezete. 2018.08.31.
https://www.oktatas2030.hu/wp-content/uploads/2018/08/a-nemzeti-alaptanterv-tervezete_2018.08.31.pdf (utolsó letöltés: 2019.04.07.)
2. A TANÁCS AJÁNLÁSA (2018. május 22.) az egész életen át tartó tanuláshoz szükséges kulcskompetenciákról. Az Európai Unió Hivatalos Lapja, 2018.06.04. C 189/1.
[https://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)&from=EN](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=EN) (utolsó letöltés: 2019.04.07.)
3. *Andreas Poulos*: A research on the creation of problems for mathematical competitions. The teaching of mathematics, 20 (2017) 1. sz. 26–36.
<http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/38/tmn38p26-36.pdf> (utolsó letöltés: 2019.04.07.)
4. *Ariel Starr, Melissa E. Libertus, Elizabeth E. Brannon*: Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 110 (2013), 45. sz. 18116–18120.
<https://www.pnas.org/content/110/45/18116> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)
5. *Camilla K. Gilmore, Shannon E. McCarthy, Elizabeth S. Spelke*: Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. Cognition, 115 (2010), 3. sz. 394-406.
6. *Czurkó András*: Neurális és funkcionális plaszticitás. In. Bevezetés a neuropszichológiába. Szerk. Kállai János, Bende István, Karádi Kázmér, Racsmány Mihály. 2008.
https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_524_Bevezetes_a_neuropszichologiaba/ch04.html#id509599 (utolsó letöltés: 2019.04.07.)
7. *David Burr, John Ross*: A visual sense of numbers. Current Biology, 18 (2008), 6. sz. 425–458.
<https://www.cell.com/action/showPdf?pii=S0960-9822%2808%2900238-8> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)
8. *Edward A. Silver*: On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, 14(1994) 1. sz. 19–28.

9. *Frank K. Lester, Jinfa Cai*: Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In. *Posing and Solving Mathematical Problems*. Szerk. Patricio Felmer, Erkki Pehkonen, Jeremy Kilpatrick. 2016. 117–136.
10. *Igor Kontorovich, Boris Koichu*: A case study of an expert problem poser for mathematics competitions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14 (2016) 1. sz. 81–99.
11. *Ilana Lavy, Atara Shriki*: Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Eds: Woo, J.; Lew, H.; Park, K.; Seo, D.) 2007. 129-136.
<http://www.emis.de/proceedings/PME31/3/129.pdf> (utolsó letöltés: 2019.04.07.)
12. *Jinfa Cai, Chunlian Jiang, Stephen Hwang, Bikai Nie, Dianshun Hu*: How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study. In. *Posing and Solving Mathematical Problems*. Szerk. Patricio Felmer, Erkki Pehkonen, Jeremy Kilpatrick. 2016. 3–22.
13. *John Mason*: When is a problem...? "When" is actually the problem! In. *Posing and Solving Mathematical Problems*. Szerk. Patricio Felmer, Erkki Pehkonen, Jeremy Kilpatrick. 2016. 263–286.
14. *Joonkoo Park, Elizabeth M. Brannon*: Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological Science*, 24 (2013), 10. sz. 2013–2019.
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3797151/> (utolsó letöltés: 2019.04.07.)
15. *Juhászné Klér Andrea*: Problémamegoldó folyamatok. 2011.
https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0019_Problemamegoldo_folyamatok/ch02.html (utolsó letöltés: 2019.04.07.)
16. *Karen Wynn*: Children's acquisition of number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24 (1992), 220–251.
17. *Kovács Veronika, Palotay Dorka, Pozsonyi Enikő*: Egy középiskolai feladat algebrai megoldása.
<http://web.cs.elte.hu/~csaba/bboard/2012o/alg3/alg3sort.pdf> (utolsó letöltés: 2019.04.07.)

18. *Laura Fontanari, Michel Gonzalez, Giorgio Vallortigara, Vittorio Girotto*: Probabilistic cognition in two indigenous Mayan groups. PNAS, 111 (2014), 48. sz. 17075–17080.
<https://www.pnas.org/content/111/48/17075> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)
19. *Nahalka István*: Konstruktív pedagógia – egy új paradigma a láthatáron (I.). Iskolakultúra 7. (1997), 2. sz. 21–33.
20. *Ofer Marmur, Boris Koichu*: Surprise and the Aesthetic Experience of University Students: A Design Experiment. Journal of Humanistic Mathematics, 6 (2016) 1. sz. 127–151.
21. *Stanislas Dehaene, Laurent Cohen*: Towards an anatomical and functional model of number processing. Mathematical Cognition, 1 (1995), 83–120.
22. *Stanislas Dehaene*: A számérzék. Miként alkotja meg az elme a matematikát? Bp. 2003.
23. *Stanislas Dehaene*: Education, Brain Plasticity, and Neuronal Recycling. Előadás: Cognitive Foundations of Learning in School-Aged Children, Collège de France, 2015.01.06.
<https://www.college-de-france.fr/site/en-stanislas-dehaene/course-2015-01-06-09h30.htm> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)
24. *Stanislas Dehaene*: The Cognitive Foundations of Learning Mathematics. Előadás: Cognitive Foundations of Learning in School-Aged Children, Collège de France, 2015.03.03.
<https://www.college-de-france.fr/site/en-stanislas-dehaene/course-2015-03-03-09h30.htm> (utolsó letöltés: 2019.04.07.)
25. *Véronique Izard, Coraile Saun, Elizabeth S. Spelle, Arlette Streri* (2009): Newborn infants perceive abstract numbers. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 106 (2009.), 25. sz. 10382–10385.
<https://www.pnas.org/content/106/25/10382> (utolsó letöltés: 2019.04.06.)