7. Heti feladatsor

Alapmenü:

1. Tudjuk, 20 < n < 30, valamint hogy $r_1, r_2, \dots, r_k$ és $6r_1, 6\,r_2, \dots, 6r_k$ és $58r_1, 58r_2, \dots, 58r_k$ is teljes maradékrendszerek mod n. Határozzuk meg n lehetséges értékeit. (1 pont)
2. Határozzuk meg $\frac{(kp)!}{p^k k!}$ maradékát mod (p). (2 pont)
3. Mi a $777777^{7654321}$ utolsó két számjegye? (1 pont)
4. Határozzuk meg

   a.) $46^{47^{48}}$ 25-tel vett maradékát.

   á.) $4669256^{2227^{2002}}$ 23-mal vett maradékát. (2 pont)
5. Igazoljuk, hogy $p|(p-3)! + 2^{p-2}$. (1 pont)

Gondolkodtató feladatok:

1. Egy gombócevő versenyen egy híján prímszámnyi sok résztvevő indult, többek közt a király is. A verseny végén mindenki összeszorozta a rajtszámát a helyezési számával és kiderült, hogy így egy redukált maradékrendszert kaptak mod (p). Ki nyert?(3 pont)
2. Igazoljuk, hogy tetszőleges n>0 egész számra és p,q prímekre $pq|n^{pq} - n^p - n^q + n$. (4 pont)

Egyéb házi feladatok:

1. Lajos Balázs beadta a heti feladatsorra a megoldásait, amit a gyakorlatvezetője szeretne kijavítani, de megbetegedett. Segíts a gyakorlatvezetőnek kijavítani Lajos Balázs feladatát! (3 pont)
   Feladat: Mely n-ekre lesz $9^n - 8^n$ és $9^n + 8^n$ egyszerre prím?

   Lajos Balázs megoldása:

   $9^n - 8^n = (9-8) \cdot (9^{n-1} - 9^{n-2} \cdot 8 + \cdots - 9 \cdot 8^{n-2} + 8^{n-1}) = 1 \cdot (9^{n-1} - 9^{n-2} \cdot 8 + \cdots - 9 \cdot 8^{n-2} + 8^{n-1})$ Tehát ez mindig prím lesz.

   $9^n + 8^n = (9+8) \cdot (9^{n-1} - 9^{n-2} \cdot 8 + \cdots - 9 \cdot 8^{n-2} + 8^{n-1}) = 13 \cdot (9^{n-1} - 9^{n-2} \cdot 8 + \cdots - 9 \cdot 8^{n-2} + 8^{n-1})$ Tehát ezt a 13 osztja, azaz nem prím.

   Nincs megoldás.
2. Válaszolj a „Lánchíd trükk” nevű fórumon az alábbi kérdésre:
   Milyen maradékot ad 26636913326735^{660} modulo 133? (2 pont)