Polyák Petra Nóra A2

(2)

$$1234321^{1234321^{1234321}} \equiv x \ (19) \qquad (1234321, 19) = 1$$

felh.: E-F TÉTEL

$\varphi(19) = 18$

$$1234321 \equiv 5 \ (19)$$

$$1234321^{1234321} \equiv y \ (18) \qquad (1234321, 18) = 1 \rightarrow \text{E-F TÉTEL}$$

$$\varphi(18) = (2-1)(3^2-3) = 6$$

$$1234321 \equiv 7 \ (18)$$

$$1234321 \equiv 1 \ (6)$$

$$1234321^{1234321^{1234321}} \equiv 5^{7^1} \ (19)$$

$$5^7 = 78125 \equiv \underline{\underline{16}} \ (19)$$

Feczkó Ágnes A4/á

á) $\varphi(n) = 2^k$

$n = \prod p_i^{\alpha_i}$

$$\varphi(n) = \prod (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = \underbrace{(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \dots (p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1})}_{\text{minden tényező kettőhatvány}} = 2^k$$

(a számelmélet alaptétele: egyértelműség)

$\Rightarrow p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1} = 2^l \qquad l \geq 0 \quad l \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{p_i^{\alpha_i - 1}}_{2^{l-m}} \underbrace{(p_i - 1)}_{2^m} = 2^l$$

I. $p_i = 2 \Rightarrow 2^{\alpha_i - 1} \cdot (2-1) = 2^{\alpha_i - 1} = 2^l$

II. $p_i^{\alpha_i - 1} = 1 \Leftrightarrow \alpha_i - 1 = 0$

$\alpha_i = 1$

$p_i - 1 = 2^l$

$p_i = 2^l + 1 \longrightarrow$ Fermat-prím: $2^{2^k} + 1$ alakú (l 2-hatvány)

$\Longrightarrow$ n kanonikus alakjában minden tényező 2-hatvány vagy Fermat-prím

Czett Mátyás G1

1. $f(n) + d(n) = n+1$ $\left.\begin{array}{l} f(n) = \text{azon } k \text{ számok száma, melyekre } 1 \le k \le n \text{ és } (k;n)=1 \\ d(n) = \text{azon } k \text{ számok száma, melyekre } 1 \le k \le n \text{ és } (k;n)=k \end{array}\right\}$

1 mindkettőben szerepel, a többi szám vagy csak az egyikben, vagy, ha $(k;n) \neq 1$ és $(k;n) \neq k$, akkor egyikben sem. Ha nincs olyan k szám, melyik egyikben sem szerepel, akkor lesz az összeg pont $n+1$, különben $f(n)+d(n) < n+1$ $\quad (k;n)=1=(k;n)=k \Leftrightarrow 1=k=n$

0. eset: $n=1$ $\quad f(n)+d(n)=1+1$ ✓

I. eset: $n>1$ 2-hatvány $\quad n=2^{\alpha}$ $\quad f(n)=2^{\alpha}-2^{\alpha-1}$ $\quad d(n)=\alpha+1$ $\quad 2^{\alpha}-2^{\alpha-1}+\alpha+1 = 2^{\alpha}+1$

$\alpha = 2^{\alpha-1} \Rightarrow \alpha=1$ vagy $\alpha=2$, ha $\alpha \geq 3$ akkor $2^{\alpha-1} > \alpha$, biz. teljes indukcióval: $\alpha=3$: $2^{3-2}=4>3$

ha α-ra igaz, $\alpha+1$-re: $\alpha+1 < \alpha+\alpha = 2\cdot\alpha < 2\cdot 2^{\alpha-1} = 2^{(\alpha+1)-1}$, mert $\alpha>1$

$n=2$ vagy $n=4$ $\quad f(2)+d(2)=1+2=3=2+1$ ✓ $\quad f(4)+d(4)=2+3=5=4+1$ ✓

II. eset: n prím $\quad f(n)=n-1$; $d(n)=2 \Rightarrow f(n)+d(n)=n+1$ teljesül

III. eset: $n = p\,m$ ($m>1$), ahol p páratlan prím. Ekkor $1 \le k = 2m < n$ és $(k;n) = m \neq 1, \neq n$, ezért nem lehet igaz az állítás.

Megoldások: n prím vagy $n=4$ vagy $n=1$.

Feczkó Ágnes G2

(2.) 100 retesz, 100 őr

d-edik őr eltolja az n-edik reteszt, ha $d \mid n$.

Az n-edik reteszt $d(n)$-szer tolják el.

1. eltolás → kinyílik
2. eltolás → bezárul
3. eltolás → kinyílik

⋮

$\Rightarrow$ páratlan sorszámú eltolás után lesz nyitva a cella

$\Rightarrow$ Az n-edik rab hazamehet, ha $d(n)$ páratlan.

ha $n=\prod p_i^{\alpha_i} \Rightarrow d(n)=\prod(\alpha_i+1)$

ha van olyan α_k, ami páratlan, akkor α_k+1 páros

$\Rightarrow 2 \mid \alpha_k+1 \Rightarrow 2 \mid d(n)$ ↯

$\Rightarrow$ n prímtényezős felbontásában minden kitevő páros

$\Rightarrow$ n-edik rab hazamehet, ha n négyzetszám.

Ez úgy is belátható, hogy tudjuk, hogy n osztói párokat alkotnak: $a \mid n \Rightarrow a \sim \frac{n}{a}$

Vagyis az osztók száma csak akkor lehet páratlan, ha van olyan „a", aminek a párja önmaga:

$$a=\frac{n}{a} \Rightarrow n=a^2$$

$\Downarrow$

n négyzetszám

$\Rightarrow$ Hazamehet: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100-as számú cellák rabjai.